

A-469

ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА



5077 / 2-77

19/12-77

P9 - 10905

Ю.И.Алексахин, Э.А.Перельштейн

ВЛИЯНИЕ ЭКРАНИРОВАНИЯ МАГНИТНОГО ПОЛЯ
ЭЛЕКТРОННОГО КОЛЬЦА НА ЕГО ДВИЖЕНИЕ
ВБЛИЗИ ТОНКИХ МЕТАЛЛИЧЕСКИХ ЭКРАНОВ

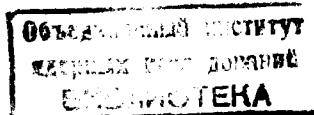
1977

P9 - 10905

Ю.И.Алексахин, Э.А.Перельштейн

ВЛИЯНИЕ ЭКРАНИРОВАНИЯ МАГНИТНОГО ПОЛЯ
ЭЛЕКТРОННОГО КОЛЬЦА НА ЕГО ДВИЖЕНИЕ
ВБЛИЗИ ТОНКИХ МЕТАЛЛИЧЕСКИХ ЭКРАНОВ

Направлено в "Particle Accelerators"



Влияние экранирования магнитного поля электронного кольца на его движение вблизи тонких металлических пластин

Предлагается аналитический метод нахождения экранированных полей линейных токов, движущихся вблизи плоских металлических экранов. Метод используется для нахождения сил торможения и анализа устойчивости электронных колец в коллективных ускорителях ионов с электронными кольцами. Обсуждается эффект отрицательного магнитного трения при движении токовой нити вдоль металлического экрана.

Работа выполнена в Отделе новых методов ускорения ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1977

Influence of Shielding of Electron Ring
Magnetic Field on the Ring Motion near
Thin Metallic Shields

Analytical method for calculation of shielding magnetic fields of linear currents moving near the plane metallic shields is presented. The method is used for calculation of retarding forces and analysis of electron ring stability in ERA. The effect of negative magnetic friction for current filament moving along the metallic shield has been found.

The investigation has been performed at the Department of New Acceleration Methods, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1977

1. ВВЕДЕНИЕ

При рассмотрении вопросов устойчивости электронного кольца при сжатии в камере адгезатора^{/1/}, а также при анализе ускорения электронно-ионного кольца в коаксиальных ему цилиндрических структурах^{/2/} возникает задача о нахождении полей токов, индуцированных в тонких металлических экранах движущимся электронным кольцом.

Экранирование магнитного поля движущихся токов изучалось в работах^{/3-6/} для случая плоской геометрии и в работе^{/7/} - для цилиндрической. Во всех перечисленных работах предполагалось, что электронное кольцо /или шнур/ движется с постоянной скоростью вдоль поверхности проводника. Для решения же задачи об устойчивости движения кольца необходимо знать поля индуцированных им в проводящих экранах токов при произвольном законе движения.

В работе^{/8/} предложен метод, позволяющий решать эти задачи численно с использованием ЭВМ. Полезно, однако, иметь приближенное аналитическое решение, дающее возможность качественно исследовать интересные нас процессы и установить область применимости исходного интегрального уравнения^{/8/}. Такое решение для нити с током, движущейся произвольным образом относительно тонкой проводящей плоскости, получено в разделе 2 и используется для вычисления сил торможения /раздел 3/ и анализа устойчивости

электронного кольца в камере адгезатора /раздел 4/. В разделе 5 обсуждается эффект отрицательного трения в перпендикулярном экрану направлении, имеющий место при движении нити вдоль экрана со скоростью, превосходящей скорость "убегания" изображений.

2. МАГНИТНОЕ ПОЛЕ НАВЕДЕННЫХ ТОКОВ

Рассмотрим бесконечную нить с током

$$j_y(x, z, t) = I(t) \cdot \delta(x - x_0(t)) \cdot \delta(z - z_0(t)),$$

параллельную плоскому металлическому экрану ($x = 0$) толщины h и проводимости σ .

Плотность индуцированных в металле токов определяется формулой

$$j_y = \sigma E_y = -\frac{\sigma}{c} \frac{\partial A_y}{\partial t}, \quad /1/$$

где $A_y = A_y^{(o)} + A_y^{ind}$ - вектор-потенциал суммарного магнитного поля нити и наведенных токов. В нерелятивистском случае ($v^2 = \dot{x}^2 + \dot{z}^2 \ll c^2$) для вычисления вектор-потенциала можно пользоваться стационарной функцией Грина

$$G(x, z, x', z') = -\ln[(x - x')^2 + (z - z')^2].$$

Используя /1/, представим A_y в виде

$$A_y(x, z, t) = A_y^{(o)}(x, z, t) - \frac{\sigma}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \int G(x, z, x', z') A_y(x', z', t) dx' dz', \quad /3/$$

где интегрирование ведется по площади сечения проводника плоскостью $y = \text{const}$. Это соотношение может рассматриваться как уравнение для вектор-потенциала суммарного магнитного поля в металле /8/.

Если толщина проводника h существенно меньше глубины скин-слоя δ_m на характерной частоте $\frac{v}{|x_0|}$:

$$\left(\frac{h}{\delta_m}\right)^2 = \frac{v}{u} \cdot \frac{h}{|x_0|} \ll 1, \quad \text{где } u = \frac{c^2}{2\pi\sigma h}, \quad \text{то можно пренебречь}$$

изменением наведенных токов и, соответственно, вектор-потенциала по толщине металла. Если к тому же $h \ll |x_0|$, т.е. если h много меньше расстояний, на

которых A_y существенно меняется $\left(\frac{1}{A_y} \frac{\partial A_y}{\partial z} \sim \frac{1}{x_0}\right)$,

то уравнение /3/ можно заменить одномерным /8/

$$A_y(z, t) = A_y^{(o)}(z, t) - \frac{\sigma h}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{\infty} G(z, z') A_y(z', t) dz' \quad /4/$$

с функцией Грина $G(z, z') = -2 \ln|z - z'|$.

Для фурье-образа

$$a_k(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A_y(z, t) e^{-ikz} dz$$

из /4/ следует дифференциальное уравнение *

$$\tau_k \frac{da_k}{dt} + a_k = a_k^{(o)}, \quad \tau_k = \frac{1}{u|k|}, \quad /5/$$

решение которого есть

$$a_k(t) = e^{-t/\tau_k} \left(a_k(0) + \frac{1}{\tau_k} \int_0^t a_k^{(o)}(t') e^{t'/\tau_k} dt' \right),$$

$$a_k^{(o)}(t) = \frac{I(t)}{c|k|} \exp[-ikz_0(t) - |kx_0(t)|].$$

Нас интересуют поля в точках наблюдения, удаленных от экрана на расстоянии $|x| \sim |x_0| \gg h$, поэтому можно заменить объемное распределение тока j_y в проводнике поверхностным распределением, фурье-образ которого, согласно /1/ и /5/, есть

$$i_{yk} = h j_{yk} = \frac{c|k|}{2\pi} (a_k - a_k^{(o)}).$$

* При взятии интегралов мы игнорируем расходимость двумерного вектор-потенциала на бесконечности. Правильность получаемых результатов подтверждается решением задачи в цилиндрической геометрии с последующим предельным переходом к плоской.

В качестве начального условия для вектор-потенциала примем $A_y|_{t=0} = \lambda A_y^{(0)}|_{t=0}$ / $\lambda = 0$ соответствует полному экранированию поля нити в начальный момент времени, $\lambda = 1$ - отсутствию экранировки/. Тогда вектор-потенциал магнитного поля индуцированных токов представляется в виде:

$$A_y^{ind}(x, z, t) = -\lambda \frac{I(0)}{c} \ln \{ [z - z_0(0)]^2 + [|x| + |x_0(0)| + ut]^2 \} +$$

$$+ \frac{I(t)}{c} \ln \{ [z - z_0(t)]^2 + [|x| + |x_0(t)|]^2 \} +$$

$$+ 2u \int_0^t dt' \frac{I(t')}{c} \frac{|x| + |x_0(t')| + u(t-t')}{[z - z_0(t')]^2 + [|x| + |x_0(t')| + u(t-t')]^2} \quad /6/$$

Рассмотрим сначала задачу о релаксации индуцированных токов. Пусть в точке $x_0 > 0$, z_0 в момент времени $t_0 > 0$ мгновенно возник ток I . Полагая в /6/ $z_0(t) = z_0$, $x_0(t) = x_0$, получим

$$A_y^{ind} = \frac{1}{c} \ln [(z - z_0)^2 + (|x| + x_0 + u(t - t_0))^2] \quad /7/$$

Отраженное поле /7/ в области $x > 0$ имеет вид поля тока I с координатами $-(x_0 + u(t - t_0))$, z_0 : скорость u таким образом, имеет физический смысл скорости "убегания" токового изображения⁹. Характерное время проникновения магнитного поля в нижнее полупространство

$\tau \approx \frac{x_0}{2u}$, то есть "мгновенными" можно считать процессы, происходящие за время $\Delta t \ll \frac{x_0}{u}$.

Для нити, движущейся с момента времени $t=0$ с постоянной скоростью ($z_0 = v_z t$, $x_0 = x_0^0 + v_x t$, $I = const$), не пересекая экран ($sign x_0(t) = sign x_0^0$), вектор-потенциал отраженного поля имеет вид

$$\frac{c}{I} A_y^{ind}(x, z, t) = -[\lambda + \frac{u(v'_x - u)}{v_z^2 + (v'_x - u)^2} \ln \{ z^2 + (|x| + |x_0^0| + ut)^2 \} +$$

$$+ \frac{v_z^2 + v'_x(v'_x - u)}{v_z^2 + (v'_x - u)^2} \ln \{ (z - v_z t)^2 + (|x| + |x_0(t)|)^2 \} +$$

$$+ \frac{2uv_z}{v_z^2 + (v'_x - u)^2} \{ \arctg \frac{(v'_x - u)(|x| + |x_0(t)|) - v_z(z - v_z t)}{v_z(|x| + |x_0(t)|) + (v'_x - u)(z - v_z t)} -$$

$$- \arctg \frac{(v'_x - u)(|x| + |x_0^0| + ut) - v_z \cdot z}{v_z(|x| + |x_0^0| + ut) + (v'_x - u) \cdot z} \} \quad /8/$$

где $v'_x = v_x \cdot sign x_0^0$. Компонента магнитного поля $B_x^{ind} = -\frac{\partial A_y^{ind}}{\partial z}$, "ответственная" за силу торможения в z -направлении, в установившемся режиме ($t \gg \frac{|x_0^0|}{u}$)

для нити, приближающейся к экрану ($x_0^0 > 0$, $v'_x = -|v_x|$), имеет вид

$$B_x^{ind} = \frac{2I}{c [v_z^2 + (u + |v_x|)^2]} \times$$

$$\times \frac{uv_z [|x| + x_0(t)] - [v_z^2 + |v_x| \cdot (u + |v_x|)] (z - v_z t)}{[|x| + x_0(t)]^2 + (z - v_z t)^2} \quad /9/$$

Если нить движется параллельно проводящей плоскости ($v_x = 0$), то из /9/ следует

$$B_x^{ind} = -\frac{2I}{c} \cdot \frac{\kappa}{1 + \kappa^2} \cdot \frac{\kappa(z - v_z t) - (|x| + x_0)}{(z - v_z t)^2 + (|x| + x_0)^2} \quad /10/$$

где $\kappa = v_z/u$. Этот результат совпадает с нерелятивистским пределом полученного в /4/ решения. В работе /4/ указывается условие применимости формулы

/10/: $h \ll \delta_m \ll x_0$ или $\frac{h}{x_0} \ll \kappa \ll \frac{x_0}{h}$, не выполняющиеся

для малых скоростей v_z . Более тщательный анализ точного решения, найденного в /4/, показывает, что условие применимости формулы /10/ не содержит ограничения на скорость v_z снизу: $h \ll \min\{|x_0|, \delta_m\}$,

или $\frac{h}{x_0} \ll 1$, $|\kappa| \frac{h}{x_0} \ll 1$. При скоростях $|v_z| \gg u$ как

точное решение /4/, так и приближенное /10/ асимптотически стремятся к решению для идеально проводящего экрана. Поэтому при достаточно больших отно-

шениях $\frac{x_0}{h}$, когда области значений скорости v_z ,

определяемые неравенствами $|\kappa| \ll \frac{x_0}{h}$, $|\kappa| \gg 1$, перекрываются, формула /10/ и, следовательно, уравнение /4/, решением которого эта формула является, приближенно справедливы для всех нерелятивистских значений скорости v_z . Аналогично, в случае, когда токи в экране индуцируются не за счет перемещения источника, а изменением текущего в нем тока, уравнение /4/ при условии $\frac{h}{x_0} \ll 1$ справедливо /при-

ближенно/ для всего диапазона частот $\omega \ll \frac{c}{x_0}$.

3. СИЛЫ ТОРМОЖЕНИЯ

Магнитное поле B_x^{ind} , тормозящее движущийся вдоль экрана ток, для реальных параметров $I = 1 \div 10$ кА, $x_0 = 0,5 \div 1$ см и скоростей $v_z \sim u$ может достигать большой величины $/10^2 \div 10^3$ Гс/, превосходящей допустимые /с точки зрения удержания ионов в кольце/ напряженности внешнего ускоряющего поля. Возникающий вследствие этого эффект "убегания" электронов детально обсуждался в работе /10/.

Если скорость нити с током мало меняется за время

$\tau = \frac{x_0}{u}$, то для нахождения действующего на нее магнитного поля можно воспользоваться формулой /10/:

$$B_x^{ind} \Big|_{\substack{x=x_0 \\ z=v_z t}} = \frac{I}{cx_0} \cdot \frac{\kappa}{1+\kappa^2} \quad /11/$$

Максимальное значение поля ($B_{x \max}^{ind} = \frac{I}{2cx_0}$) и

тормозящей силы достигается при $v_z = u = \frac{c^2}{2\pi\omega h}$.

Для нержавеющей стали толщиной $h = 0,1$ см $u \approx 4 \cdot 10^{-6}$ с. При таких малых скоростях условие применимости формулы /11/, т.е. условие малости ускорения

$|\frac{\tau}{v_z} \frac{dv_z}{dt}| = |\frac{dv_z}{dz}| \ll 1$ может не выполняться; тогда

необходимо использовать формулу /6/ для произвольной зависимости скорости от времени. Из /6/ для тормозящего магнитного поля при $x = x_0 = \text{const}$, $z = z_0(t)$, $z_0(0) = 0$, $I = \text{const}$ следует

$$\frac{c}{2I} B_x^{ind} = \lambda \frac{z_0(t)}{z_0^2(t) + (2x_0 + ut)^2} + 2u \int_0^t dt' \frac{[z_0(t) - z_0(t')] \cdot [2x_0 + u(t-t')]}{\{|z_0(t) - z_0(t')|^2 + [2x_0 + u(t-t')]^2\}^{3/2}} \quad /12/$$

Рассмотрим случай "мгновенного" включения ускоряющего поля B_x^{ext} . В качестве начальных условий примем $\dot{z}_0(0) = z_0(0) = 0$, $\lambda = 1$ /отсутствие экранировки в начальный момент/. На малых временах $t \ll 2x_0/u$ интегралом в /12/ можно пренебречь и для силы, действующей на единицу длины нити, имеем выражение

$$F_z = \frac{I}{c} B_{x \max}^{ind} \cdot \left[p - \frac{4x_0 \cdot z}{z^2 + 4x_0^2} \right],$$

где $p = -\frac{B_x^{ext}}{B_{x \max}^{ind}}$. Определим потенциальную энергию на единицу длины из соотношений $F_z = -\frac{dU}{dz}$, $U(0) = 0$. В случае не зависящего от z ускоряющего поля

$$U = -\left(\frac{I}{c}\right)^2 [ps - \ln(1+s^2)], \quad s = \frac{z}{2x_0}.$$

Условие инфинитности движения $U < 0$ выполняется для $p > p_0$, где $p_0 = 0,8$ - решение уравнения

$$1 + \sqrt{1 - p^2} = \ln \frac{2[1 + \sqrt{1 - p^2}]}{p^2}.$$

При меньших напряженностях ускоряющего поля ($p < p_0$) происходит отражение от потенциального барьера и нить совершает колебания по z с амплитудой $\leq x_0$. Скорость усредненного по этим колебаниям медленного движения определяется из равенства поля /11/ приложенному ускоряющему.

Таким образом, как при медленном, так и при быстром включении внешнего поля ускорение первоначально покоящейся нити до скорости $v_z > u$ возможно только при напряженностях $|B_x^{ext}| \geq |B_x^{ind}|$.

В реальной установке /2/, однако, смещение кольца по z начинается в конце фазы сжатия, когда радиальная скорость еще довольно высока $|v_x| \approx 10^{-6}$ с. Тормозящая компонента магнитного поля токов, индуцированных на внутренней проводящей трубе /2/ сжимающимся кольцом, согласно /9/, равна

$$B_x^{ind} = \frac{I}{cx_0(t)} \cdot \frac{uv_z}{v_z^2 + (u + |v_x|)^2},$$

где $x_0 = R - R_T$, R и R_T - радиусы кольца и трубы. Максимальное значение тормозящего поля

$$B_{x \max}^{ind} = \frac{I}{2cx_0} \cdot \frac{u}{u + |v_x|}$$

может быть уменьшено до приемлемой величины соответствующим выбором проводимости и толщины трубы /таким, что $u \ll |v_x|$ /.

4. УСТОЙЧИВОСТЬ ЭЛЕКТРОННОГО ПУЧКА В НАПРАВЛЕНИИ, ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОМ ЭКРАНУ

В адгезаторе ускорителя тяжелых ионов /1/ электронное кольцо сжимается вблизи торцевых стенок узкой металлической камеры. Электрические заряды, индуцируемые кольцом на близких к нему проводящих стенках, существенно влияют на аксиальное /в направлении к стенкам/ движение электронов.

Движение электронов в пучке можно представить как суперпозицию одночастичных бетатронных колебаний относительно локального центра масс и когерентного движения, то есть движения пучка как целого. Как показал Л.Дж.Ласлетт /11/, дестабилизирующее действие индуцированных зарядов на эти два типа движения различно: в первом случае дефокусировка определяется градиентом поля неподвижных изображений, в то время как при когерентном смещении изменение действующей на пучок силы связано также со смещением изображений.

Рассмотрим электронное кольцо радиуса R , расположенное между двумя параллельными проводящими поверхностями * на расстоянии d от каждой, предполагая, что кривизна кольца и изображений незначительна ($R \gg d$). Для простоты мы пренебрегаем вторичными изображениями, то есть зарядами и токами, индуцированными на одной стенке за счет зарядов и токов на другой. Тогда отраженное электрическое поле для нити с зарядом на единицу длины $q = I/v_\theta$, смещенной на расстояние $z_0 \ll d$ от средней плоскости, имеет вид ($|z| \ll d$, $r = R$):

$$E_z^{ind} = \frac{q}{d^2} (z + z_0). \quad /13/$$

* В этом разделе мы используем цилиндрическую систему координат r, θ, z , в которой проводящим поверхностям соответствуют плоскости $z = \text{const}$. Переход от декартовых координат x, y, z к цилиндрическим осуществляется заменой $x \rightarrow r \cos \theta$, $y \rightarrow r \sin \theta$, $z \rightarrow z$.

Магнитное поле токов, индуцируемых в стенках при поперечном равномерном движении пучка, можно найти из вектор-потенциала /8/. В установившемся режиме ($t \gg \frac{d}{u}$) при $|\dot{z}_0| \ll \max(u, |v_r|)$

$$B_r^{ind} = \frac{I}{cd^2} \cdot \frac{v_r^2}{u^2 + v_r^2} (z + z_0) + \frac{2I}{cd} \cdot \frac{(u^2 - v_r^2)u}{(u^2 + v_r^2)^2} \cdot \dot{z}_0. \quad /14/$$

С учетом индуцированных полей /13,14/ частота некогерентных аксиальных колебаний в единицах частоты

обращения $\omega_0 = \frac{v\theta}{R}$ равна

$$\nu_z^2 = n - \Delta n_b - \frac{\nu}{\beta^2 \gamma} \cdot \Phi_s \cdot (1 - \beta^2 f),$$

где n - показатель спада внешнего магнитного поля,

$\beta = \frac{v\theta}{c}$, $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$, $\nu = \frac{eq}{mc^2}$ - параметр Будкера,

Δn_b - сдвиг частоты за счет собственных полей неэк-

ранированного пучка / $\Delta n_b = \frac{2\nu}{\beta^2 \gamma^3} \left(\frac{R}{a}\right)^2$ для пучка

с круглым сечением радиуса a /. Коэффициенты Φ_s и f в нашем приближении имеют вид

$$\Phi_s = \left(\frac{R}{d}\right)^2, \quad f = \frac{v_r^2}{u^2 + v_r^2}.$$

При скорости радиального сжатия $|v_r| \geq u$ наведенные токи существенно ослабляют дефокусирующее влияние зарядовых изображений ($f \approx 1$). Однако требование малости искажения ведущего магнитного поля приводит к тому, что в реальных условиях /1/ $|v_r| \ll u$ и, соответственно, $f \ll 1$.

Введем условие статического равновесия - требование, чтобы сила, действующая на смещенный пучок со

стороны внешнего фокусирующего $B_r^{ext} = \frac{mc^2}{e} \cdot \frac{\beta\gamma}{R} \cdot n \cdot z$

и индуцированных полей при $\dot{z}_0 = 0$, была возвращающей.

Подставляя $z = z_0$ в /13/ и /14/, получим

$$Q_{CT}^2 = n - \frac{\nu}{\beta^2 \gamma} \cdot \Phi_s \cdot (1 - \beta^2 f) > 0, \quad \Phi_C = 2 \cdot \Phi_s. \quad /15/$$

Суммирование полей вторичных изображений показывает, что в действительности разница в коэффициентах еще значительнее /11/:

$$\Phi_C = 3 \cdot \Phi_s, \quad \Phi_s = \frac{\pi^2}{12} \left(\frac{R}{d}\right)^2.$$

В ультрарелятивистском случае $\gamma = \frac{d}{a}$ для устойчивого равновесия кольца как целого требуется показатель спада n , втрое превосходящий значение, необходимое для сохранения компактности пучка ($\nu_z^2 > 0$).

При $R = 20$ см, $2d = 5$ см, $\gamma = 7$ и $n = 0,33$, например, равновесие имеет место при токе $I \approx 250$ А. Так как вблизи стенки сила электростатического притяжения пропорциональна $(d - z_0)^{-1}$, то в реальных условиях из-за несовпадения плоскости симметрии внешнего магнитного поля со средней плоскостью камеры ограничение на ток может оказаться более сильным, чем следует из /15/.

Для выполнения условия равновесия при больших токах необходимо, таким образом, увеличивать показатель спада или апертуру камеры ($2d$). При значительном удалении стенок кольцо подвержено быстроразвивающейся неустойчивости отрицательной массы /12/. Возможности увеличения показателя спада также ограничены: при $n \geq 1$ становится неустойчивым когерентное радиальное движение. Значительное увеличение n нежелательно также в связи с неизбежным в этом случае прохождением большого числа резонансов одночастичных колебаний.

Исследуем поэтому подробнее характер когерентного аксиального движения при значениях показателя поля, обеспечивающих компактность пучка, но не обязательно его равновесие в медианной плоскости камеры.

При нахождении отраженных полей снова пренебрежем взаимодействием зарядов и токов, наведенных на разных стенках. Пользуясь вектор-потенциалом /6/, представим отраженное магнитное поле для $|z_0| \ll d$, $v_r = \text{const}$ и $t \gg \frac{d}{u}$ в виде:

$$B_r^{\text{ind}}(r, z, t)|_{r=R(t)} = \frac{I}{c} \frac{v_r^2}{u^2 + v_r^2} \frac{z}{d^2} + \frac{I}{c} \left[\frac{z_0(t)}{d^2} - 8u \int_0^t dt' z_0'(t') \frac{\{2d + u(t-t')\} \{2d + u(t-t')\}^2 - 3v_r^2(t-t')^2}{\{2d + u(t-t')\}^2 + v_r^2(t-t')^2} \right] /16/$$

Подстановка полей /13/, /16/ в уравнение движения центра масс кольца

$$\ddot{z}_0 + n\omega^2 z_0 = \frac{e}{m\gamma} (E_z^{\text{ind}} - \beta B_r^{\text{ind}})|_{z=z_0} /17/$$

и последующее применение преобразования Лапласа $z_p = \int_0^\infty e^{-pt} z_0(t) dt$ приводят к дисперсионному уравнению

$$F(x) = x \frac{\kappa^2 - 1}{(1 + \kappa^2)^2} + x^2 \left[\frac{1}{(1 + i\kappa)^3} e^{\frac{2x}{1 + i\kappa}} E_1\left(\frac{2x}{1 + i\kappa}\right) + \frac{1}{(1 - i\kappa)^3} e^{\frac{2x}{1 - i\kappa}} E_1\left(\frac{2x}{1 - i\kappa}\right) \right] = \frac{Q_{CT}^2 + x^2 \left(\frac{u}{v_0} \frac{R}{d}\right)^2}{\frac{2\nu}{\gamma} \Phi_a} /18/$$

где

$$x = \frac{pd}{u}, \quad \kappa = \frac{|v_r|}{u}, \quad \Phi_a = \Phi_c - \Phi_s^*$$

* Функция Φ_s связана с градиентом поля симметричного распределения зарядов/токов/, наведенных на стенках, Φ_a - с полем антисимметричного распределения. В нашем приближении $\Phi_a = \Phi_s$.

$$E_1(x) = \int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t} dt.$$

Неустойчивым колебаниям соответствуют решения уравнения /18/ с $\text{Re } x > 0$

Для реальных значений скорости u отношение $\frac{u}{v_0}$

очень мало $\sim 10^{-6} - 10^{-4}$, поэтому дисперсионное уравнение /18/ имеет резко отличающиеся по абсолютной величине корни. Таким образом, когерентное движение кольца является в данном случае суперпозицией быстрого ($|x| \sim \frac{v_0}{u} \frac{d}{R}$) и медленного ($|x| \sim 1$) движений.

Решения уравнения /18/, соответствующие быстрому движению, есть

$$p = \pm i\omega_0 Q_z - \frac{u}{2d} \frac{\nu}{\gamma} \frac{\Phi_a}{Q_z^2} /19/$$

где квадрат величины Q_z есть:

$$Q_z^2 = n - \frac{\nu}{\beta^2 \gamma} \Phi_s (1 - \beta^2 f) - \frac{\nu}{\beta^2 \gamma^3} \Phi_a \sim \nu \frac{z}{d} + \Delta n_B /20/$$

Соотношение /20/ показывает, что устойчивость одночастичных колебаний ($\nu \frac{z}{d} > 0$) гарантирует устойчивость нулевой гармоники высокочастотных когерентных колебаний независимо от того, выполнено или нет условие статического равновесия /15/. Быстрый уход пучка на стенку, следовательно, невозможен: при резком смещении пучка индуцируемые в стенках токи компенсируют зарядовое притяжение. В результате пучок совершает устойчивые /затухающие/ колебания с частотой /19/ относительно среднего положения. Однако, если условие /15/ не выполнено, само среднее положение пучка медленно смещается в сторону стенки. Этому движению соответствует малый по абсолютной величине ($|x| \sim 1$) корень уравнения /18/.

В интересующей нас области малых значений аргумента ($x \ll \frac{v\theta}{u} \frac{d}{R}$) дисперсионное уравнение /18/ можно заменить приближенным:

$$F(x) = \frac{Q_{СТ}^2}{\frac{2v}{\gamma} \Phi_a} \quad /21/$$

Графики функции $F(x)$ при различных значениях параметра представлены на рис. 1. В области малых и больших значений аргумента x функция $F(x)$ представляется приближенно в виде:

$$F(x) \approx x \frac{\kappa^2 - 1}{(1 + \kappa^2)^2}, \quad \text{при} \quad \frac{2x}{\sqrt{1 + \kappa^2}} \ll 1 \quad /22/$$

и

$$F(x) \approx -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{1 + \kappa^2} - \frac{1}{x} \right), \quad \text{при} \quad x \gg 1 + \kappa^2. \quad /23/$$

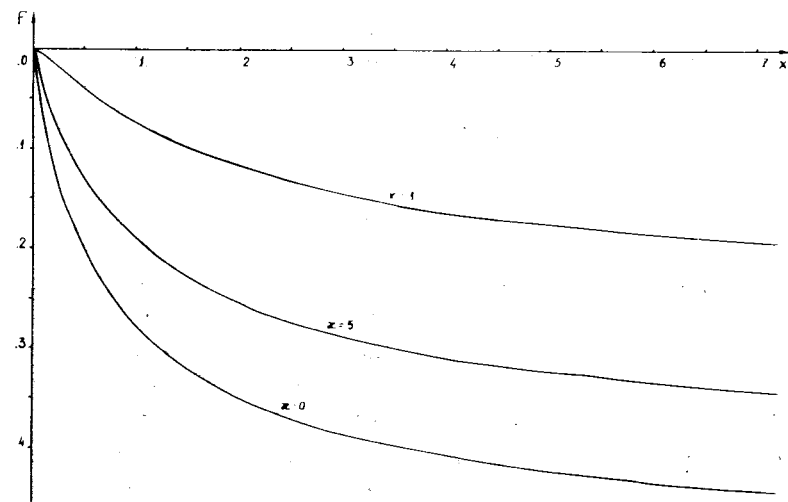
При значениях показателя спада n , гарантирующих одночастичную фокусировку ($n > \frac{v}{\beta^2 \gamma} \Phi_s (1 - \beta^2 \gamma)$), имеет место неравенство

$$Q_{СТ}^2 > -\frac{v}{\gamma} \Phi_a \left(\frac{1}{1 + \kappa^2} + \frac{1}{\beta^2 \gamma^2} \right).$$

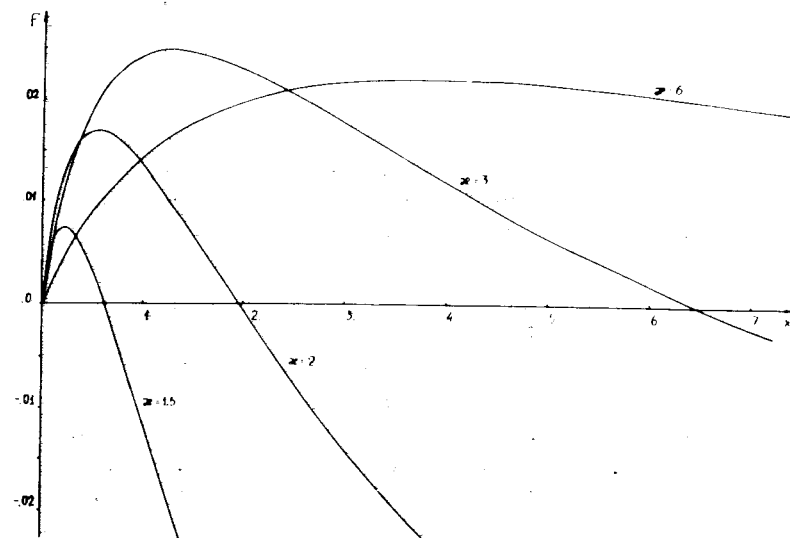
Поэтому в ультрарелятивистском пределе, как видно из рис. 1, дисперсионное уравнение /20/ имеет при $Q_{СТ}^2 < 0$ единственное положительное /соответствующее неустойчивости/ решение. Время увеличения отклонения

пучка от медианной плоскости в ℓ раз есть $\tau = \frac{d}{ux} \sim \frac{d}{u}$.

Для реальной установки /1/ время $\tau \geq 10$ мкс. Такое медленное движение может быть застabilизировано дополнительными средствами.



а



б

Рис. 1а, б. Графики функции $F(x)$.

Отметим, что качественно такой же характер имеет радиальное когерентное движение при выполнении условия $1 < n < 1 + \frac{\nu}{\beta^2 \gamma} \Phi_s (1 - \beta^2 f)$.

5. ОТРИЦАТЕЛЬНОЕ ТРЕНИЕ

Из выражения /14/ для отраженного магнитного поля следует, что коэффициент при скорости в уравнении для медленного аксиального движения кольца /назовем его коэффициентом магнитного трения/, становится отрицательным, когда скорость радиального движения /вдоль стенок/ превосходит скорость убегания изображений /т.е. $\kappa > 1$ /. Вследствие этого медленное движение может оказаться неустойчивым, даже если выполнено условие /15/.

Анализ дисперсионного уравнения /21/ показывает,

что, в зависимости от соотношения величин $\Lambda = \frac{Q_{CT}^2}{\frac{2\nu}{\gamma} \Phi_a} > 0$

и $\kappa > 1$, в правой полуплоскости комплексного переменного x имеются два действительных или два комплексно сопряженных корня, либо корни вообще отсутствуют.

Первый случай реализуется при $0 < \Lambda < \Lambda_1(\kappa)$, где $\Lambda_1(\kappa)$ - максимальное значение функции $F(x)$ при фиксированном κ /см. рис. 1б/. Зависимость Λ_1 от параметра κ показана на рис. 2. Вторым случаем /комплексно сопряженные корни/ имеет место при $\Lambda_1(\kappa) < \Lambda < \Lambda_2(\kappa)$.

Решения уравнения /21/ для значений Λ в этом интервале показаны на рис. 3 линиями $\kappa = \text{const}$ и $\Lambda = \text{const}$.

При $\Lambda > \Lambda_2(\kappa)$ /см. рис. 2/ неустойчивых ветвей колебаний нет.

Рассмотренный эффект не должен наблюдаться в существующих установках, так как для них параметр $\kappa \ll 1$. Однако эффект отрицательного трения следует учитывать при разработке пассивных систем стабилизации кольца.

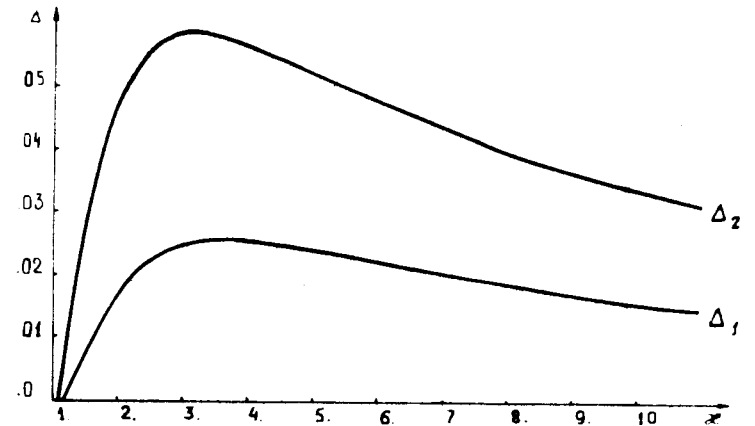


Рис. 2. Зависимость величин Λ_1 и Λ_2 от параметра κ .

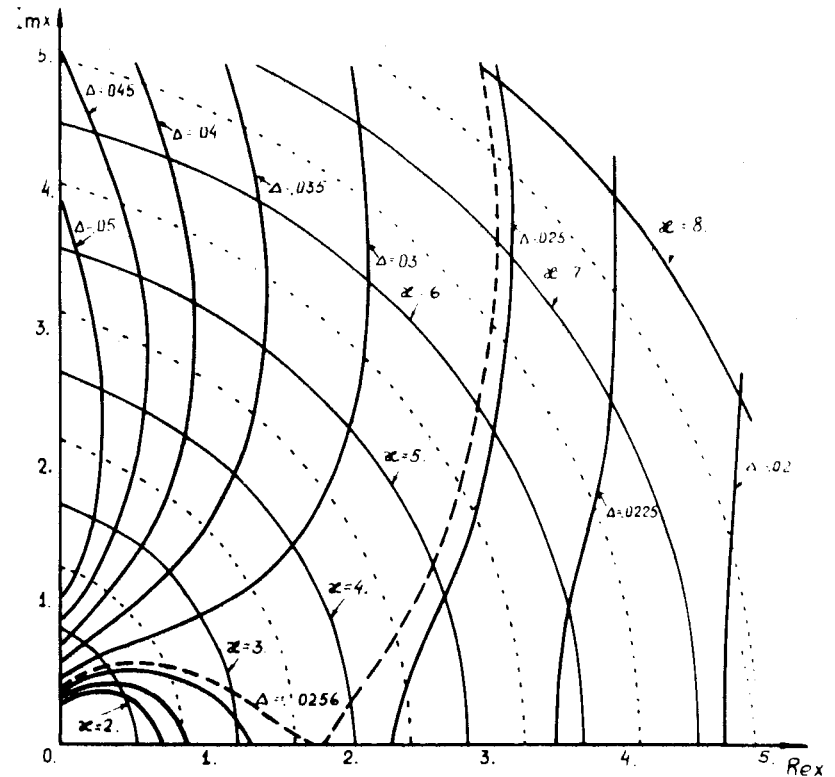


Рис. 3. Решения дисперсионного уравнения для различных значений параметров κ и Λ .

ЛИТЕРАТУРА

1. Александров В.С. и др. ОИЯИ, Р9-9091, Р9-9215, Дубна, 1975.
2. Александров В.С. и др. ОИЯИ, Р9-10118, Дубна, 1976.
3. Reitz J.R. *Journ. of Appl. Phys.*, 1970, v.41, no.5, p.2067.
4. Алексахин Ю.И., Бонч-Осмоловский А.Г. *ЖТФ*, 1973, XLIII, с. 1147.
5. Корнев И.Л., Курдюмов В.Н. *Научные труды РТИ АН СССР*, 1973, №14.
6. Merkel P. *MPI für Plasmaphysik, Garching, Report 0/24 (1974)*.
7. Merkel P. *Particle Accelerators*, 1976, 7, p.69.
8. Алексахин Ю.И., Казаринов Н.Ю., Перельштейн Э.А. *ЖТФ*, 1975, XLV, с.933.
9. Smythe W.R. *Static and Dynamic Electricity*, McGraw-Hill Book Co., New York, 1950, 2nd ed., p.402.
10. Herrman W. *Particle Accelerators*, 1975, 7, p.19.
11. Laslett L.J. *Proc. 1963 Summer Study on Storage Rings, Accelerators and Experimentation at Super High Energies*, BNL 7534, p.324, 1963.
12. Pellegrini C., Sessler A.M. *Symp. ERA, LRL, Berkeley, Calif.*, 1968, p.442.

Рукопись поступила в издательский отдел
3 августа 1977 года.