ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р8-97-205

А.Б.Кузнецов

К ВОПРОСУ О САМОФОКУСИРОВКЕ ПУЧКОВ ВТОРОГО ЗВУКА В ГЕЛИИ II

Направлено в «Журнал экспериментальной и теоретической физики»

1997

1. Известно явление самофокусировки лазерного излучения [1, 2, 3], необходимое условие которого есть уменьшение скорости волны в среде с ростом квадрата амплитуды, когда распространение лазерного луча в среде описывается нелинейным уравнением поперечной диффузии [4, 5], исследованным в [6]. По аналогии с этим явлением в [7, 8] было высказано утверждение о возможности самофокусировки пучков второго звука при температуре $T \simeq 1,9$ K, где поправка к скорости второго звука C_2 линейная по скорости противотока компонент w $\Delta C_2(w) = 0$ [9], а поправка $\Delta C_2(w^2) \neq 0$. При обосновании этого утверждения в [7], где помимо собственной нелинейности второго звука учитывалось нелинейное влияние первого звука на второй, была допущена *принципиальная* методическая ошибка. Ниже будет проведён критический анализ [7].

2. Рассмотрим при температуре T_0, при которой $\Delta C_2(w) = 0$ ($T_0 \simeq 1,9$ K), распространение в безграничном пространстве интенсивного монохроматического (с частотой Ω) пучка второго звука, генерируемого в положительном направлении ($z > 0$) плоским ограниченным (w зависит от поперечных координат) тепловым источником. Ниже все численные оценки будут даваться при $T_0 = 1,9$ K.

Как известно, волну второго звука сопровождают возмущения (скорости v, давления p и плотности ρ): линейное по амплитуде w_a (первая "гармоника" — Ω), определяемое зависимостью $\rho(T)$, и квадратичное по амплитуде [10] (вторая "гармоника" — 2Ω). Эти возмущения возбуждают на границе источника первый звук[1]. При граничном условии на источнике $v = 0$ амплитуды первого звука, соответственно первой и второй "гармоник", определяются соотношениями

$$v_{a,1} = d_1(T) w_a\,, \quad v_{a,2} = d_2(T) \frac{w_a}{C_2} w_a\,, \tag{1}$$

$$d_1(T) = \rho_s \frac{\partial \log \rho(T)}{\partial \log \sigma(T)} \ll 1, \quad 0 < d_2(T) = \rho_n \frac{C_2^2}{C_1^2} \left(\frac{\rho C_1^2}{2\rho_n} \frac{\partial \rho_n}{\partial p} - \rho_s \right) \ll 1 \,[2].$$

[1] Это типично граничное явление, зависящее от граничных условий, и его *не физично* трактовать как *распад* волны энтропии [10, 8].

[2] В [10, 8] при *не физичном* условии на источнике $\rho = 0$ получена амплитуда второй "гармоники" увеличенная на множитель C_1/C_2 и, следовательно, ошибочно завышен вклад квадратичной связи при возбуждении первого звука тепловым источником. При $T_0 > 1,4$ K $d_2(T)/d_1(T) < 1$ и, следовательно, здесь амплитуда первой "гармоники" превосходит амплитуду второй при любых мощностях теплового источника.

Здесь C_1 — скорость первого звука, ρ_n, ρ_s — относительные содержания нормальной и сверхтекучей компонент ($\rho_n + \rho_s = 1$), σ — энтропия. $d_1 \simeq 1,8 \cdot 10^{-3}$, $d_2 \simeq 1,4 \cdot 10^{-3}$.

В представлении фонон-ротонного газа [11, 12], согласно [12], в гелии II могут распространяться волны второго звука только с частотами $\Omega < \Omega_c \simeq 1/\theta_f$ (θ_f — время релаксации фононов), когда термодинамическое равновесие в гелии II успевает подстраиваться к тепловым колебаниям. Следовательно, нелинейные волны второго звука при распространении *искажаются* [9], а вследствие подстройки появляется их *затухание* [12].

Предположим, что *затуханием* и *искажением* можно пренебречь, и применим гамильтоновский формализм.

Согласно [13], при разложении гамильтониана до третьего порядка по отклонениям влияние первого звука на второй проявляется в пропорциональном амплитуде рождении первым звуком второго. Отношение частот второго звука к частоте первого $\Omega_2/\Omega_1 = [1 \pm \xi(C_2/C_1)]/2$ ($\xi < 1$) в *распадных* и $\Omega_2/\Omega_1 < 2C_2/C_1$ в *черенковских* процессах. В стационарном случае пучок первого звука является *объёмным распределённым* вдоль линии распространения стационарным источником *вторичного* второго звука. *Распределённый* источник коррелирует с тепловым только через граничные условия (1), т.е. эти источники можно считать независимыми. Следовательно, имеет место суперпозиция *первичного* и *вторичного* вторых звуков; причём частоты *вторичного* не совпадают с частотой *первичного* Ω. Амплитуды *вторичного* второго звука порядка или меньше амплитуд первого звука, определяемых (1).

Аналогичные процессы имеют место и в четвёртом и более высоких порядках.

Следуя [13] и [7], гамильтониан в нормальных координатах a_k, b_k разложим по ним до четвёртого порядка. Часть гамильтониана H, описывающая монохроматический пучок с частотой Ω, зависящая от комплексных амплитуд второго звука b_k, в переменных

$$\Psi(r,t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int b_k(t) e^{ikr} dk$$

(канонический переход) принимает вид [7]

$$H = \int \left\{ \Omega |\Psi|^2 + \frac{i}{2} \left(\Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial z} - \Psi \frac{\partial \Psi^*}{\partial z} \right) C_2 + \frac{C_2}{2k_0} |\nabla_\perp \Psi|^2 + \frac{1}{2} V(k_0) |\Psi|^4 \right\} dr\,[3], \tag{2}$$

где

$$V(k_0) = \frac{k_0^2}{\rho} \overline{V}, \quad \overline{V} = \left\{ \frac{\rho C_2^2}{8} \frac{\partial^3 T}{\partial S^3} \left(\frac{\partial T}{\partial S} \right)^{-2} - \frac{\partial^2}{\partial S^2} \left(\frac{S^2}{2\rho_n} \right) \right\} \; [7] \quad (S = \rho\sigma).$$

В (2) пренебрежено членами, описывающими рождение *вторичного* второго звука первым, так как они по b_k и, следовательно, Ψ не выше третьего порядка (не могут

[3] Это выражение совпадает с [7, форм. (14)] в четвёртом порядке по Ψ при пренебрежении там членами, определяющими взаимодействие первого звука со вторым [7, форм. (7) и (13)].

определять, как будет видно из дальнейшего, $\Delta C_2(w^2)$) и, кроме того, пропорциональны малой амплитуде a_k, определяемой (1) [4].

Из (2) получаем уравнение для Ψ

$$i\frac{\partial\Psi}{\partial t} = \frac{\delta H}{\delta\Psi^*} = \Omega\Psi\left\{1 + \frac{V(k_0)}{\Omega^2}\Omega|\Psi|^2\right\} + iC_2\frac{\partial\Psi}{\partial z} - \frac{C_2}{2k_0}\Delta_\perp\Psi. \tag{3}$$

Выражение в фигурных скобках описывает зависимость нормированной скорости второго звука от w_a^2 (второе слагаемое) ($\overline{V} \simeq 0,25$ [5])

$$\frac{\Delta C_2(w_a^2)}{C_2} = \frac{\rho_n\rho_s\overline{V}}{2}\left(\frac{w_a}{C_2}\right)^2 = 0.03\left(\frac{w_a}{C_2}\right)^2. \tag{4}$$

Нелинейный член ведёт к увеличению скорости волны с ростом амплитуды ($C_2(w_a^2) = C_2[1 + 0,03(w_a/C_2)^2]$), что *противоречит необходимому условию самофокусировки*, и, следовательно, в пучках второго звука *самофокусировка отсутствует*.

Таким образом, при $T_0 \simeq 1,9$ K — $C_2(w^2) = C_2[1 + 0,06(w/C_2)^2]$, что определяет при распространении волны её *искажение* вплоть до образования разрывов на передних фронтах положительной и отрицательной полуволн, препятствующее распространению нелинейной стационарной монохроматической волны.

3. В [7] произвольно сформулирована энергия взаимодействия первой и второй звуковых мод в виде [7, форм. (7)]

$$\delta E = \int\left(\frac{\partial\Omega}{\partial\rho}\delta\rho + k_0 v\right)|\Psi|^2\,dr, \tag{5}$$

что привело к ряду незамеченных противоречий. Рассмотрим два противоречия.

Связь характеристик первого звука $\delta\rho$ и v с Ψ получалась не на основе (1), а при подстановке (5) и энергии первой звуковой моды [7, форм. (13)] в переменных (ρ,α), (S,β) [13] в уравнения непрерывности плотности и сверхтекучего движения [7, форм. (16) и (17)]. В стационарном случае получались в квадратичном приближении по Ψ соотношения [7, форм. (18), (19)]

$$v = -\frac{k_0}{\rho}|\Psi|^2 \quad \left(v = \nabla\alpha + \frac{S\nabla\beta}{\rho},\ \frac{S\nabla\beta}{\rho} = B\frac{C_2\rho_n}{S\rho_s}\frac{k_0}{k_0}(\Psi + \Psi^*)\right), \tag{6}$$

$$\delta\rho = -\frac{\rho}{C_1^2}\frac{\partial\Omega}{\partial\rho}|\Psi|^2. \tag{7}$$

Эти соотношения при их подстановке в форм. (7) и (13) [7] давали в гамильтониане [7, форм. (14)] отрицательный член, пропорциональный $|\Psi|^4$, и по модулю на порядок больший основного $V(k_0)|\Psi|^4/2$.

[4] Четвёртый порядок по b_k имеет место при распаде первого звука на четыре вторых (пятый порядок разложения по a_k, b_k). Этим членом также пренебрежено ввиду его пропорциональности a_k.

[5] Величина $\overline{V}$ рассчитана по программе НЕРАК.

Из (6) и (7) следует

$$\left|\frac{\delta\rho}{\rho}\frac{C_1}{v}\right| = \frac{\rho}{\Omega}\left|\frac{\partial\Omega}{\partial\rho}\right|\frac{C_2}{C_1} = \rho C_1C_2\left|\frac{\partial logC_2}{\partial p}\right| \simeq 0.1\ ^6 \quad (\text{должно быть } \frac{\delta\rho}{\rho}\frac{C_\mathrm{I}}{v} = 1). \tag{8}$$

Из сравнения (6) с (1) следует для второй "гармоники"

$$\frac{v_a}{v_{a,2}} = \frac{\rho_n\rho_s}{2d_2} \simeq 1\cdot 10^2 \tag{9}$$

и для первой "гармоники"

$$\frac{v_a}{v_{a,1}} \gg \frac{\rho_s}{d_\mathrm{I}}\left(\frac{\rho_n C_\mathrm{I}}{[U]C_2}\right)^{1/2}\left(\frac{4\pi(\varkappa/C)}{\rho C_2 l}\right)^{1/4} \simeq \frac{50}{l^{1/4}} \quad (l \text{ в см}). \tag{10}$$

В (10) учтено, согласно [13], что первый звук наиболее интенсивно поглощается в *распадных* процессах при существенном превышении пороговой амплитуды $v_a \gg v_{a,r} = 2\rho_s C_\mathrm{I}(\varkappa/C)\Omega/[U]\rho C_2^2$ и при выполнении условия когерентности стационарного процесса $v_a > 8\pi\rho_s C_2 C_1/[U]\Omega l$. Здесь $\varkappa/C$ — отношение теплопроводности к теплоёмкости [12, Рис. 4], l — расстояние от источника до поглощающей звук стенки, $[U] \simeq 0.3$ [13]. Влиянием на поглощение процессов выше третьего порядка пренебрежено.

Противоречивые соотношения (8) и (9), (10) показывают, что формулировки в [7] уравнений непрерывности плотности и сверхтекучего движения [7, форм. (16), (17)] неверны. Следовательно, взаимодействие первого звука, как созданного внешним источником, так и возбуждённого на тепловом источнике, определяемого (1), с пучком второго звука формулировать в виде (5) ошибочно. Ошибочен и полученный в гамильтониане результирующий отрицательный член, пропорциональный $|\Psi|^4$. Эта ошибка и привела автора по аналогии с [1, 2, 4, 6] к утверждению о возможности самофокусировки в пучках второго звука.

4. Проведённое в [7] и [8, разделы 2.9 и 3.1] рассмотрение не имеет физического смысла. Утверждение о возможности при $T \simeq 1,9$ K ($\Delta C_2(w) = 0$) распространения в гелии II нелинейных стационарных монохроматических тепловых волн [8, раздел 2.9] и самофокусировки пучков второго звука [7] и [8, раздел 3.1] ошибочно. Нелинейные волны второго звука и при этой температуре при распространении *искажаются* вплоть до образования разрывов.

Выражаю глубокую благодарность Э.А.Перельштейну и Н.А.Сергееву за полезные обсуждения. |x|

[6] Оценка проведена по программе НЕРАК.

Литература

[1] Г. А. Аскарьян, ЖЭТФ **42**, 1567 (1962).

[2] В. И. Таланов, Изв. ВУЗов, Радиофизика **7**, 564 (1964).

[3] Н. Ф. Пилипецкий, А. Р. Рустамов, Письма ЖЭТФ **2**, 88 (1965).

[4] В. И. Таланов, Письма ЖЭТФ **2**, 218 (1965).

[5] P. L. Kelley, Phys.Rev.Lett. **15**, 1005 (1965).

[6] В. Е. Захаров, В. В. Соболев, В. С. Сынах, ЖЭТФ **60**, 136 (1971).

[7] С. К. Немировский, ФНТ **4**, 1229 (1978).

[8] С. К. Немировский, УФН **160**, 51 (1990).

[9] И. М. Халатников, ЖЕТФ **23**, 253 (1952).

[10] С. К. Немировский, ЖЭТФ **86**, 2091 (1984).

[11] И. М. Халатников, УФН **59**, 673 (1956).

[12] И. М. Халатников, УФН **60**, 69 (1956).

[13] В. Л. Покровский, И. М. Халатников, ЖЕТФ **71**, 1974 (1976).