СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА

Р9 - 10112

М.Л.Иовнович, А.Б.Кузнецов,
Н.Б.Рубин, В.П.Саранцев

АВТОФАЗИРОВКА
ПРИ ПЕРИОДИЧЕСКОМ ДВИЖЕНИИ
ЭЛЕКТРОННО-ИОННОГО КОЛЬЦА

1976

P9 - 10112

М.Л.Иовнович, А.Б.Кузнецов,
Н.Б.Рубин, В.П.Саранцев

АВТОФАЗИРОВКА
ПРИ ПЕРИОДИЧЕСКОМ ДВИЖЕНИИ
ЭЛЕКТРОННО-ИОННОГО КОЛЬЦА

Иовнович М.Л., Кузнецов А.Б., Рубин Н.Б., Саранцев В.П.

Р9 - 10112

Автофазировка при периодическом движении электронно-ионного кольца

Рассмотрена задача о периодическом движении электронного кольца в неоднородном магнитном поле. На одном из участков ускорения кольцо содержит ионы. Энергия, переданная ионам, компенсируется при прохождении кольцом резонатора. Определена область устойчивости для равновесной фазы, найдены допуски на флуктуации числа ионов и амплитуды поля резонатора.

Работа выполнена в Отделе новых методов ускорения ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований

Дубна 1976

Iovnovich M.L., Kuznetsov A.B., Rubin N.B., Sarantsev V.P.

P9 - 10112

Phase Stability at Periodic Motion of an Electron-Ion Ring

The problem of periodic motion of an electron ring in an inhomogeneous magnetic field has been considered. The ring gets ions in one of the sections of its path. The energy transferred to ions is compensated when the ring passes the resonator. The stability region is determined for equilibrium phase and the allowance has been found for the ion number fluctuations and for the resonator field amplitudes.

The investigation has been performed at the Department of New Acceleration Methods, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research

Dubna 1976

Для ряда приложений представляет интерес следующая задача. Кольцо, состоящее из N_e электронов, совершает колебания в неоднородном азимутально симметричном магнитном поле. Магнитное поле растет с постоянным градиентом в обе стороны от точки, где расположен резонатор. На одном из участков ускорения кольцо содержит N_i ионов массы M, которые создают электрическое поле с продольной напряженностью $E_i(t)$, намного больше поперечной, и тормозят движение электронов. Энергия, переданная ионам, компенсируется при прохождении электронами резонатора, к которому приложено напряжение $V = V_0 \cos \omega t$.

Найдем полную энергию $m\gamma c^2$ и продольную скорость $v = \frac{dz}{dt}$ в различных точках траектории электрона. Выделим следующие точки: 1 - точка выхода кольца из резонатора при движении справа налево, 2 - левая точка отражения, 3 - точка входа в резонатор после ускорения кольца с ионами на участке /2÷3/, 4 - точка выхода из резонатора при движении слева направо, 5 - правая точка отражения, 6 - точка входа в резонатор при движении справа налево. В слабонеоднородном магнитном поле с постоянным градиентом электрон движется с постоянным ускорением /1/. На участке /1÷2/ уравнение движения электрона: $\frac{dv}{dt} = g$, на участке /4÷6/: $\frac{dv}{dt} = -\frac{g}{h}$, где $h^{-1} > 1$. Время прохождения участка /1÷2/ равно $\frac{v_1}{g}$, участка /4÷6/ $\frac{2v_4 h}{g}$, где v_1, v_4 - скорости в соответствующих точках. Уравнения движения электрона на участке /2÷3/ имеют вид:

$$\frac{dq\,v}{dt} = \frac{g}{q} - \frac{eE_i(t)}{m\gamma_o}, \qquad \frac{dq}{dt} = -\frac{eE_i(t)\,v}{m\gamma_o c^2}, \qquad /1/$$

где $q=\gamma/\gamma_o$, γ_o - начальное значение γ. Здесь использовано дополнительное предположение, что $E_i(t)$ много меньше величины магнитного поля.

Уравнения движения электрона в резонаторе запишем, пренебрегая действием неоднородности магнитного поля, в виде:

$$\frac{dq\,v}{dt} = \frac{eE(t)}{m\gamma_o}, \qquad \frac{dq}{dt} = \frac{eE(t)\,v}{m\gamma_o c^2}, \qquad /2/$$

где электрическое поле в резонаторе длины L равно $E(t)=V/L$. Заменяя $E_i(t)$ и $E(t)$ их постоянными средними значениями, что соответствует для E_i пренебрежению относительным движением электронного и ионного сгустков, решим уравнения /1/ и /2/. Для уравнений /1/:

$$q = 1 - \frac{eE_i(z-z_o)}{m\gamma_o c^2}, \quad v^2 = 2q^{-2}\left[g(z-z_o) - \frac{eE_i}{m\gamma_o}\int_{z_o}^{z} q\,dz'\right]. \qquad /3/$$

В полученных решениях сохраним два первых члена разложения в ряд по малому параметру $\frac{eE_i a_o}{m\gamma c^2}$, где a_o - длина участка /2÷3/:

$$v^2 = 2\left(g - \frac{eE_i}{m\gamma_o}\left[1 - \frac{2g(z-z_o)}{c^2}\right]\right)(z-z_o). \qquad /4/$$

Скорость электрона в точке 3: $v_3^2 = 2\left[g a_o - \frac{W}{m\gamma_o}\left(1 - \frac{2ga_o}{c^2}\right)\right]$,

где $W = eE_i a_o$ - потери энергии электрона. Время прохождения участка /2÷3/ найдем с помощью /4/ в виде:

$$\Delta t = \int_o^{a_o} \frac{dz}{\sqrt{2gz}}\left[1 + \frac{eE_i}{2m\gamma_o g}\left(1 - \frac{2gz}{c^2}\right)\right] = \sqrt{\frac{2a_o}{g}}\left[1 + \frac{W}{2m\gamma_o g a_o}\left(1 - \frac{2ga_o}{3c^2}\right)\right]. \qquad /5/$$

Величина W - энергия, переданная ионам, приходящаяся на один электрон кольца: $W = \frac{N_i}{N_e}Mc^2\left[(1-\beta_3^2)^{-1/2} - 1\right]$ $(\beta_3 = \frac{v_3}{c})$.

Выражение для W получено в согласии с предположением о совпадении продольных скоростей электронов и ионов.

Подобным образом проинтегрируем уравнения /2/. Сохраняя два первых члена разложения решений в ряд по малому параметру $eV_o/m\gamma c^2$, найдем зависимость скорости на выходе из резонатора от скорости на входе v_o: $v^2 = v_o^2 + \frac{2eV}{m\gamma_o}(1-\beta_o^2)$.

С помощью известного из теории микротрона метода составим рекуррентные соотношения для многократного движения кольца в системе, пренебрегая при этом малыми членами второго порядка. Значения γ и v в точке 1 после n-ого колебания кольца обозначим γ_n и v_n. Фаза поля в резонаторе в этот момент времени - ϕ_n. Амплитуда колебания кольца при движении влево $a_n = \frac{v_n^2}{2g}$. Время прохождения участка /2÷3/, согласно /5/, равно $\frac{v_n}{g}\left[1 + \frac{W_n}{m\gamma_n v_n^2}\left(1 - \frac{\beta_n^2}{3}\right)\right]$, где $W_n = W(\beta_n)$. Т.к. разность v_3 и v_1 первого порядка малости, то здесь v_3 в выражении для W заменено на v_n. В точке 3 $\gamma_3 = \gamma_n - \frac{W_n}{mc^2}$, $v_3^2 = v_n^2 - \frac{2W_n}{m\gamma_n}(1-\beta_n^2)$.

На участке /3÷4/ происходят изменения γ на величину $\frac{eV_o}{mc^2}\cos\left(\phi_n + \frac{2\omega v_n}{g}\right)$ и квадрата скорости на величину $\frac{2eV_o}{m\gamma_n}(1-\beta_n^2)\cos\left(\phi_n + \frac{2\omega v_n}{g}\right)$. Значения γ и v в точке 6 равны значениям в точке 4.

Рекуррентные соотношения для величин γ_n, v_n и ϕ_n имеют вид:

$$\gamma_{n+1} = \gamma_n + \frac{eV_o}{mc^2}\left[\cos\phi_{n+1} - \cos\left(\phi_n + \frac{2\omega v_n}{g}\right)\right] - \frac{W_n}{mc^2}, \qquad /6/$$

$$v_{n+1}^2 = v_n^2 + \frac{2(1-\beta_n)^2}{m\gamma_n}\left(eV_o\left[\cos\phi_{n+1} - \cos\left(\phi_n + \frac{2\omega v_n}{g}\right)\right] - W_n\right), \qquad /7/$$

$$\phi_{n+1} = \phi_n + \frac{2\omega v_n}{g}\{1 + \frac{W_n(1-\frac{\beta_n^2}{3})}{2m\gamma_n v_n^2} + h(1-\frac{(1-\beta_n^2)}{m\gamma_n v_n^2}[W_n +$$
$$+ eV_o\cos(\phi_n + \frac{2\omega v_n}{g})])\}. \qquad /8/$$

В /6/ и /7/ учтено, что в течение периода колебания кольцо проходит резонатор дважды в противоположных направлениях. Уравнение /7/ можно заменить уравнением, следующим из /6/ и /7/:

$$\gamma_{n+1} - \gamma_n = \frac{\gamma_n}{2(1-\beta_n^2)}(\beta_{n+1}^2 - \beta_n^2). \qquad /9/$$

Постоянные решения уравнений /6/-/9/ определяют равновесное движение электрона: $\gamma_n = \gamma$, $v_n = v$, $\phi_n = 2\pi kn + \phi$, где k - целое число. Частота электрического поля определяется соотношением:

$$\pi k = \frac{\omega v}{g}\{1 + \frac{W_o}{2m\gamma v^2}(1-\frac{\beta^2}{3}) + h(1-\frac{(1-\beta^2)}{m\gamma v^2}[W_o + eV_o\cos\phi_o])\}. \qquad /10/$$

Равновесные значения связаны условием компенсации потерь энергии электрона:

$$W_o = \frac{N_i}{N_e} Mc^2(\gamma_i - 1) = eV_o(\cos\phi - \cos\phi_o), \qquad /11/$$

где $\gamma_i = (1-\beta^2)^{-1/2}$, $\phi_o = \phi + \frac{2\pi k}{1+h}$. Здесь в выражении для фазы $\frac{\omega v}{g}$ заменено на $\frac{\pi k}{1+h}$, т.к. фазу надо вычислять только в нулевом приближении. Для малых отклонений от равновесных значений $\gamma_n' = \gamma_n - \gamma$, $\beta_n' = \beta_n - \beta$, $\phi_n' = \phi_n - 2\pi kn - \phi$ получим линеаризованные уравнения. Линеаризуя уравнение /9/, получим уравнение:

$$\gamma_{n+1}' - \gamma_n' = \frac{\gamma\beta}{1-\beta^2}(\beta_{n+1}' - \beta_n'), \qquad /12/$$

решение которого $\gamma_n' = \frac{\gamma\beta}{1-\beta^2}\beta_n'$ позволяет в дальнейшем исключить γ_n'. Линеаризуя уравнения /6/ и /8/, получим уравнения:

$$\beta_{n+1}' - a_1\beta_n' - a_2\phi_n' + a_3\phi_{n+1}' = 0, \qquad /13/$$
$$\phi_{n+1}' - b_1\phi_n' - b_2\beta_n' = 0, \qquad /14/$$

где a_1, a_2, a_3, b_1, b_2 зависят от равновесных значений. Подставляя β_n' из уравнения /14/ в /13/, найдем уравнение для малых отклонений фазы:

$$\phi_{n+2}' - 2a\phi_{n+1}' + b\phi_n' = 0, \qquad /15/$$

где

$$a = 1 - \frac{p}{2\gamma\sqrt{1-\beta^2}} - \frac{\pi k p_o(1-\beta^2)}{\gamma\beta^2}(\sin\phi - \sin\phi_o),$$

$$b = 1 - \frac{p}{\gamma\sqrt{1-\beta^2}}, \quad p = \frac{MN_i}{mN_e}, \quad p_o = \frac{eV_o}{mc^2}.$$

Здесь предполагается, что $p/\gamma \ll 1$. Решение уравнения /15/ представим в виде $\phi_n' = \lambda^n$. Тогда λ определяется уравнением:

$$\lambda^2 - 2a\lambda + b = 0. \qquad /16/$$

Т.к. модуль одного из действительных корней уравнения /16/ больше единицы, то устойчивые решения фазового уравнения определяются комплексно-сопряженными корнями $\lambda_{1,2} = Re^{\pm i\theta}$. Такие решения возможны при условии $\sin\phi > \sin\phi_o$, которое совместно с вытекающим из уравнения /11/ неравенством $\cos\phi > \cos\phi_o$ при $k=1$ приводит к неравенствам $\cos(\phi + \frac{\pi}{1+h}) < 0$, $\sin(\phi + \frac{\pi}{1+h}) > 0$, откуда определяется область устойчивости для равновесной фазы:

$$-\frac{(1-h)}{2(1+h)} < \frac{\phi}{\pi} < \frac{h}{1+h}. \qquad /17/$$

В этой области существуют затухающие колебания фазы:

$$\phi_n' = R^n(A\cos n\theta + B\sin n\theta), \qquad /18/$$

где $R^2 = b < 1$, A и B определяются начальными значениями фазы и скорости. Затухание колебаний связано с передачей энергии ионам.

Флуктуации числа ионов в кольце ΔN_i и амплитуды поля в резонаторе ΔV_o в различные периоды колебаний кольца приводят к вынужденным колебаниям фазы. Заменяя в уравнениях /6/-/8/ N_i на $N_i + \Delta N_{in+1}$, V_o на $V_o + \Delta V_{on+1}$, получим фазовое уравнение с правой частью, пропорциональной флуктуациям:

$$\phi'_{n+2} - 2a\phi'_{n+1} + b\phi'_n = r_n , \qquad /19/$$

где

$$r_n = A_1 \frac{\Delta N_{in+2}}{N_i} - A_2 \frac{\Delta N_{in+1}}{N_i} - B_1 \frac{\Delta V_{on+2}}{V_0} + B_2 \frac{\Delta V_{on+1}}{V_0},$$

$$A_1 = \frac{\omega c p}{g\gamma\beta}(\gamma_i - 1)[1 - \frac{\beta^2}{3} - 2h(1-\beta^2)],$$

$$A_2 = \frac{\omega c p}{g\gamma\beta}(\gamma_i - 1)(3 - \frac{7}{3}\beta^2),$$

$$B_1 = \frac{2\omega c p_o h}{g\gamma\beta}(1-\beta^2)\cos\phi_o ,$$

$$B_2 = \frac{2\omega c p_o}{g\gamma\beta}(1-\beta^2)[(1+h)\cos\phi - \cos\phi_o].$$

Решение уравнения /19/ можно получить известным из теории уравнений в конечных разностях методом в виде:

$$\phi'_n = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \sum_{k=0}^{n-1} r_k (\lambda_1^{n-k-1} - \lambda_2^{n-k-1}) = \frac{1}{R\sin\theta} \sum_{k=0}^{n-1} r_k R^{n-k-1} \times \qquad /20/$$

$$\times \sin(n-k-1)\theta .$$

Вычислим средний квадрат флуктуации фазы:

$$\overline{\phi_n'^2} = \frac{1}{R^2 \sin^2\theta} \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{k'=0}^{n-1} \overline{r_k r_{k'}} R^{2n-2-k-k'} \times \sin(n-k-1)\theta \times \qquad /21/$$

$$\times \sin(n-k'-1)\theta$$

Если время корреляции флуктуаций мало по сравнению с периодом колебаний кольца: $\overline{\Delta N_{in} \Delta N_{ik}} = \overline{\Delta N_i^2}\,\delta_{nk}$, $\overline{\Delta V_{on} \Delta V_{ok}} = \overline{\Delta V_o^2}\,\delta_{nk}$, то

$$\overline{r_n r_k} = [(A_1^2 + A_2^2)\delta_{nk} - A_1 A_2(\delta_{n,k+1} + \delta_{n,k-1})] \frac{\overline{\Delta N_i^2}}{N_i^2} + \qquad /22/$$

$$+ [(B_1^2 + B_2^2)\delta_{nk} - B_1 B_2(\delta_{n,k+1} + \delta_{n,k-1})] \frac{\overline{\Delta V_o^2}}{V_o^2}$$

Найдем предельное значение среднего квадрата при большом числе колебаний: $\overline{\Delta\phi^2} = \lim_{n\to\infty} \overline{\phi_n'^2}$. Подставляя /22/ в выражение /21/, приходим к вычислению известных сумм:

$$\sum_{n=0}^{\infty} R^{2n} \cos 2n\theta = \frac{1 - R^2 \cos 2\theta}{1 - 2R^2 \cos 2\theta + R^4} ,$$

$$/23/$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} R^{2n} \sin 2n\theta = \frac{R^2 \sin 2\theta}{1 - 2R^2 \cos 2\theta + R^4} ,$$

Согласно уравнению /16/, $\sin\theta = \sqrt{1 - \frac{a^2}{b}}$ и, как можно показать, пропорционален малому параметру $\sqrt{\frac{p_o}{\gamma}}$, величина $1 - R^2 = \frac{p}{\gamma\sqrt{1-\beta^2}}$. В результате, оставляя в выражении для среднего квадрата только первый член разложения по малым параметрам, получим:

$$\overline{\Delta\phi^2} = 2\left(\frac{\gamma\sqrt{1-\beta^2}}{p}\right)^3 \left[(A_1-A_2)^2 \frac{\overline{\Delta N_i^2}}{N_i^2} + (B_1-B_2)^2 \frac{\overline{\Delta V_o^2}}{V_o^2}\right]. \qquad /24/$$

Если учесть равенство /11/: $p(\gamma_i - 1) = p_o(\cos\phi - \cos\phi_c)$,

то $|A_1 - A_2| = |B_1 - B_2| = \frac{2\pi k p}{\gamma\beta^2}(\gamma_i - 1)(1-\beta^2)$.

Таким образом, средний квадрат флуктуации фазы:

$$\overline{\Delta\phi^2} = \frac{8\pi^2 k^2}{p\beta^4}(\gamma_i - 1)^2 \gamma (1-\beta^2)^{7/2}\left(\frac{\overline{\Delta N_i^2}}{N_i^2} + \frac{\overline{\Delta V_o^2}}{V_o^2}\right). \qquad /25/$$

Выражение /25/ позволяет найти допуск на флуктуации числа ионов и амплитуды поля в резонаторе:

$$\left(\frac{\overline{\Delta N_i^2}}{N_i^2} + \frac{\overline{\Delta V_o^2}}{V_o^2}\right)^{1/2} = \sqrt{\frac{p\overline{\Delta\phi^2}}{2\gamma}}\, \frac{\beta^2}{2\pi k(\gamma_i - 1)(1-\beta^2)^{7/4}}. \qquad /26/$$

Например, для $k = 1$, $\gamma_i = 2$, $\overline{\Delta\phi^2} = 10^{-2}$, $p/\gamma = 10^{-2}$ допуск равен 10^{-2}.

Литература

1. *И.Н.Иванов и др. Проблемы физики элементарных частиц и атомного ядра /ЭЧАЯ/, 1, 391, 1971.*

Рукопись поступила в издательский отдел 17 сентября 1976 года.