ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА

Р9 - 10620

А.Д.Дымников, Э.А.Перельштейн

МЕТОД МОМЕНТОВ В ДИНАМИКЕ ПУЧКОВ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ

1977

P9 - 10620

А.Д.Дымников, Э.А.Перельштейн

МЕТОД МОМЕНТОВ В ДИНАМИКЕ ПУЧКОВ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ

Направлено в "Nuclear Instruments and Methods"

Дымников А.Д., Перельштейн Э.А.

Р9 - 10620

Метод моментов в динамике пучков заряженных частиц

Для распределений частиц в фазовом пространстве с плотностью, отличной от нуля на замкнутом множестве, вводятся моменты по всей совокупности фазовых координат. Построена цепочка уравнений для моментов. Уравнения анализируются в случае линейных внешних сил.

Работа выполнена в Отделе новых методов ускорения ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1977

Dymnikov A.D., Perelstein E.A.

P9 - 10620

Moment Method in Charged Particle Beam Dynamics

The moments over the whole totality of the phase coordinates for particle distributions bounded in phase space are considered. An equation chain for the moments has been constructed. The equations have been analyzed for linear external forces.

The investigation has been performed at the Department of New Acceleration Methods, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1977

При исследовании пучков частиц практический интерес, зачастую, представляют усредненные характеристики, такие как плотность, средняя скорость, температура и т.д. Эту информацию можно получить, вычисляя моменты функции распределения частиц в фазовом пространстве. В газодинамике подобные задачи сводятся к решению системы уравнений для моментов /1/.

Мы будем рассматривать движение пучка как движение замкнутого фазового множества, что позволяет ввести моменты функции распределения по всей совокупности фазовых координат. Заметим, что в газодинамике обычно имеют дело с пространственно неограниченной средой, поэтому используются лишь моменты по скоростям.

В данной работе ограничимся случаем малых плотностей пучков, когда их собственными полями, а также столкновениями частиц можно пренебречь.

Рассмотрение проводится для релятивистских пучков, что требует, в общем случае, использования восьмимерного фазового пространства. Замкнутость фазового множества следует из физических особенностей пучков, в которых предполагается конечность разброса частиц по координатам и времени, импульсам и энергии. В случае, когда движения разделяются, можно рассматривать и бесконечный в одном направлении пучок и строить моменты для поперечного (финитного) движения.

СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ ДЛЯ МОМЕНТОВ

Будем считать, что изменение фазового множества зависит от некоторого скалярного параметра s. Выберем в фазовом пространстве опорную точку 0 с координатами $Z_o = \begin{pmatrix} X_o \\ U_o \end{pmatrix}$, где X_o – вектор в 4-пространстве, U_o – вектор в пространстве 4-скоростей. Координаты произвольной точки Q будем отсчитывать от точки 0, т.е. $Z = Z_Q - Z_o$. В частности, точку 0 можно выбрать совпадающей с одной из частиц пучка, тогда условие замкнутости множества выполнится автоматически.

Запишем уравнения движения пучка в матричной форме, принимая скорость света в пустоте $c = 1$:

$$\frac{dZ}{ds} = T(X)Z, \quad T(X) = \begin{Vmatrix} 0 & I \\ 0 & \frac{e}{m}P(B,E) \end{Vmatrix}$$

$$P(B,E) = \begin{Vmatrix} 0, & -B_3, & B_2, & E_1 \\ B_3, & 0, & -B_1, & E_2 \\ -B_2, & B_1, & 0, & E_3 \\ E_1, & E_2, & E_3, & 0 \end{Vmatrix}, \tag{1}$$

где e и m – заряд и масса покоя частиц, соответственно; B и E – векторы напряженностей магнитного и электрического полей, а интервал ds определен как

$$ds = [dx_4^2 - dx_1^2 - dx_2^2 - dx_3^2]^{1/2}, \quad x_4 = t. \tag{2}$$

Без учета столкновений функция распределения f удовлетворяет уравнению Лиувилля

$$\frac{df}{ds} = \tilde{Z}\tilde{T}\,V(Z)f = 0, \tag{3}$$

где символ $\sim$ означает транспонирование матриц, а $V(Z)$ – дифференциальный векторный оператор с компонентами $V_i(Z) = \dfrac{\partial}{\partial Z_i}$.

Обозначая элемент объема множества Ω через $dV(\Omega)$, определим моменты n-ого порядка функции распределения f

$$M_{k_1,k_2,\dots,k_n} = \int_\Omega Z_{k_1}(s)Z_{k_2}(s)\dots Z_{k_n}(s)f(Z(s))dV(\Omega). \tag{4}$$

Здесь индекс k_j меняется от 1 до 8. Продифференцируем равенство (4) по s с учетом (1):

$$\frac{dM_{k_1,k_2,\dots,k_n}}{ds} =$$

$$= \sum_{k_j \in k(n)} \int_\Omega Z_{k_1}(s)Z_{k_2}(s)\dots Z_{k_{i-1}} T_{k_i,k_j} Z_{k_j} Z_{k_{i+1}} \dots Z_{k_n} f\,dV(\Omega), \tag{5}$$

где $k(n) = k_1, k_2, \dots, k_n$. В формуле (5) и в дальнейшем мы предполагаем суммирование по повторяющимся индексам.

Практически всегда матрицу T можно представить в виде степенного разложения в окрестности точки $Z=0$:

$$T(s) = T^0(s) + \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{1}{\ell!} d^\ell T. \tag{6}$$

где, по определению, скалярный символ $d = \tilde{\tilde{Z}}\,V(Z)$, а операторы V, входящие в d^ℓ, действуют лишь на T.

Подставляя представление T в виде (6) в уравнение (5), получим систему уравнений для моментов:

$$\frac{dM_{k_1,k_2,\dots,k_n}}{ds} = \tag{7}$$

$$= \sum_{k_i \in k(n)} \{ T^\circ_{k_i,k_j} M_{k_1,k_2,\dots,k_{i-1},k_j\,k_{i+1},\dots,k_n} +$$

$$+ \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{1}{\ell!} (\nabla_{k_{n+1}} \nabla_{k_{n+2}} \dots \nabla_{k_{n+\ell}}) T_{k_i k_j}|_{z=0}\, M_{k_1,k_2,\dots k_{i-1},k_j,k_{i+1}\dots k_{n+\ell}} \}.$$

Таким образом, система уравнений для моментов представляет собой марковскую цепочку. Особенно простой вид приобретает система (7) в случае постоянных внешних полей. Тогда матрица $T_{k_i,k_j} = T^\circ_{k_i,k_j}$ не зависит от координат, и мы имеем

$$\frac{dM_{k_1,k_2,\dots,k_n}}{ds} = \sum_{k_i \subset k(n)} T_{k_i\,k_j} M_{k_1,k_2,\dots,k_{i-1},k_j,k_{i+1},\dots,k_n}. \tag{8}$$

В отличие от "зацепляющейся" цепочки уравнений для моментов (7) в данном случае получаются системы линейных уравнений одного порядка.

2. СМЫСЛ МОМЕНТОВ НИЗШИХ ПОРЯДКОВ

Из определения (4) следует естественный вывод о том, что момент нулевого порядка, который соответствует полному числу частиц N, есть в силу (3) интеграл движения:

$$N = \int_\Omega f(Z(s))dV(\Omega). \tag{9}$$

Моменты первого порядка образуют вектор

$$\bar{Z} = \frac{1}{N} \int_\Omega Z(s) f(Z(s))dV(\Omega), \tag{10}$$

причем пространственные компоненты вектора $\bar{Z}$ дают средние координаты в пространстве-времени, а скоростные компоненты определяют средние значения 4-скорости. Моменты первого порядка в линейном приближении удовлетворяют уравнению

$$\frac{d\bar{Z}}{ds} = T^\circ(s)\bar{Z}. \tag{11}$$

Решение уравнения (11) можно записать в виде

$$\bar{Z}(s) = R(T^\circ, s/s_0)\bar{Z}(s_0), \tag{12}$$

где матричная функция $R(T^\circ, s/s_0)$, называемая матрицантом, является решением матричного дифференциального уравнения

$$\frac{dR}{ds} = T^\circ(s)R \tag{13}$$

с начальным условием

$$R(T^\circ, s^\circ/s^\circ) = I,$$

где I – единичная матрица.

В качестве опорной точки 0, от которой ведется отсчет всех координат, удобно выбирать точку $\bar{Z}$.

Моменты второго порядка можно записать в виде симметричной квадратной (8x8) матрицы

$$\Sigma = \frac{1}{N} \int_\Omega Z \cdot \tilde{Z} f(Z(s))dV(\Omega). \tag{14}$$

Диагональные элементы матрицы Σ дают среднеквадратичные размеры, временной разброс и среднеквадратичные разбросы компонент 4-скорости пучка частиц.

Дифференцируя (15) по s и используя уравнение (1), запишем в линейном приближении уравнения для моментов второго порядка:

$$\frac{d\Sigma}{ds} = T^\circ\Sigma + \Sigma\tilde{T}^\circ. \qquad (15)$$

Уравнение (15) для матрицы Σ совпадает по форме с уравнением (А.8) для огибающей матрицы, приведенным в Приложении. Огибающая матрица характеризует максимальные размеры пучка в фазовом пространстве. Как следует из Приложения, решение уравнения (15) имеет вид

$$\Sigma(s) = R(T^\circ, s/s_0)\Sigma(s_0)\tilde{R}(T^\circ, s/s_0). \qquad (16)$$

3. ОДНОМЕРНАЯ НЕРЕЛЯТИВИСТСКАЯ ЗАДАЧА

Чтобы придать развитому выше формализму бо́льшую наглядность, рассмотрим простой случай нерелятивистского ленточного пучка частиц, движущихся в направлении Z равномерно со скоростью v_0, и ограниченного в направлении x_1.

Уравнения движения частиц в пучке представим в виде:

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2 = F_1, \quad \frac{dx_2}{dt} = F_2(x_1, t). \qquad (17)$$

Функция распределения f удовлетворяет уравнению Лиувилля

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v_0\frac{\partial f}{\partial z} + F_i\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0. \qquad (18)$$

Построим бесконечную систему моментов, связанную с функцией распределения соотношениями:

$$M^{p,q}(t,z) = N\overline{x_1^p x_2^q} = \int_\Omega x_1^p(t)x_2^q(t)f(t,z,x_1,x_2)dV(\Omega), \qquad (19)$$

где N – линейная плотность пучка, равная $M^{0,0}$; $dV(\Omega)$ – элемент объема двумерного (x_1, x_2) замкнутого множества Ω фазовых координат пучка. Первые моменты имеют простой физический смысл. Так, $\frac{M^{1,0}}{N}$ есть x_1 – координата локального центра масс пучка, $\frac{M^{0,1}}{N}$ – средняя скорость пучка в направлении x_1, $\sqrt{\frac{M^{2,0}}{N}}$ – среднеквадратичный размер, $\frac{M^{0,2}}{N}$ – среднее значение квадрата скорости, которое можно отождествить с величиной $T/2m$, где T– поперечная температура пучка.

Представим силу $F_2(x_1,t)$ в виде степенного разложения:

$$F_2(x_1,t) = \sum_k a_k(t)x_1^k. \qquad (20)$$

Дифференцируя равенство (19) по времени и пользуясь формулами (17) и (20), получим

$$\frac{dM^{p,q}}{dt} = pM^{p-1,q+1} + q\sum_k a_k(t)M^{p+k,q-1}, \qquad (21)$$

где производная по времени понимается как $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + V_0\frac{\partial}{\partial z}$. В случае линейных полей $(F_2 = -\nu^2(t)x_1)$ система (21) принимает вид

$$\frac{dM^{p,q}}{dt} = pM^{p-1,q+1} - q\nu^2(t)M^{p+1,q-1}. \qquad (22)$$

Таким образом, цепочка, "зацепляющихся" уравнений (22) распадается на подсистемы уравнений для моментов одного порядка $n = p + q$. Выпишем уравнения для моментов низших порядков. При $n = p+q=0$ из уравнений (22) следует сохранение линейной плотности пучка

$$\frac{dM^{0,0}}{dt} = 0. \qquad (23)$$

Из системы уравнений для моментов первого порядка

$$\frac{dM^{1,0}}{dt} = M^{0,1}\ ; \quad \frac{dM^{0,1}}{dt} = -\nu^2(t)M^{1,0} \tag{24}$$

легко получить хорошо известное уравнение свободных колебаний центра масс пучка:

$$\frac{d^2M^{1,0}}{dt^2} + \nu^2(t)M^{1,0} = 0. \tag{25}$$

Система уравнений для моментов второго порядка есть

$$\begin{aligned} \frac{dM^{2,0}}{dt} &= 2M^{1,1}, \\ \frac{dM^{1,1}}{dt} &= M^{0,2} - \nu^2(t)M^{2,0}, \\ \frac{dM^{0,2}}{dt} &= -2\nu^2(t)M^{1,1}. \end{aligned} \tag{26}$$

Из этой системы нетрудно вывести уравнение для момента $M^{2,0}$:

$$\frac{d^3M^{2,0}}{dt^3} + 4\nu^2\frac{dM^{2,0}}{dt} + 2M^{2,0}\frac{d\nu^2}{dt} = 0. \tag{27}$$

Покажем, что линейное уравнение (27) эквивалентно известному нелинейному уравнению для огибающей пучка a* :

$$\frac{d^2a}{dt^2} + \nu^2 a - \frac{F^2}{a^3} = 0, \tag{28}$$

где F – фазовый объем пучка.

*На этот факт наше внимание обратил Ю.И.Алексахин.

Помножим уравнение (28) на a и продифференцируем результат по времени. Получим

$$\frac{d}{dt}\left(a\frac{d^2a}{dt^2}\right) + \frac{d}{dt}(\nu^2a^2) + 2\frac{F^2}{a^3}\frac{da}{dt} = 0. \tag{29}$$

Заметив, что

$$a\frac{d^2a}{dt^2} = \frac{1}{2}\frac{d^2a^2}{dt^2} - \left(\frac{da}{dt}\right)^2 \tag{30}$$

и, как следствие (28),

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{da}{dt}\right)^2 = -\nu^2\frac{da^2}{dt} + 2\frac{F^2}{a^3}\frac{da}{dt}, \tag{31}$$

преобразуем первый член в выражении (29). В результате имеем уравнение, совпадающее по форме с (27):

$$\frac{d^3a^2}{dt^3} + 4\nu^2\frac{da^2}{dt} + 2a^2\frac{d\nu^2}{dt} = 0. \tag{32}$$

Отметим, что при выводе уравнения (27) мы не использовали специального предположения относительно эллиптического фазового портрета частиц, которое требуется для получения уравнения (28). Отсюда можно прийти к заключению о том, что результаты, полученные с модельным уравнением (28), можно переносить на случай пучков с произвольным ограниченным распределением частиц в фазовой плоскости, если вместо огибающей иметь в виду среднеквадратичный размер.

Рассмотрим задачу о спектре собственных колебаний системы (22) в случае постоянных полей ($\nu^2 = \mathrm{const} > 0$) . Из уравнений для моментов низших порядков (23), (25), (27) следует, что при $n=0$ собственная частота $\lambda = 0$, при $n=1$ величина λ принимает значения $\lambda = \pm i\nu$, при $n=2$ – $\lambda = 0, \pm 2i\nu$. При произвольном n будем искать решение системы (22) в виде:

$$M^{p,q} = M_0^{p,q}\, e^{\lambda t}. \tag{33}$$

Тогда собственные частоты λ определяются из уравнения:

$$\begin{vmatrix} \lambda, -n, 0, 0, \ldots \\ \nu^2, \lambda, -(n-1), 0 \ldots \\ 0, 2\nu^2, \lambda, -(n-2), 0, \ldots \\ 0, 0, 3\nu^2, \lambda, -(n-3), 0, \ldots \\ \ldots \\ \ldots \\ 0, 0, \ldots (n-1)\nu^2, \lambda, 1 \\ 0, 0, \ldots 0, n\nu^2\lambda. \end{vmatrix} = 0$$

Для первых значений n непосредственной проверкой можно убедиться, что при нечетном $n = 2k+1$

$$\lambda = \pm i\nu(2j+1),$$

при четном $n = 2k$ (35)

$$\lambda = \pm 2i\nu j, \qquad j = 1,2,3,\ldots,k.$$

Из физических соображений следует ожидать, что закономерность (35) имеет место при любом n.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение

$$\frac{dx}{ds} = P(s)x, \tag{A.1}$$

где $P(s)$ – матричная $(\beta\times\beta)$-функция, а x-β-мерный вектор. Пусть множество начальных данных Ω_0 задачи Коши для уравнения (А.1) лежит внутри произвольной замкнутой гиперповерхности второго порядка $\Gamma(A_0, b_0, C) = \Gamma_0$, описываемой уравнением

$$\tilde{x}_0 A_0 x_0 + \tilde{b}_0 x_0 + \tilde{x}_0 b_0 = C, \tag{A.2}$$

где A_0 – симметричная $(A=\tilde{A})$ квадратная $(\beta\times\beta)$-матрица, b-β-мерный вектор, C – скалярная положительная величина.

Запишем решение задачи Коши уравнения (А.1) через матрицант $R(P, s/s_0)$:

$$x(s) = R(P, s/s_0)\cdot x(s_0) = Rx_0, \quad R(P, s_0/s_0) = R_0 = I. \tag{A.3}$$

Пусть x_0 находится на поверхности Γ_0. Подставим в уравнение (А.2) значение x_0, определенное из (А.3):

$$\tilde{x}\tilde{R}^{-1}A_0R^{-1}x + \tilde{b}_0R^{-1}x + \tilde{x}\tilde{R}^{-1}b_0 = \tilde{x}Ax + \tilde{b}x + \tilde{x}b = C, \tag{A.4}$$

где

$$A = \tilde{R}^{-1}A_0R^{-1}, \quad b = \tilde{R}^{-1}b_0. \tag{A.5}$$

Уравнение (А.4) является уравнением поверхности $\Gamma(A, b, C)$, в которую переходит начальная поверхность Γ_0 в силу уравнения (А.1). Поверхность Γ является огибающей фазовой поверхностью семейства решений из множества Ω.

Матрицу σ, обратную матрице A,

$$\sigma = A^{-1} = R(P, s/s_0)\sigma_0\tilde{R}(P, s/s_0), \tag{A.6}$$

играющую важную роль в теории огибающих, назовем огибающей матрицей.

Продифференцировав по s уравнение (А.6) и используя уравнение для матрицанта

$$\frac{dR}{ds} = P(s)R, \tag{A.7}$$

получим дифференциальное уравнение для матрицы σ:

$$\frac{d\sigma}{ds} = P\sigma + \sigma\tilde{P}. \tag{A.8}$$

Каждая из компонент x_j $(j=1,2,3...\beta)$ вектора x пробегает на поверхности $\Gamma(A,b,C)$ значения от некоторого $x_{j,min}$ до некоторого $x_{j,max}$, где

$$x_{j,max} = \max_{x_j \in \Gamma(A,b,C)} x_j , \qquad x_{j,min} = \min_{x_j \in \Gamma(A,b,C)} x_j , \quad j=1,2,\dots,\beta. \tag{A.9}$$

Вектор x, у которого j-ая компонента имеет на поверхности $\Gamma(A,b,C)$ экстремальное значение, будем обозначать через $x(j,extr)$. Положение центра β-мерного эллипсоида, определяемого уравнением (A.4), обозначим через $\bar{x}$. Тогда можно показать, что элементы матрицы σ выражаются через компоненты экстремального фазового вектора $x(j,max)$:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} = |\sigma_0|^{1/\beta}\left(\frac{V_\beta(x)}{V_\beta}\right)^{2/\beta}(x_j(j,max)-\bar{x}_j)(x_i(j,max)-\bar{x}_i).$$

Здесь $V_\beta(x)$ – объем множества Ω, V_β – объем β-мерной сферы единичного радиуса. Из выражения (A.10) видно, что диагональные элементы σ_{jj} в расширенном фазовом пространстве (x,s) определяют огибающие кривые на плоскости (x_j,s), внутри которых лежат все траектории, начинающиеся из множества Ω_0:

$$x_{j,max}(s) = \left(\frac{V_\beta}{V_\beta(x)}\right)^{1/\beta}(|A_0|)^{1/2\beta}\sqrt{\sigma_{jj}(s)}+\bar{x}, \tag{A.11}$$

$$x_{j,min}(s) = -\left(\frac{V_\beta}{V_\beta(x)}\right)^{1/\beta}(|A_0|)^{1/2\beta}\sqrt{\sigma_{jj}(s)}+\bar{x}. \tag{A.12}$$

Для нулевых диагональных элементов $P_{jj}(s)$ матрицы P в уравнении (A.1) фазовый объем $V_\beta(x)$ не зависит от s и равен объему V_{β_0} начального множества Ω_0. Матрицу A_0 путем соответствующего выбора постоянной C в уравнении (A.4) определяют таким образом, чтобы ее определитель был равен единице ($|A_0|=|\sigma_0|=1$).

Для произвольного фазового множества Ω, определяя по нему экстремальные фазовые векторы $x(j,extr)$ $(j=1,2,\dots,\beta)$ и вектор положения его центра тяжести $\bar{x}$, можно найти описанный эллипсоид (A.4), огибающая матрица σ которого определяется выражением (A.10).

Литература

1. Коган М.Н. Динамика разреженного газа. Наука, М., 1967.

Рукопись поступила в издательский отдел
25 мая 1977 года