ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

ДУБНА

P9 - 10468

Э.А.Перельштейн, Г.Д.Ширков

САМОСОГЛАСОВАННАЯ ЗАДАЧА О ДВИЖЕНИИ ЗАРЯЖЕННЫХ ЭЛЛИПСОИДАЛЬНЫХ СГУСТКОВ ЧАСТИЦ

1977

P9 - 10468

Э.А.Перельштейн, Г.Д.Ширков

САМОСОГЛАСОВАННАЯ ЗАДАЧА О ДВИЖЕНИИ ЗАРЯЖЕННЫХ ЭЛЛИПСОИДАЛЬНЫХ СГУСТКОВ ЧАСТИЦ

Направлено в журнал "Техническая физика"

Перельштейн Э.А., Ширков Г.Д. Р9 - 10468

Самосогласованная задача о движении заряженных эллипсоидальных сгустков частиц

Рассматривается движение во внешних линейных электромагнитных полях сгустка заряженных частиц в форме эллипсоида с постоянной плотностью. Показано, что для функций распределения, зависящих только от билинейного инварианта уравнений движения, не существует точного самосогласованного решения задачи. Найдено приближенное решение и его связь с моментами функции распределения.

Работа выполнена в Отделе новых методов ускорения ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1977

P9 - 10468

Perelshtein E.A., Shirkov G.D.

Self-Consistent Problem about Motion of Charged Ellipsoidal Particle Bunches

Motion of charged particle bunch (having the ellipsoid form and constant density) in the external linear electromagnetic field is considered. It is shown that for the distribution functions, dependent only on the bilinear invariant of the motion equations, there exists no exact self-consistent solution of the problem. An approximate solution has been found as well as its connection with the moments of the distribution function.

The investigation has been performed at the Department of New Acceleration Methods, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1977

В задачах о движении заряженных частиц в электромагнитных полях для учета собственных полей пространственно-ограниченных сгустков используется их модельное представление в виде эллипсоидов с постоянной плотностью заряда /1,8,9/. Насколько нам известно, точного решения самосогласованной задачи, дающей сгусток такой конфигурации, для общего случая нет. Рядом авторов были предложены решения в некоторых частных случаях. Так, в работе /8/, в стационарном случае для сгустка в виде шара найдено точное решение. Имеется также приближенное решение для особого вида движения частиц в равномерно заряженном эллипсоиде /9/. В данной работе ищется самосогласованное решение в случае линейных полей, которое строится на основе интеграла движения - квадратичной формы специального вида в фазовом пространстве по методике, предложенной О.И.Ярковым /2/.

Оказывается, что получить функцию распределения, соответствующую эллипсоиду с постоянной плотностью заряда, в классе функций, зависящих только от одного билинейного инварианта, нельзя.

При аппроксимации собственных полей сгустка линейными полями самосогласованная задача сводится к решению системы обыкновенных дифференциальных уравнений, определяющих движение сгустка эллипсоидальной формы. Выясняется связь между этими уравнениями и системой уравнений для полных моментов функции распределения в фазовом пространстве.

1. Самосогласованная задача о движении равномерно заряженного эллипсоида во внешних электромагнитных полях

Мы будем рассматривать движение заряженного сгустка в собственной системе координат, связанной с движением центра масс. Движение частиц в такой системе предполагается нерелятивистским. Динамика сгустка с учетом его собственных полей дается системой самосогласованных уравнений Власова [3]. В случае, когда электрическое поле линейно зависит от координат, а магнитное - только от времени, уравнения движения частиц и кинетическое уравнение для функции распределения f можно представить в симметричном относительно координат $\vec{x}$ и скоростей $\vec{v}$ виде:

$$\frac{dy}{dt} = A\,y \qquad /1/$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} + y^* A^* \, \nabla(y) f = 0. \qquad /2/$$

В уравнениях /1/, /2/ приняты следующие обозначения: $\binom{\vec{x}}{\vec{y}}$ - вектор в фазовом пространстве координат и скоростей, $\nabla(y)$ - дифференциальный векторный оператор с компонентами $\nabla_i(y) = \frac{\partial}{\partial y_i}$, знак $(*)$ означает операцию транспонирования матриц. Элементы матрицы A выражаются через внешние поля и функцию распределения и зависят только от времени.

Для нахождения решения самосогласованной задачи применим метод, развитый для линейных систем О.И.Ярковым [2] и основанный на использовании известных билинейных инвариантов системы /1/.

Если функция $\eta(t)$ - произвольное решение системы уравнений, присоединенной к /1/,

$$\frac{d\eta}{dt} = -A^*\eta, \qquad /3/$$

то, согласно [4], произведение

$$y^*(t)\eta(t) = \mathrm{const} \qquad /4/$$

есть линейный инвариант системы /1/. На его основе можно построить билинейный инвариант

$$(y^*\eta)(\eta^* y) = y^* B y = I = \mathrm{const}, \qquad /5/$$

где $B = \eta(t)\eta^*(t)$. Дифференцируя матрицу B по времени, получаем уравнение

$$\frac{dB}{dt} = -A^*B - BA. \qquad /6/$$

Можно показать, что если произвольная матрица B удовлетворяет уравнению /6/, а y - есть решение системы /1/, то $y^*By = I$ - есть интеграл системы /1/. Разбивая переменные в фазовом пространстве y на координаты x и скорости v, инвариант /5/ можно записать в виде:

$$I = v^*Sv + 2v^*Px + x^*Qx, \qquad /7/$$

где S, P, Q - симметричные матрицы и

$$B = \begin{pmatrix} Q & P \\ P & S \end{pmatrix}. \qquad /8/$$

Известно, что решение уравнения /2/ можно представить как функцию интегралов системы /1/. Следуя работе [2], будем искать решение уравнения /2/ в виде:

$$f = \Phi(I). \qquad /9/$$

Тогда плотности заряда ρ и тока j_i в сгустке запишутся как

$$\rho = e\int \Phi(I)\,dv_1 dv_2 dv_3,$$
$$j_i = e\int v_i \Phi(I)\,dv_1 dv_2 dv_3. \qquad /10/$$

Для того чтобы провести интегрирование в /10/, удобно перейти от переменных v^i к новым переменным [2]:

$$z_s = L_{si} v_i + P_{ij} L^{-1}_{is} x_j, \quad L \cdot L = S, \qquad /11/$$

при этом интеграл движения /7/ принимает вид:

$$I = z_s^2 + x_i G_{ij} x_j \,, \qquad /12/$$

где

$$G = Q - PS^{-1} P. \qquad /12'/$$

Якобиан перехода от переменных v к z есть

$$\left| \frac{\partial(z_1, z_2, \ldots, z_n)}{\partial(v_1, v_2, \ldots, v_n)} \right| = |L_{si}| = |S|^{1/2}, \qquad /13/$$

и плотность заряда /10/ с учетом /12/ и /13/ равна

$$\rho = \frac{e}{|S|^{1/2}} \int \Phi(z_s^2 + x_i G_{ij} x_j) d^3 z_s \,. \qquad /14/$$

Переход к сферическим координатам в пространстве z_s и интегрирование по телесному углу в /14/ дают:

$$\rho = \frac{2\pi e}{|S|^{1/2}} \int_0^\infty \Phi(T + x^* G x) T^{1/2} \, dT. \qquad /15/$$

Мы знаем, что линейность собственного электрического поля обеспечивается в случае, когда заряженный сгусток представляет собой трехосный эллипсоид с постоянной плотностью заряда

$$\rho = \frac{3eN}{4\pi} |G|^{1/2} \sigma(1 - x^* G(t) x), \qquad /16/$$

где

$$\sigma(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

- единичная ступенчатая функция, N - полное число частиц с зарядом e, $G_{ik}(t)$ - произвольная, зависящая от времени, симметричная матрица с положительными собственными значениями.

Для самосогласования задачи необходимо приравнять плотности /15/ и /16/. В результате получаем интегральное уравнение для функции Φ, которое сводится к уравнению Абеля. Решением этого уравнения является функция *

$$\Phi(I) = \frac{3N |G|^{1/2} \; |S|^{1/2}}{4\pi^3} \left(\frac{\delta(1-I)}{\sqrt{1-I}} - \frac{1}{2} \frac{\sigma(1-I)}{(1-I)^{3/2}} \right), \qquad /17/$$

которая принимает отрицательные значения в области $0 \le I \le 1$ и, следовательно, не удовлетворяет требованию положительной определенности, предъявляемому к функции распределения. Поскольку решение уравнения Абеля единственно /5/, мы приходим к выводу о том, что, вообще говоря, в классе функций, зависящих только от билинейного инварианта /5/, не существует решений, соответствующих равиомерно заряженному эллипсоиду.

Попытки регуляризации задачи с помощью аппроксимации ступенчатой функции непрерывными функциями вида

$$\sigma(x) = \lim_{\alpha \to \infty} \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg}(\alpha x) \right]$$

и

$$/18/ \quad \sigma(x) = \frac{1}{2} \lim_{\alpha \to \infty} \left[1 + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\alpha x} e^{-x^2} dx \right]$$

с целью получить при конечных α положительно определенную функцию $\Phi(I)$ приводят к малым значениям параметра α и, таким образом, к медленно спадающим распределениям плотности заряда.

Довольно хорошую аппроксимацию к равномерно заряженному эллипсоиду дает функция распределения

$$f = \frac{3N}{8\pi^2} |B|^{1/2} \delta(1-I), \qquad /19/$$

которой соответствует плотность $\rho \sim \sqrt{1 - x^* G x} \; \sigma(1 - x^* G x)$.

Собственные поля эллипсоида с такой плотностью близки к линейным по всему объему и только к краю различие в полях достигает 40%. В дальнейшем будем рассчитывать собственные поля, пользуясь плотностью заряда /16/, где матрица G определена формулой /12'/.

* Подобное решение задачи о функции распределения в случае равномерно заряженного эллипсоида было получено С.Б.Рубиным.

Найдем токи в сгустке по формуле /10/. Определяя величину v_i из формулы /11/

$$v_i = L^{-1}_{is} z_s + \Omega_{ik} x_k, \ \Omega_{ik} = -S^{-1}_{ji} P_{jk} \qquad /20/$$

и учитывая, что интеграл от нечетной функции в симметричных пределах равен нулю, получим

$$j_i = \frac{e}{|S|^{1/2}} \int (L^{-1}_{is} z_s + \Omega_{ik} x_k) \ \Phi(z_s^2 + x_i G_{ij} x_j) d^3 z_s = \Omega_{ik} x_k \rho. \ /21/$$

Как видно из полученного выражения для плотности тока, матрица Ω_{ik} описывает вращение сгустка как целого.

Собственными магнитными полями можно пренебречь при нерелятивистских скоростях вращения, т.е. при выполнении условия [6]

$$\max|\Omega_{ik} x_k| \ll 1 .$$

Для вычисления собственных электрических полей воспользуемся выражением для потенциала поля внутри равномерно заряженного трехосного эллипсоида в случае, когда оси координат (s_1, s_2, s_3) совпадают с его главными осями [1]:

$$U = -\frac{\rho}{2} \left[\frac{M}{2} (s_1^2 + s_2^2) - N(s_1^2 - s_2^2) + (1-M) \ s_3^2 \right]. \qquad /22/$$

Если $a_3 > 5a_1$, $a_3 > 5a_2$, то с большой точностью $M = 1$,

а $N = \frac{1}{2} \ \frac{a_1 - a_2}{a_1 + a_2}$, где a_1, a_2 и a_3 - полуоси эллипсоида, причем a_3 соответствует направлению s_3.

Такие условия обычно выполняются в задачах теории ускорителей. При этом вместо /22/ можно пользоваться приближенным выражением для потенциала

$$U = -\frac{\rho}{2} \ \frac{s_1^2 a_2 + s_2^2 a_1}{a_1 + a_2}. \qquad /23/$$

При движении сгустка с ускорением W, в точное значение потенциала должны давать вклад члены, связанные с неинерциальностью системы. Мы будем пренебрегать

такими добавками к потенциалу, считая выполненным условие [7]

$$\frac{2Wa_3}{c^2} \ll 1. \qquad /24/$$

Для того чтобы получить выражение для потенциала при произвольной ориентации полуосей эллипсоида относительно координатных осей, используем выражение /23/ и проведем двойное преобразование координат.

Вначале преобразуем координаты S_k таким образом, чтобы в новой системе получить шар. Легко видеть, что искомое преобразование есть $r_k = s_k / a_k$ /тогда плотность $\rho \sim \sigma(1 - r_k^2)$ /. Далее примем:

$$r_i = \Lambda_{ki} \ x_k , \quad \Lambda_{ke} \Lambda_{je} = G_{kj} . \qquad /25/$$

В результате получим эллипсоид, который в координатах x_i задается функцией $G_{ik} (x^* G x \le 1)$. Потенциал поля внутри такого эллипсоида с постоянной плотностью заряда ρ равен

$$U = -\frac{\rho}{2} \ \frac{a_1 a_2}{a_1 + a_2} \sum_{i=1,2} a_i \Lambda_{ki} \ \Lambda_{ji} x_k x_j . \qquad /26/$$

Из формулы /26/ получаем собственное электрическое поле внутри сгустка

$$E_k^c = \frac{\rho a_1 a_2}{a_1 + a_2} \sum_{i=1,2} a_i \Lambda_{ki} \ \Lambda_{ji} \ x_j \ = \mathcal{E}^c_{kj} x_j . \qquad /27/$$

Представляя внешние электрические и магнитные поля в виде $E_k^{вн} = \mathcal{E}^{вн}_{kj} x_j$, $\vec{H} = (H_1, H_2, H_3)$, с учетом /27/ получим явный вид матрицы A

$$A = \begin{pmatrix} 0, & 0, & 0, & 1, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 1 \\ \mathcal{E}_{11}, & \mathcal{E}_{12}, & \mathcal{E}_{13}, & 0, & H_3, & -H_2 \\ \mathcal{E}_{21}, & \mathcal{E}_{22}, & \mathcal{E}_{23}, & -H_3, & 0, & H_1 \\ \mathcal{E}_{31}, & \mathcal{E}_{32}, & \mathcal{E}_{33}, & H_2, & -H_1, & 0 \end{pmatrix}, \qquad /28/$$

где введено обозначение $\mathcal{E}_{ik} = \mathcal{E}^{c}_{ik} + \mathcal{E}^{вн}_{ik}$.

Поскольку величины $\mathcal{E}^{c}_{ik}$ в формуле /27/ определены через компоненты матрицы G, т.е. в конечном счете через элементы матрицы B, то уравнение /6/ вместе с определениями /25/, /27/ и /28/ представляет собой приближенное самосогласованное уравнение, определяющее движение сгустка в виде эллипсоида. Таким образом, самосогласованная задача о движении сгустка в линейных внешних полях сводится к решению системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

2. Система уравнений для моментов

Рассматривая функции распределения, отличные от нуля в конечной области фазового пространства /либо интегрируемые с произвольным степенным весом по всему фазовому пространству/, можно ввести полные моменты функции распределения, т.е. моменты по всем фазовым переменным.

Из кинетического уравнения /2/ можно получить цепочку зацепляющихся уравнений для введенных полных моментов. В случае линейных полей цепочка распадается на уравнения для моментов одного порядка. Так, например, моменты первых двух порядков

$$M^{I} = \int y\, f\, dy, \qquad M^{II} = \int y y^{*} f\, dy \qquad /29/$$

удовлетворяют вследствие /1/ уравнениям:

$$\frac{dM^{I}}{dt} = AM^{I}, \qquad /30/$$

$$\frac{dM^{II}}{dt} = AM^{II} + M^{II} A^{*}. \qquad /31/$$

Из уравнения /31/ следует, что матрица $(M^{II})^{-1}$ обратная матрице моментов второго порядка M^{II}, удовлетворяет уравнению

$$\frac{d(M^{II})^{-1}}{dt} = -A^{*}(M^{II})^{-1} - (M^{II})^{-1} A, \qquad /32/$$

которое совпадает по форме с уравнением /6/ для матрицы B. Это означает, что с точностью до численного множителя B совпадает с $(M^{II})^{-1}$.

Для произвольной функции распределения по матрице моментов второго порядка можно построить гиперэллипсоид в фазовом пространстве, приближающий реальное распределение, а его проекцию в конфигурационное пространство использовать для нахождения собственных полей, предполагая плотность заряда постоянной по объему.

Учитывая полученные поля в матрице A, определяющей движение частиц, мы приходим к самосогласованной приближенной задаче о движении заряженного сгустка.

Авторы признательны Н.Ю.Казаринову за полезные замечания и помощь в работе.

Литература

1. *Капчинский И.М. Динамика частиц в линейных резонансных ускорителях. М., Атомиздат, 1966.*
2. *Ярковой О.И. ЖТФ, 1962, XXXII, 7, с.1285; ОИЯИ, 2183, Дубна, 1965.*
3. *Власов А.А. Статистические функции распределения. М., Наука, 1966.*

4. Якубович В.А., Старжинский В.М. Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами. М., "Наука", 1972.
5. Михлин С.Г. Лекции по линейным интегральным уравнениям. М., ГИФМЛ, 1959.
6. Перельштейн Э.А., Ярковой О.И. ОИЯИ, 2351, Дубна, 1965.
7. Бонч-Осмоловский А.Г. и др. ОИЯИ, 2-2648, Дубна, 1966.
8. Кошкарев Д.Г., Капчинский И.М. Движение ускоряемых сгустков с учетом собственного поля. Доклад на Международной конференции по ускорителям. США, Кембридж, 1967.
9. Бондарев Б.И., Власов А.Д. АЭ, 1965, XIX, 5, с.423.

Рукопись поступила в издательский отдел 28 февраля 1977 года.