

С 393 з
Н-623

СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА



19/IV-76

P8 - 9453

1464/2-76

А.Никитиу, И.С.Хухарева

К РАСЧЕТУ ЭФФЕКТИВНОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ
МЕЛКОДИСПЕРСНОГО СВЕРХПРОВОДНИКА
В ДВУХКОМПОНЕНТНОЙ МАТРИЦЕ

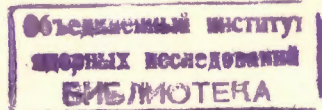
1976

P8 - 9453

А.Никитиу,* И.С.Хухарева

К РАСЧЕТУ ЭФФЕКТИВНОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ
МЕЛКОДИСПЕРСНОГО СВЕРХПРОВОДНИКА
В ДВУХКОМПОНЕНТНОЙ МАТРИЦЕ

* Институт атомной физики, Бухарест



Никитиу А., Хухарева И.С.

P8 - 9453

К расчету эффективного сопротивления мелкодисперсного сверхпроводника в двухкомпонентной матрице

Выведены формулы для расчета эффективного сопротивления мелкодисперсного сверхпроводника для двух различных вариантов двухкомпонентной матрицы: 1 случай - сверхпроводящие нити, каждая из которых окружена медным чехлом, равномерно распределены в мельхиоровой матрице; 2 случай - сверхпроводящие нити равномерно распределены в медной матрице внутри кластеров, каждый из которых окружен мельхиоровой оболочкой. Приведены примеры расчета эффективного сопротивления в том и другом случаях.

Работа выполнена в Лаборатории высоких энергий ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований
Дубна 1976

Nichitiu A., Khukhareva I.S.

P8 - 9453

On the Calculation of the Effective Resistivity of a Filamentary Composite Superconductor in a Two Component Matrix

The formulae have been deduced for calculating the resistivity of a filamentary composite superconductor for two different variants of a two component matrix: the first case - superconducting filaments, each surrounded by copper, are uniformly distributed in a cupro-nickel matrix; the second case - superconducting filaments are distributed in a copper matrix inside a cluster; each cluster is surrounded by a cupro-nickel sheath. Examples of calculation of the effective resistivity are presented for both the cases.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research

Dubna 1976

Потери мощности в сверхпроводящей обмотке импульсного магнита, в основном, складываются из гистерезисных и вихревых потерь. При заданной скорости изменения магнитного поля и выбранном диаметре сверхпроводящих нитей /СПН/ потери в импульсном магните могут быть уменьшены за счет вихревых потерь, которые сильно зависят от геометрических параметров сверхпроводника и сопротивления матрицы. Как показано на примере расчета потерь в двухкомпонентном сверхпроводнике с диаметром СПН 10μ , вихревые потери, сравнимые с гистерезисными при шаге скрутки $\ell_p = 5$ мм, становятся существенно меньше последних при $\ell_p = 3$ мм и прочих равных условиях. Более эффективным способом уменьшения вихревых потерь является повышение удельного сопротивления матрицы, окружающей СПН, за счет введения в нее второй компоненты с высоким значением ρ . Возможны различные сочетания компонент. Один из примеров трехкомпонентного сверхпроводника описан в работе /2/, где предложен способ расчета эффективного удельного сопротивления (ρ_e) сложной матрицы. Сопоставление расчетного значения ρ_e с экспериментальными, проведенное в этой работе, дало хорошие результаты, из чего следует, что выбранная схема расчета достаточно надежно описывает реальную композицию. Используя основные идеи упрощающих предположений данной работы, мы рассчитали эффективное удельное сопротивление комбинированной матрицы в зависимости от геометрических факторов для двух различных вариантов сочетания меди и мельхиора вокруг СПН.

Случай 1. Однородное распределение сверхпроводящих нитей, окруженных медной оболочкой, в мельхиоровой матрице.

Для расчета эффективного удельного сопротивления матрицы ρ_e^I рассматривается упрощенная композиция, состоящая из СПН квадратного сечения с линейным размером d и окружающих слоев: меди, толщиной t , и мельхиора, толщиной u . Поперечное сечение проволоки разбивается на отдельные тонкие кольца, каждое из которых состоит из одного слоя СПН, разделенных медными и мельхиоровыми перегородками, двух слоев меди с мельхиоровыми перегородками и одного непрерывного слоя из мельхиора /см. рис. 1/. Задача сводится к определению магнитного момента, возникающего благодаря замкнутым вихревым токам в сечении проволоки, перпендикулярном магнитному полю. Рассматриваются токи, текущие вдоль СПН и под прямым углом к ним через нормальную матрицу. J_w - плотность тока в слое с СПН, медными и мельхиоровыми перегородками; J_v - плотность тока в слое меди с мельхиоровыми перегородками. Чтобы определить J_w , рассматривается контур OABA'O' /см. рис. 2/:

$$\int \dot{B} ds = \Phi \rho J dl;$$

$$\int_s \dot{B} ds \approx \dot{B} r \sin \phi \Delta z; \quad \Phi \rho J dl = J_w (\rho_t 2t + \rho_u u) \frac{r \Delta \phi}{d + 2t + u}$$

$$J_w = \frac{\dot{B} r \sin \phi}{\sin \theta} \cdot \frac{(d + 2t + u)}{(\rho_t 2t + \rho_u u)}, \quad \text{где} \quad \sin \theta = \frac{r \Delta \phi}{\Delta z}. \quad /1/$$

Аналогично, рассматривая пространственный контур OACDBA'O', можно определить J_v :

$$\begin{aligned} \dot{B} r \sin \phi \Delta z = J_v [(2t + d) \rho_t + u \rho_u] \frac{r \Delta \phi}{2t + d + u} + \\ + \frac{\Delta J_v(\phi) t}{r \Delta \phi} (t \rho_t + u \rho_u) - \frac{\Delta J_v(\phi + \Delta \phi) t}{r \Delta \phi} (\rho_t t + \rho_u u). \end{aligned}$$

Последние два члена в правой части уравнения учитывают перетекание тока в радиальном направлении через слой меди и мельхиора

$$\frac{\partial^2 J_v}{\partial \phi^2} = \frac{[(2t + d) \rho_t + u \rho_u] r^2 J_v}{(2t + d + u) t (\rho_t t + \rho_u u)} - \frac{\dot{B} r^3 \sin \phi}{t (\rho_t t + \rho_u u) \sin \theta}$$

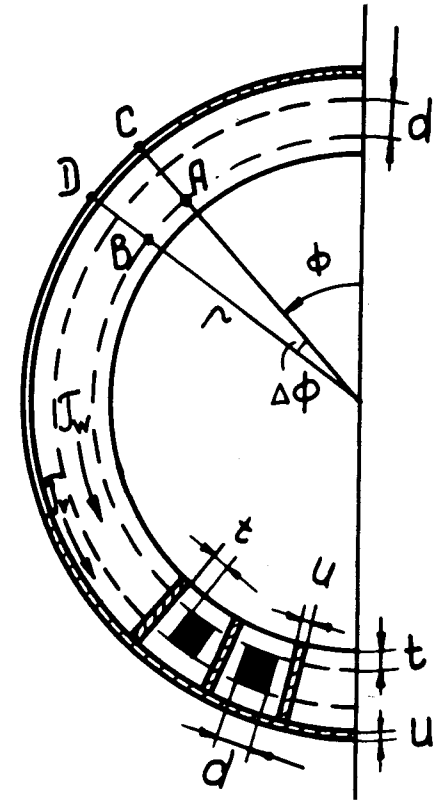


Рис. 1.

Решая это уравнение с граничными условиями

$$J_v(\phi) = -J_v(-\phi)$$

$$J_v(\phi) = J_v(\phi + 2\pi),$$

получим

$$J_v = \frac{\dot{B} r^3 \sin \phi (d + 2t + u)}{\{t(d + 2t + u)(t \rho_t + u \rho_u) + [(2t + d) \rho_t + u \rho_u] r^2\} \sin \theta}. \quad /2/$$

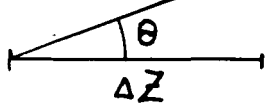
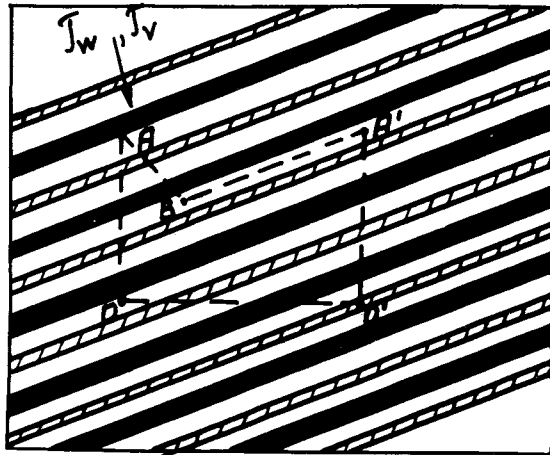


Рис. 2.

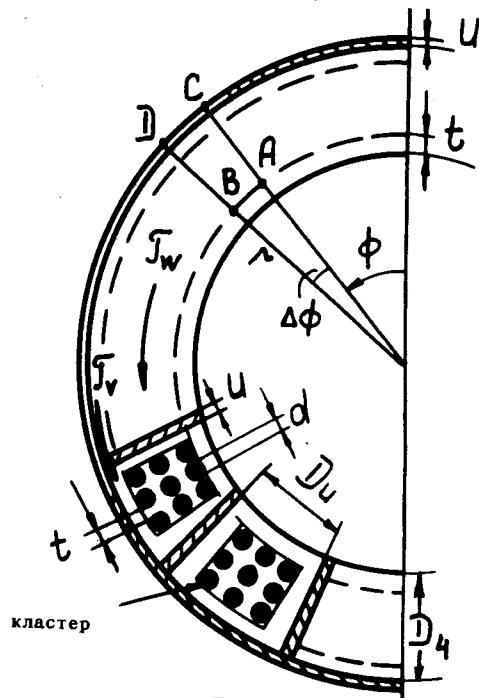


Рис. 3.

Намагничивание мелкодисперсной сверхпроводящей проволоки складывается из двух компонент: постоянной, которая возникает из-за гистерезисных потерь с СПН, и переменной, зависящей от скорости нарастания магнитного поля. Переменная составляющая определяется вихревыми токами, текущими перпендикулярно магнитному полю, в данном случае токами J_w и J_v . Продольная составляющая линейной плотности тока будет:

$$J(\phi) = \frac{J_w d + J_v 2t}{\sin \theta}.$$

Элементарный магнитный момент равен:

$$\Delta m(\phi) = \mu_0 \int_s I ds \approx \mu_0 J(\phi) r \Delta \phi r \sin \phi \Delta z$$

$$\begin{aligned} \Delta m &= \frac{\mu_0 r^2 \Delta \phi \sin^2 \phi \Delta z \dot{B}}{\sin^2 \theta} \left\{ \frac{r d (d + 2t + u)}{2 t \rho_t + u \rho_u} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{r^3 (d + 2t + u) 2t}{t (d + 2t + u) (t \rho_t + u \rho_u) + [(2t + d) \rho_t + u \rho_u] r^2} \right\} = \\ &= \frac{\mu_0 r^2 \Delta \phi \sin^2 \phi \Delta z \dot{B}}{\sin^2 \theta} \psi(r), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \psi(r) &= \frac{r d (d + 2t + u)}{2 t \rho_t + u \rho_u} + \quad /3/ \\ &\quad + \frac{r^3 (d + 2t + u) 2t}{t (d + 2t + u) (t \rho_t + u \rho_u) + [(2t + d) \rho_t + u \rho_u] r^2}. \end{aligned}$$

Интегрируя по ϕ , получим магнитный момент кольца:

$m = \int_0^{2\pi} dm$. Затем, просуммировав по r и разделив на элемент объема $\Delta V = \pi R_i^2 \Delta z / R_i$ - радиус мелкодисперсной проволоки/, с учетом того, что $\sin \theta = \frac{2\pi r}{4l_p}$, получим пере-

менную составляющую магнитного момента:

$$M_{\sim} = \frac{4\mu_0 \dot{B} l_p^2}{\pi^2 R_i^2} \sum_r \psi(r).$$

Полный магнитный момент твистированной проволоки можно записать в виде /3/:

$$M = M_0 + M_{\sim}, \text{ где } M_0 = \frac{2\mu_0 \lambda J_c d}{3\pi}$$

- намагничение СПН, λ - коэффициент заполнения, J_c - плотность критического тока,

$$M = M_0 \left(1 + a \frac{1}{\rho_e^I}\right), \text{ где } a = \frac{\dot{B} l_p^2}{\lambda J_c d}$$

$$\frac{1}{\rho_e^I} = \frac{6}{\pi R_i^2} \sum_r \psi(r). \quad /4/$$

Так как в данном случае СПН однородно распределены в нормальной матрице и $d \ll R_i$, в уравнении /4/ суммирование можно заменить интегрированием по r от 0 до

$$R_i: \sum_r \rightarrow \frac{1}{l} \int_0^{R_i} dr, \text{ где } l = d + 2t + u. \text{ Выражение /4/}$$

примет вид:

$$\frac{1}{\rho_e^I} = \frac{6}{\pi R_i^2} \frac{1}{l} \left[l k_A \int_0^{R_i} r dr + l \int_0^{R_i} \frac{r^3 dr}{k_C + k_B r^2} \right],$$

где

$$k_A = \frac{1}{\frac{2t}{d} \rho_t + \frac{u}{d} \rho_u}; \quad k_B = \left(1 + \frac{d}{2t}\right) \rho_t + \frac{u}{2t} \rho_u;$$

$$k_C = (d + 2t + u) \left(\frac{t}{2} \rho_t + \frac{u}{2} \rho_u\right)$$

$$\epsilon = \frac{k_C}{R_i^2 k_B} = \frac{(d + 2t + u)(t \rho_t + u \rho_u) t}{R_i^2 [(2t + d) \rho_t + u \rho_u]}$$

$$\frac{1}{\rho_e^I} = \frac{3}{\pi} \left\{ 2k_A + \frac{1}{k_B} \left[1 - \epsilon \ln \left(1 + \frac{1}{\epsilon}\right) \right] \right\}.$$

При условии $u \approx t \ll d \ll R_i$ и $\rho_t \ll \rho_u$, $\epsilon \ll 1$, так что эффективное удельное сопротивление нормальной матрицы, окружающей СПН, представляется в виде:

$$\frac{1}{\rho_e^I} = \frac{3}{\pi} \left[\frac{1}{\frac{t}{d} \rho_t + \frac{u}{2d} \rho_u} + \frac{1}{\left(1 + \frac{d}{2t}\right) \rho_t + \frac{u}{2t} \rho_u} \right]. \quad /5/$$

В качестве примера рассмотрим мелкодисперсную сверхпроводящую проволоку со следующими параметрами:

диаметр СПН $d = 10 \mu = 10 \cdot 10^{-6} \text{ м}$,
 толщина медного чехла $t = 2 \mu = 2 \cdot 10^{-6} \text{ м}$,
 толщина мельхиоровых перегородок $u = 1 \mu = 1 \cdot 10^{-6} \text{ м}$,
 $\rho_t = 2 \cdot 10^{-10} \Omega \text{ м (Cu)}$
 $\rho_u = 5 \cdot 10^{-8} \Omega \text{ м (Cu-Ni)}$
 по формуле /5/ $\rho_e^I = 22,3 \cdot 10^{-10} \Omega \text{ м}$.

Случай II. Однородное распределение СПН в медной матрице внутри кластеров, каждый из которых окружен мельхиоровой оболочкой.

Для упрощения расчета эффективного удельного сопротивления матрицы ρ_e^{II} кластеры шестиугольного сечения заменяются квадратными со стороной, равной D_4 , где D_4 определяется из площади сечения проволоки:

$$S_{пр} = \frac{\pi R_i^2}{4} = N_{кл} S_6 = N_{кл} \frac{\sqrt{3}}{2} (D_4 + u)^2. \quad /6/$$

Аналогично случаю I, сечение проволоки разбивается на тонкие кольца, каждое из которых состоит из слоя кластеров, разделенных мельхиоровыми перегородками, слоя меди с мельхиоровыми перегородками и слоя мельхиора толщиной u /см. рис. 3/. Рассматриваются токи J_w и J_v , значения которых определяются так же, как в случае I. J_w течет в слое кластеров, разделенных мельхиоровыми перегородками:

$$\dot{B} r \sin \phi \Delta z = J_w (\rho'' D_4 + \rho_u u) \frac{r \Delta \phi}{D_4 + u}$$

$$J_w = \frac{\dot{B} r \sin \phi (D_4 + u)}{\sin \theta (\rho'' D_4 + \rho_u u)}, \quad /7/$$

где ρ'' - эффективное удельное сопротивление медной матрицы с однородно распределенными в ней СПН /1/. J_v определяется из рассмотрения контура ОАСДВА'О', /рис. 2/, где в данном случае вместо СПН - кластеры.

$$\begin{aligned} \dot{B} r \sin \phi \Delta z = & J_v (D_4 \rho_t + u \rho_u) \frac{r \Delta \phi}{D_4 + u} + \\ & + \frac{\Delta J_v(\phi) t}{r \Delta \phi} (u \rho_u + D_4 \rho'' + t \rho_t) - \\ & - \frac{\Delta J_v(\phi + \Delta \phi) t}{r \Delta \phi} (u \rho_u + D_4 \rho'' + t \rho_t). \quad /8/ \end{aligned}$$

Первый член правой части соответствует току, текущему по кольцу, шириной t из меди с мельхиоровыми перегородками; второй и третий члены учитывают утечку тока вдоль радиуса через кластеры и мельхиоровый барьер. Выражение /8/, так же, как в случае I, сводится к дифференциальному уравнению второго порядка по J_v , решение которого записывается в виде:

$$J_v = \frac{\dot{B} r^3 \sin \phi (D_4 + u)}{\sin \theta [t(D_4 + u)(u \rho_u + D_4 \rho'' + t \rho_t) + (D_4 \rho_t + u \rho_u) r^2]} \quad /9/$$

Плотность продольного тока в данном случае будет:

$$J = \frac{D_4 J_w + 2 t J_v}{\sin \theta}.$$

Полностью повторяя вычисления предыдущего случая по определению магнитного момента, получим выражение для эффективного удельного сопротивления двухкомпонентной матрицы с мельхиоровыми перегородками между кластерами в следующем виде:

$$\frac{1}{\rho_e^{\text{II}}} = \frac{6}{\pi R_i^2} \sum_r \psi(r), \quad /10/$$

где

$$\begin{aligned} \psi(r) = & \frac{D_4 (D_4 + u) r}{\rho'' D_4 + \rho_u u} + \\ & + \frac{2 t r^3 (D_4 + u)}{t(D_4 + u)(u \rho_u + D_4 \rho'' + t \rho_t) + (D_4 \rho_t + u \rho_u) r^2} \end{aligned}$$

Переходим в /10/ от суммы к интегралу / $\sum_r \rightarrow \frac{1}{\ell} \int_0^{R_i} dr$ / , где $\ell = D_4 + u$ / , и получим:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho_e^{\text{II}}} = & \frac{6}{\pi R_i^2} \left[k_A \int_0^{R_i} r dr + \int_0^{R_i} \frac{r^3 dr}{k_C + k_B r^2} \right] = \\ & = \frac{3}{\pi} \left\{ 2 k_A + \frac{1}{k_B} \left[1 - \epsilon \ln \left(1 + \frac{1}{\epsilon} \right) \right] \right\}, \quad /11/ \end{aligned}$$

где

$$k_A = \frac{1}{\rho'' + \frac{u}{D_4} \rho_u}; \quad k_B = \frac{D_4 \rho_t + u \rho_u}{2 t}$$

$$k_C = \frac{1}{2} (D_4 + u)(u \rho_u + D_4 \rho'' + t \rho_t), \quad \epsilon = \frac{k_C}{R_i^2 k_B}.$$

Подставив значение (D_{4+u}) и ρ'' , и считая в первом приближении $\rho' = \rho_t$, получим:

$$\epsilon = \sqrt{\pi/2} \sqrt{3} N_{\text{кл}} (t/R_i) \ll 1,$$

так что в /11/ членом, содержащим ϵ , можно пренебречь. Тогда в окончательном виде выражение для эффективного удельного сопротивления представится в виде:

$$\frac{1}{\rho_e^{\text{II}}} = \frac{3}{\pi} \left\{ \frac{2}{\rho'' + \frac{u}{D_4} \rho_u + \frac{t}{D_4} \rho_t} + \frac{1}{\frac{D_4}{2t} \rho_t + \frac{u}{2t} \rho_u} \right\}.$$

Приведем пример расчета ρ_e^{II} для мелкодисперсного сверхпроводника со следующими параметрами:

диаметр проволоки 0,5 мм,
 $R_i = 240 \cdot 10^{-6}$ м.

Проволока состоит из 55 кластеров, в каждом из которых 19 СПН,

диаметр СПН $d = 10 \cdot 10^{-6}$ м,
 толщина слоя меди $t = 2 \cdot 10^{-6}$ м,
 толщина мельхиоровых перегородок $u = 1 \cdot 10^{-6}$ м,
 $\rho_u = 5 \cdot 10^{-8}$ Ом (Cu-Ni)
 $\rho_t = 2 \cdot 10^{-10}$ Ом (Cu)
 $\rho_t' = 7 \cdot 10^{-10}$ Ом, $\rho'' = \rho_t \frac{t}{t+d}$ /см.^{1/} /.
 D_4 определяем по формуле /6/:

$$D_{4+u} = \sqrt{\pi/2} N_{\text{кл}} \sqrt{3} R_i = 0,128 R_i.$$

$$D_4 = 31,7 \cdot 10^{-6} \text{ м.}$$

По формуле /12/
 $\rho_e^{\text{II}} = 8,4 \cdot 10^{-10}$ Ом.

Таким образом, из приведенных примеров следует, что введение в матрицу мелкодисперсного сверхпроводника мельхиоровых перегородок увеличило эффективное сопротивление матрицы по сравнению с медью $\rho \approx 2 \cdot 10^{-10}$ Ом/ в первом случае примерно в 10 раз, во втором - примерно в 5 раз.

Литература

1. И.Н. Гончаров, А. Никитиу, И.С. Хухарева. ОИЯИ 8-8302, Дубна, 1974.
2. M.N. Wilson. RPP/A89 (1972).
3. H. Brechna. Superconducting Magnet Systems, Technische Physik in Einzeldarstellungen Band 18, (1973), p. 255.

Рукопись поступила в издательский отдел
 13 января 1976 года.