

СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

96-491

P8-96-491

А.И.Крот

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
НЕЛИНЕЙНЫХ АКУСТИЧЕСКИХ ЭФФЕКТОВ
В СВЕРХТЕКУЧЕМ ГЕЛИИ

1996

Введение

Уникальные свойства сверхтекучего гелия He II делают его исключительно интересным объектом как с теоретической, так и практической точек зрения. Поскольку акустические методы занимают одно из главных мест в изучении физики He II [1], существует большое количество работ, посвященных численному моделированию распространения волн второго звука в сверхтекучем гелии. При этом большинство авторов оперируют с упрощенными уравнениями гидродинамики He II, полагая жидкость несжимаемой, пренебрегая некоторыми членами в уравнениях и т.д. Кроме того, практически неизвестны работы, в которых было бы точно учтено уравнение состояния He II, хотя, как справедливо отмечается в работе [1], акустические эффекты обусловлены в конечном счете "игрой" термодинамических величин.

Цель работы состояла в разработке численной схемы, моделирующей распространение волн *первого и второго звуков* в сверхтекучем гелии. В первом разделе рассматривается реализация численной схемы, во втором обсуждаются результаты расчетов.

1. Численная процедура

Одномерные уравнения движения сверхтекучего гелия в бездиссипативном приближении можно записать в следующем виде [2]:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} = 0, \quad (1)$$

где векторы \mathbf{U} и \mathbf{F} задаются следующими выражениями:

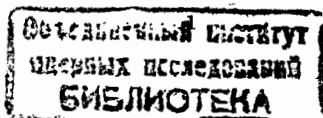
$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho\sigma \\ v_s \\ J \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} J \\ \rho\sigma v_n \\ \frac{1}{2}v_s^2 + \mu \\ P + \rho_n v_n^2 + \rho_s v_s^2 \end{bmatrix}.$$

Здесь ρ – плотность, σ – удельная энтропия, v_s – скорость сверхтекучей компоненты, v_n – скорость нормальной компоненты, ρ_s – плотность сверхтекучей компоненты, ρ_n – плотность нормальной компоненты, P – давление, μ – химический потенциал, $J = \rho_n v_n + \rho_s v_s$ – поток массы.

Уравнения (1) довольно сложны, поэтому при их решении обычно прибегают к некоторым упрощениям. В частности, полагая $J = 0$,¹ можно свести исходную систему уравнений к системе двух уравнений относительно, например, температуры T и скорости противотока $w = v_n - v_s$. Для замыкания полученной системы уравнений используют упрощенные зависимости $\rho_n/\rho, \sigma$ от T и w^2 . Так, принимая во внимание, что температурный скачок в волне второго звука много меньше исходной температуры сверхтекучего гелия, можно записать

$$\frac{\rho_n}{\rho} = \left(\frac{\rho_n}{\rho}\right)_0 + \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{\rho_n}{\rho}\right) \delta T,$$

¹ Такое предположение является обычной практикой, поскольку при накачке второго звука в систему тепловыми импульсами поток массы довольно мал.



$$\sigma = \sigma_0 + \frac{\partial \sigma}{\partial T} \delta T + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial T^2} (\delta T)^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{\rho_n}{\rho} \right) w^2,$$

где $(\rho_n/\rho)_0$ и σ_0 — исходные относительная плотность нормальной компоненты и энтропия соответственно.

Очевидно, что подобный подход хотя и упрощает численную модель, но приводит к снижению точности получаемых решений. Кроме того, сужается круг поддающихся моделированию физических процессов. Так, переход к приближению несжимаемой жидкости исключает из рассмотрения первый звук — волны плотности (или давления). А упрощенное рассмотрение уравнения состояния не позволяет, например, производить расчеты в случае, когда температура в начальный момент времени не постоянна по длине канала. Поэтому в работе сделана попытка построить численную схему, свободную от вышеперечисленных недостатков.

Прежде всего заметим, что градиент химического потенциала можно исключить из уравнений (1), воспользовавшись известным термодинамическим соотношением [2]

$$d\mu = \frac{dP}{\rho} - \sigma dT - \frac{\rho_n}{2\rho} d(v_n - v_s)^2. \quad (2)$$

Тогда для замыкания системы уравнений (1) необходимо знать уравнения состояния, определяющие ρ_n/ρ , T и P через ρ , σ , w^2 . Из уравнения (2) несложно получить

$$\frac{\partial T}{\partial w^2} = -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \sigma} \left(\frac{\rho_n}{\rho} \right), \quad \frac{\partial P}{\partial w^2} = -\frac{1}{2\rho^2} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{\rho_n}{\rho} \right). \quad (3)$$

Поскольку зависимость ρ_n/ρ от w^2 можно пренебречь [2], то уравнения (3) легко интегрируются

$$T(\rho, \sigma, w^2) = T_0(\rho, \sigma) - \frac{w^2}{2} \frac{\partial}{\partial \sigma} \left(\frac{\rho_n}{\rho} \right), \quad (4)$$

$$P(\rho, \sigma, w^2) = P_0(\rho, \sigma) - \frac{w^2}{2\rho^2} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{\rho_n}{\rho} \right), \quad (5)$$

где $T_0(\rho, \sigma)$, $P_0(\rho, \sigma)$ — зависимости температуры и давления от плотности и энтропии в отсутствие противотока. Для определения этих зависимостей имеются экспериментальные данные [3], которые необходимо представить в форме, удобной для численных расчетов.

На рис. 1 представлена фазовая диаграмма ${}^4\text{He}$ в переменных ρ и σ . Штриховкой обозначена интересующая нас область изменения параметров ρ и σ . С помощью замены переменных можно преобразовать исходную область в прямоугольную:

$$\rho = \rho,$$

$$\sigma = \frac{\sigma - \sigma_1(\rho)}{\sigma_2(\rho) - \sigma_1(\rho)},$$

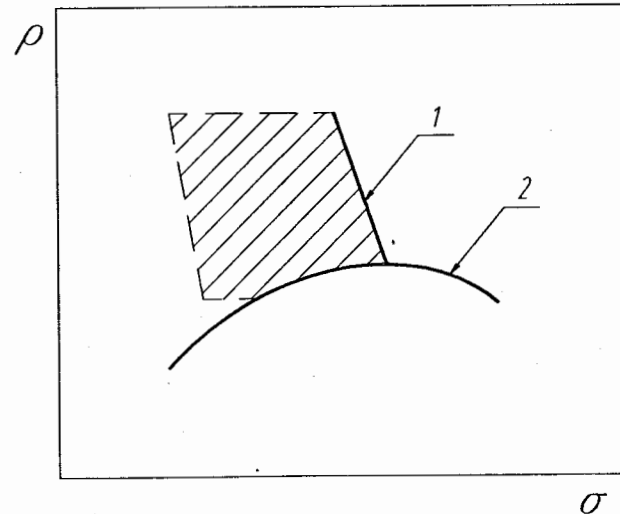


Рис. 1. Фазовая диаграмма ${}^4\text{He}$ в координатах энтропия σ -плотность ρ : 1-кривая л-переходов, 2 — линия насыщения

где $\sigma_1(\rho)$ и $\sigma_2(\rho)$ левая и правая границы области соответственно. В полученной прямоугольной области табличные значения T , P , ρ_n/ρ аппроксимировались сглаживающими эрмитовыми сплайнами [4]. Сглаживание проводилось методом наименьших квадратов. Точность аппроксимации табличных данных составляла около 0,1 %.

Таким образом, зная зависимости $T_0(\rho, \sigma)$, $P_0(\rho, \sigma)$, $\rho_n/\rho(\rho, \sigma)$ и воспользовавшись формулами (4) и (5), можно определить температуру и давление по вектору состояния \mathbf{U} .

Для численного решения уравнения (1) применялась явная схема Мак-Кормака, приводящая к следующему алгоритму [5]:

предиктор

$$\mathbf{U}_i^{n+1} = \mathbf{U}_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\mathbf{F}_{i+1}^n - \mathbf{F}_i^n), \quad (6)$$

корректор

$$\mathbf{U}_i^{n+1} = \frac{1}{2} [\mathbf{U}_i^n + \mathbf{U}_i^{n+1} - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\mathbf{F}_{i+1}^{n+1} - \mathbf{F}_{i-1}^{n+1})]. \quad (7)$$

На втором шаге значения \mathbf{F}_i^{n+1} и \mathbf{F}_{i-1}^{n+1} вычисляются по значениям \mathbf{U}_i^{n+1} и \mathbf{U}_{i-1}^{n+1} , полученным на первом шаге. Схема имеет второй порядок точности как по времени, так и по пространству. Устойчивость схемы определяется по критерию Куранта-Фридриха-Леви:

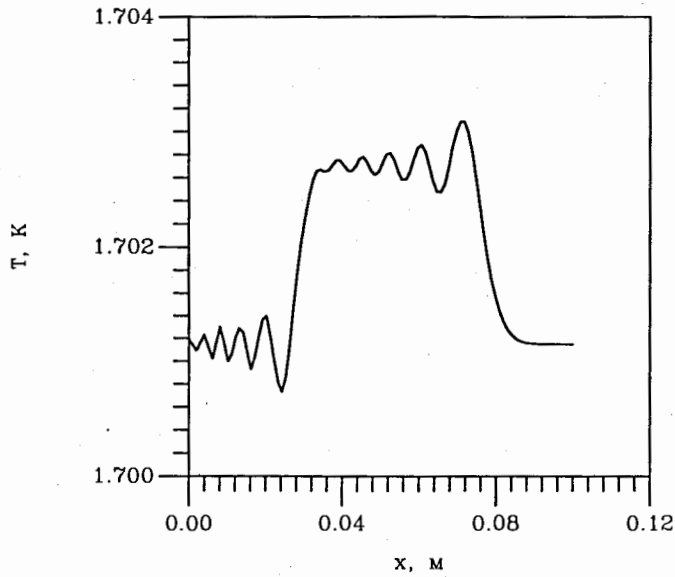


Рис. 2. Расчет волны второго звука по схеме (6)-(7)

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} \geq C_1,$$

где C_1 — скорость первого звука.

После каждого шага предиктора или корректора можно найти переменные ρ_n/ρ , w , T , P , декодируя вектор состояния U следующим образом:

$$\frac{\rho_n}{\rho} = \frac{\rho_n}{\rho}(\rho, \sigma), w = (J/\rho - v_s)/\frac{\rho_n}{\rho},$$

$$T = T(\rho, \sigma, w^2), P = P(\rho, \sigma, w^2).$$

Рассмотренный алгоритм мало приспособлен для расчета движения ударной волны. Типичный пример расчета распространения прямоугольного импульса второго звука приведен на рис. 2. Резкие колебания за фронтом ударной волны имеют нефизическую природу и характерны для явных схем с использованием аппроксимаций второго порядка точности по пространственной переменной.

Для подавления ложных осцилляций в численную схему была введена искусственная диффузия общего вида, т.е. в исходном уравнении (1) вектор потоков F заменялся на сумму векторов $F + F'$, где

$$F' = \alpha_B \frac{\partial U}{\partial x}.$$

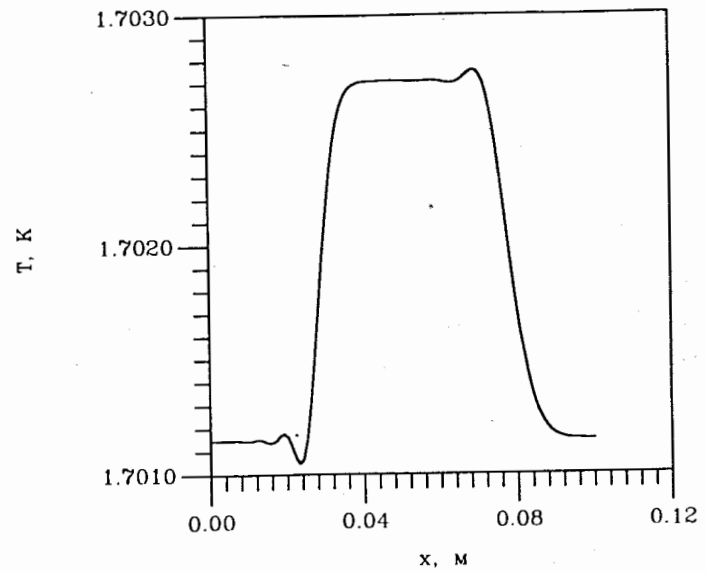


Рис. 3. Прямоугольная волна второго звука, рассчитанная по схеме с искусственной вязкостью ($\beta = 0,05$)

Коэффициент искусственной диффузии α_B определялся следующим образом:

$$\alpha_B = \beta(|v_s| + C_1).$$

С помощью эмпирического параметра β можно управлять степенью сглаживания численного решения. Слишком большие значения параметра приводят к значительному размытию фронта ударной волны, тогда как слишком малые не позволяют устранить пилообразный характер расчетных кривых. Оптимальное значение параметра определялось в процессе тестовых расчетов. Как видно из рис. 3, применение искусственной диффузии позволяет практически полностью устранить осцилляции при незначительном размытии фронта ударной волны второго звука.

Для решения уравнений (1) необходимо задать граничные и начальные условия. Мы будем рассматривать следующую конфигурацию канала: с одной стороны он ограничен непроницаемой стенкой, на которую подается тепловой импульс мощностью $Q(t)$ (форма импульса произвольна), на другом конце находится либо адиабатическая непроницаемая стенка, либо выходная граница. Таким образом, необходимо рассмотреть три типа граничных условий. При реализации граничных условий для получения однородной разностной схемы использовался метод фиктивных узлов.

1. "Теплая" непроницаемая стенка. Скорость сверхтекучей компоненты на

стенке определяется выражением [2]:

$$v_s^0 = \frac{\rho_n Q(t)}{\rho_s \rho \sigma T}.$$

Из условия непроницаемости имеем: $J^0 = 0$. Значения параметров в фиктивной точке определяются следующим образом:

$$u^{-1} = u^0, \quad u = v_s, J, \rho, \sigma.$$

Здесь и ниже индекс 0 соответствует расчетной точке, находящейся на границе канала, индекс -1 — фиктивной точке за пределами канала.

2. Адиабатическая непроницаемая стенка. На границе ставились обычные условия отражения:

$$v_s^{-1} = -v_s^1, \quad u^{-1} = u^0, \quad u = \rho, \sigma, J.$$

3. Выходная граница. Граничные условия задавались путем линейной экстраполяции переменных за пределы расчетной области [6]:

$$u^{-1} = 2u^0 - u^1, \quad u = \rho, \sigma, v_s, J.$$

В работе [6] указывается, что при подобной постановке граничных условий возможно нарушение устойчивости схемы при пересечении выходной границы ударной волной, чего, однако, не наблюдалось в проведенных расчетах.

В начальный момент времени ($t = 0$) предполагалось, что жидкость покоится и плотность, и энтропия постоянны по всей длине канала, т.е.:

$$v_s = 0, \quad J = 0, \quad \rho = const, \quad \sigma = const.$$

2. Численные результаты

2.1. Генерация второго и первого звуков тепловыми импульсами

Хорошо известно уникальное свойство сверхтекучего гелия, заключающееся в том, что температурные возмущения распространяются в нем в виде волн — так называемый второй звук. Скорость второго звука экспериментально измерена в широком диапазоне температур и давлений [3]. Поэтому точность численной схемы можно оценить, сравнивая значения, полученные по численной схеме, с табличными величинами. Скорость распространения второго звука рассчитывалась по времени пробега треугольной волны малой амплитуды. На рис. 4 представлена зависимость скорости второго звука от температуры. Сплошная линия соответствует данным Арпа и Маккарти [3], звездочками помечены расчетные точки. Полученные результаты совпадают с табличными (отклонение около 1%).²

²Отметим, что это не является предельной точностью схемы. Точность можно повысить, уменьшая шаг расчетной сетки.

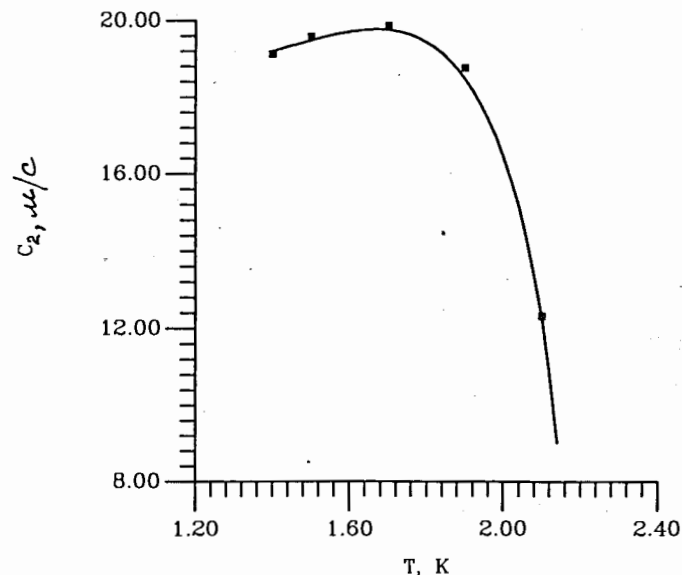


Рис. 4. Температурная зависимость скорости второго звука c_2 , м/с от температуры T , К при плотности $\rho = 146 \text{ Кг/м}^3$

Менее изучено возникновение первого звука от неподвижного источника тепла, хотя имеются посвященные этой проблеме экспериментальные работы. В большинстве этих работ рассматриваются волны первого звука, возникающие в результате вскипания гелия вблизи источника тепла. По-видимому, это связано с тем, что амплитуда волн обычного первого звука, возбуждающихся источником тепла, весьма мала, поэтому использовались большие мощности тепловой нагрузки.

Как показывают расчеты, неподвижный источник тепла в сверхтекучем гелии генерирует два типа возмущений давления, распространяющихся по каналу с различными скоростями (рис. 5). На рис. 5 первый (левый) пик давления соответствует изменению давления в волне второго звука и распространяется соответственно со скоростью второго звука. Второй пик — волна разрежения, которая распространяется со скоростью первого звука. Отметим тот любопытный факт, что амплитуда изменения давления в волне второго звука при больших мощностях теплового импульса может превосходить амплитуду давления в волне первого звука.

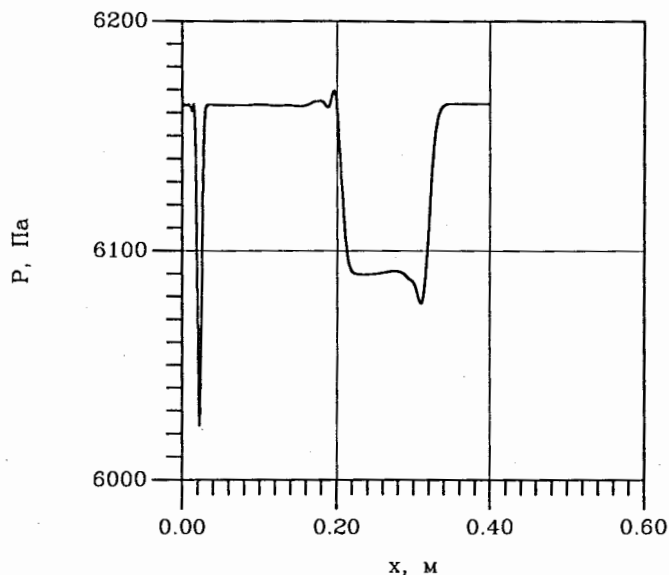


Рис. 5. Профиль давления P , Па по длине канала x , м при подаче теплового импульса длительностью 1 мс

2.2. Интенсивные волны второго звука

Нелинейную волну второго звука можно приближенно описать одной переменной $v_n(x, t)$, уравнение для которой имеет вид [1]:

$$\frac{\partial v_n}{\partial t} + (C_2 + \alpha(T)v_n) \frac{\partial v_n}{x} = 0, \quad (8)$$

где $\alpha(T)$ — коэффициент нелинейности второго звука. Из уравнения 8 следует, что различные участки волны движутся с различными скоростями, что приводит к образованию ударных волн. И если в обычных жидкостях коэффициент α положителен, то для сверхтекучего гелия он может принимать как положительные, так и отрицательные значения. На рис. 6 представлен расчет распространения прямоугольной волны второго звука при положительной нелинейности. Как видно из рисунка, в процессе распространения волны образуется передний ударный фронт, а задний фронт размывается. При отрицательной нелинейности наблюдается обратная картина — размывается передний фронт волны (рис. 7). Расчет коэффициента нелинейности второго звука был проведен в интервале температур 1,4–2,1 К. Коэффициент α определялся по формуле

$$\alpha = \frac{C_2 - C_{2,0}}{v_n}$$

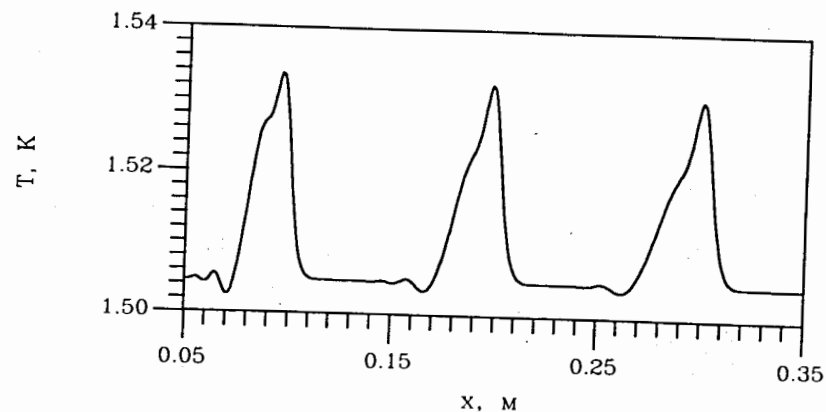


Рис. 6. Эволюция прямоугольной волны второго звука при положительном коэффициенте нелинейности

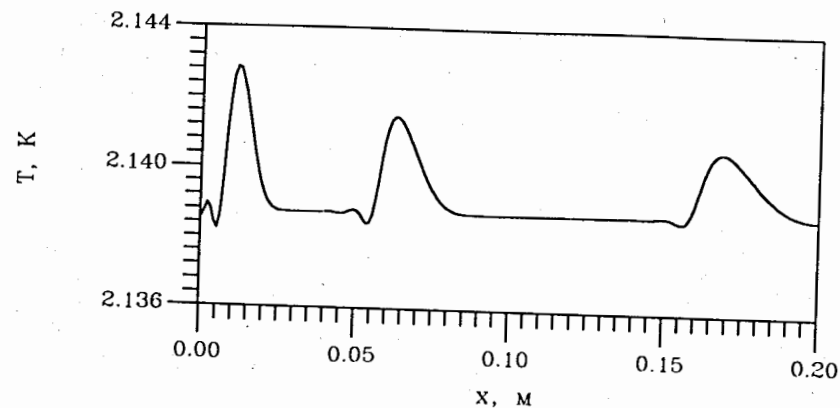


Рис. 7. Эволюция прямоугольной волны второго звука при отрицательном коэффициенте нелинейности

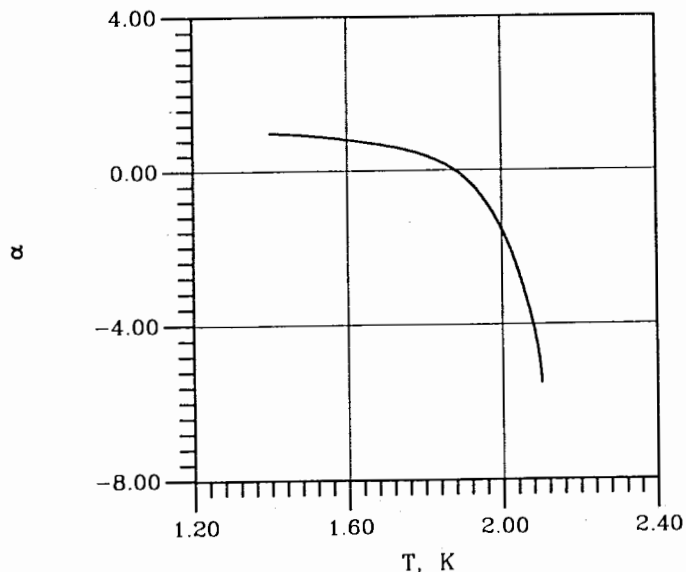


Рис. 8. Зависимость коэффициента нелинейности второго звука α от температуры

Здесь скорость $C_{2,0}$ определялась по времени пробега волны второго звука малой амплитуды, когда член αv в уравнении (8) пренебрежимо мал, а скорость C_2 определялась по времени пробега интенсивной волны второго звука (тепловая мощность 10 Вт/см^2).

Расчетная кривая позволяет определить температуру T_α , при которой коэффициент нелинейности второго звука обращается в нуль: $\alpha(T_\alpha) = 0$. Интерес к этой точке обуславливается, по крайней мере, двумя обстоятельствами:

- в окрестности T_α возможен эффект самофокусировки волны второго звука [1];
- поскольку в этой точке скорость распространения второго звука с высокой точностью не зависит от амплитуды, то T_α можно использовать как реперную точку [7].

В работе [2] указывается, что $T_\alpha \approx 1,95 \text{ К}$, в более поздней публикации [7] — $1,88 \text{ К}$. Согласно нашим расчетам, коэффициент нелинейности равен нулю при температуре $1,86 \text{ К}$.

Заключение

Хотя двухжидкостные уравнения Ландау известны довольно давно, до сих пор существовали численные модели только для упрощенной системы уравнений. Раз-

работная численная схема, основанная на решении полной системы двухжидкостных уравнений, восполняет этот пробел. Кроме того, впервые полностью учтено уравнение состояния сверхтекучего гелия, что позволяет расширить круг решаемых задач.

Проведенные расчеты акустических процессов в сверхтекучем гелии: распространение второго звука, эволюция интенсивных волн, доказывают корректность работы программы. Проведен расчет коэффициента нелинейности скорости второго звука, определена температура, в которой коэффициент нелинейности равен нулю. Расчетное значение несколько отличается от экспериментально измеренной величины. Впервые проведен расчет распространения волн первого звука в сверхтекучем гелии, возникающих в результате воздействия импульсного источника тепла. Показано, что источник тепла в сверхтекучем гелии приводит к генерации двух волн разрежения, одна из которых представляет обычную звуковую волну, а другая распространяется вместе с волной второго звука.

Расчеты проводились на эйлеровых пространственных сетках. Поскольку при изучении акустических эффектов в сверхтекучем гелии важен точный расчет волновых фронтов, то можно добиться более точных результатов, применяя пространственные расчетные сетки, адаптированные к положению скачка. В следующей версии программы планируется ввести расчет на адаптивных сетках.

В заключение автор хотел бы выразить благодарность Филиппову Ю.П. и Сергееву И.А. за интерес к работе, полезные обсуждения и пожелания, высказанные в процессе подготовки работы к печати.

Работа выполнена в рамках проекта 95-02-05668, поддерживаемого Российским фондом фундаментальных исследований.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Немировский С.К. // Успехи физических наук. 1990. Т. 160. С. 51.
- [2] Паттерман С. Гидродинамика сверхтекучей жидкости. М.: Мир, 1978.
- [3] Vincent D. Arp, Robert D. McCarty. Thermophysical Properties of Helium-4 From 0.8 to 1500 K With Pressures to 2000 MPa. NIST technical note 1334, 1989.
- [4] Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л. Методы сплайн-функций. М.: Наука, 1980.
- [5] Андерсон Д., Тапехилл Дж., Плетчер Р. Вычислительная гидромеханика и теплообмен. М.: Мир, 1990.
- [6] Роуч П. Вычислительная гидродинамика М.: Мир, 1980.
- [7] Цой А.Н. Новая реперная точка в сверхтекучем гелии // Квантовая метрология и фундаментальные физические константы: Тез. докл. - Ленинград, 1982, с.120-121.

Рукопись поступила в издательский отдел
26 декабря 1996 года.