

4994/2-76

ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

ДУБНА



K-12

13/411-76

P8 - 10003

Д.Кабат

МЕТОДИКА РАСЧЕТА ПАРАМЕТРОВ СВЕРХПРОВОДЯЩИХ
СЕКЦИОНИРОВАННЫХ СОЛЕНОИДОВ
С ВЫСОКОЙ ОДНОРОДНОСТЬЮ МАГНИТНОГО ПОЛЯ

1976

P8 - 10003

Д.Кабат *

**МЕТОДИКА РАСЧЕТА ПАРАМЕТРОВ СВЕРХПРОВОДЯЩИХ
СЕКЦИОНИРОВАННЫХ СОЛЕНОИДОВ
С ВЫСОКОЙ ОДНОРОДНОСТЬЮ МАГНИТНОГО ПОЛЯ**

Направлено в ЖТФ

* Электротехнический институт Словацкой академии наук, Братислава, ЧССР.

1. ВВЕДЕНИЕ

Сверхпроводящие соленоиды с высокой однородностью магнитного поля обычно выполняются в форме цилиндрических катушек с корректирующими обмотками на наружной поверхности (см. напр., /1-4/). При этом плотность тока во всем объеме обмотки одинакова. Размеры соленоида такой формы могут быть оптимизированы /1/ с точки зрения минимального расхода сверхпроводника для получения заданной величины индукции B_0 в центре соленоида при заданном внутреннем диаметре обмотки $2a_1$. При этом условие высокой однородности поля задано как однородность δ -й степени по терминологии Гарретта /5/. Известен также метод создания магнитного поля с высокой однородностью сверхпроводящим соленоидом простой цилиндрической формы с пониженной плотностью тока в средней части обмотки /6/. Разработаны численные методы расчета размеров обмотки соленоидов для создания поля заданной однородности (см., напр., /7-9/).

Повышение индукции в центре сверхпроводящего соленоида заданных размеров можно достичь делением его обмотки на секции с различной средней плотностью тока. Различная плотность тока в секциях может быть осуществлена следующими способами:

1. Намотка секций сверхпроводником постоянного сечения и раздельное питание секций.
2. Намотка секций сверхпроводниками различного сечения, их последовательное соединение и питание одинаковым током от одного источника.

Установить достаточно точное значение токов при раздельном питании секций для достижения высокой однородности поля практически невозможно. Для получения высокой временной стабильности поля необходимо закортить обмотку соленоида сверхпроводящей перемычкой. Во втором случае, при последовательном соединении всех секций, можно обойтись одной перемычкой, в отличие от первого случая, когда нужна сверхпроводящая перемычка для каждой секции.

В настоящей работе рассмотрен метод расчета секционированного на цилиндрические катушки сверхпроводящего соленоида, создающего магнитное поле высокой однородности. Различная средняя плотность тока в секциях достигается вторым способом.

2. СРАВНЕНИЕ СЕКЦИОНИРОВАННЫХ И НЕСЕКЦИОНИРОВАННЫХ СВЕРХПРОВОДЯЩИХ СОЛЕНОИДОВ

Разделим цилиндрический соленоид с прямоугольным сечением обмотки на N коаксиальных цилиндрических секций так, чтобы наружные размеры соленоида ($2a_1$, $2a_2$; $2b$) не изменились. Предполагаем для всех сверхпроводников одинаковую зависимость средней по эффективному сечению провода в обмотке критической плотности тока от индукции магнитного поля $j_c - B$:

$$j_c = j_{c0} - m_j B, \quad (1)$$

$$m_j = \left| \frac{\partial j_c}{\partial B} \right|_{B_x}. \quad (1a)$$

Предполагаем, что максимальное значение индукции в обмотке соленоида равно значению индукции в центре соленоида: $B^{\max} = B_0$. При критическом токе соленоида предполагаем в каждой секции критическую среднюю плотность тока.

Методом постепенного деления обмотки можно показать, что максимальная индукция в центре соленоида, разделенного на N коаксиальных цилиндрических секций, достигается, если:

$$k_{j1} = k_{j2} = \dots = k_{jn} = \dots = k_{jN} = K_j / N, \quad (2)$$

где символом k_{jn} обозначена вспомогательная величина на n -ой секции, причем n - номер секции, если начинать счет с наружной:

$$k_{jn} = a_{1n} F(\alpha_n, \beta_n) = a_{1n} \mu_0 \beta_n \ln \frac{\alpha_n + \sqrt{\alpha_n^2 + \beta_n^2}}{1 + \sqrt{1 + \beta_n^2}}, \quad (2a)$$

$\alpha_n = a_{2n} / a_{1n}$, $\beta_n = b / a_{1n}$. Символом K_j обозначена величина k_j для неразделенного соленоида (2a₁, 2a₂, 2b).

Критическая средняя плотность тока в секциях будет достигнута при оптимальных сечениях сверхпроводников. Их эффективные сечения можно определить, исходя из равенства критических токов секций, по формуле:

$$A_{efn-1} = \frac{1}{1 + m_j K_j / N} A_{efn}. \quad (3)$$

Индукцию в центре секционированного соленоида при выполнении условий (1), (2), (3) можно найти из уравнения:

$$B_{0cN}^{\max} = \sum_{n=1}^N k_{jn} j_{cn} = \frac{j_{c0}}{M_j} \left[1 - \left(\frac{1}{1 + m_j K_j / N} \right)^N \right]. \quad (4)$$

Для $N \rightarrow \infty$:

$$B_{0c\infty}^{\max} = \frac{j_{c0}}{M_j} \left[1 - \frac{1}{\exp(m_j K_j)} \right]. \quad (5)$$

Приняв относительное, по сравнению с несекционированным соленоидом одинаковых внешних размеров, повышение индукции в центре соленоида за счет секционирования обмотки на $N \rightarrow \infty$ секций $(B_{0c\infty}^{\max} - B_{0c}) / B_{0c}$ за 100%, получаем при $N=3$ $(B_{0c3}^{\max} - B_{0c}) / B_{0c} = 60\%$. При таком количестве секций ($N=3$) конструкция обмотки довольно проста, а повышение индукции достаточно велико.

3. ФОРМА ОБМОТКИ СЕКЦИОНИРОВАННОГО СОЛЕНоиДА С ВЫСОКОЙ ОДНОРОДНОСТЬЮ МАГНИТНОГО ПОЛЯ

Обмотка соленоида состоит из двух частей: основной (высота $2b_1$ - см. рис. 1) и корректирующей. Основную часть разделим на 3 секции. Для того, чтобы деление основной обмотки не теряло смысла, необходимо соблюдение следующих условий:

а) Объем сверхпроводника в основной катушке должен быть больше, или, по крайней мере, равен объему сверхпроводника в корректирующих катушках.

б) Критические токи во всех секциях должны быть одинаковы или близки критическому току соленоида.

Условие а) можно выполнить тем лучше, чем выше плотность тока в корректирующих катушках. Предполагаем, что вследствие высокой однородности поля максимальное значение индукции на внутренней поверхности корректирующих катушек близко значению индукции в центре соленоида. Оба условия можно выполнить путем разделения корректирующей обмотки на две цилиндрические секции. Из практических соображений (минимальный набор сверхпроводников различного сечения) выберем для намотки секций корректирующей обмотки те же сверхпроводники, которые применялись для намотки внутренней и наружной секций основной обмотки.

4. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФОРМУЛИРОВКА ЗАДАЧИ

При расчете обмотки соленоида исходим из следующих заданных требований:

А. Достижение определенной величины индукции в центре B_0 при минимальном расходе сверхпроводника.

Б. Создание магнитного поля с однородностью 6 -й степени по терминологии Гарретта^{/6/}.

В. Достижение заданной однородности поля на определенном участке оси соленоида.

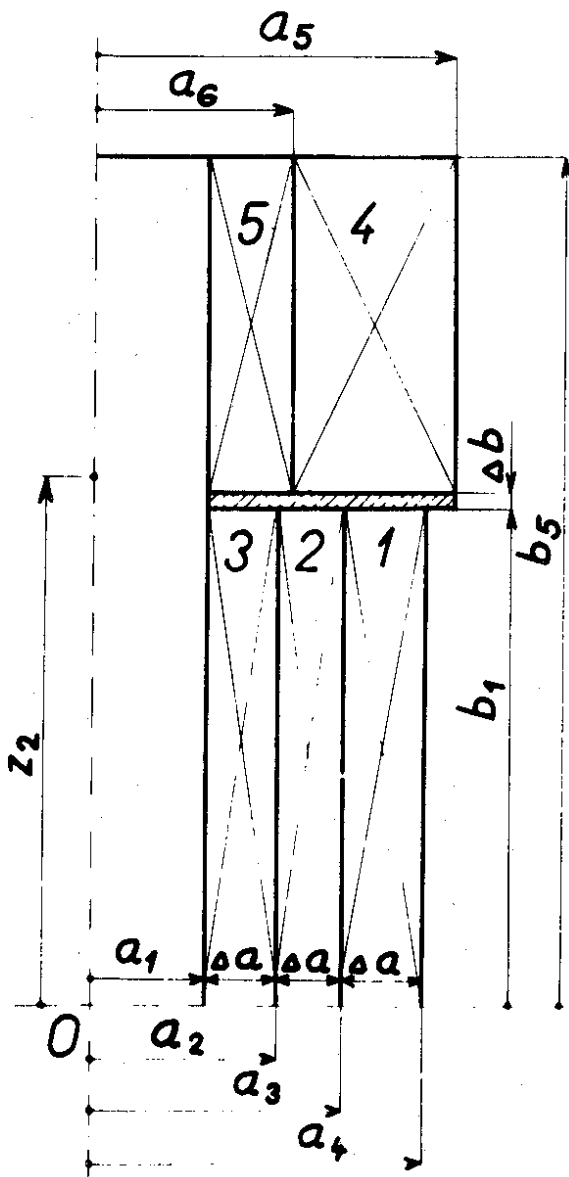


Рис. 1. Форма обмотки сверхпроводящего секционированного соленоида с высокой однородностью магнитного поля.

Требование Б. соответствует двум уравнениям, так как в степенном ряду для расчета индукции на оси соленоида^{/5/} необходимо, чтобы 2-й и 4-й члены были равны нулю.

Условием достижения максимальной индукции в центре секционированного соленоида (основной обмотки в нашем случае) является равенство значений вспомогательной величины k_{jn} для всех секций.

При расчете предполагаем отсутствие ферромагнитных цепей и считаем среду линейной, что позволяет применить принцип суперпозиции. При секционировании соленоида длиной $2b \rightarrow \infty$ это условие обозначает одинаковую толщину секций, так как

$$B_{0cN} = \sum_{n=1}^N k_{jn} \cdot j_{cn} = \sum_{n=1}^N \mu_0 j_{cn} \Delta a, \quad (6)$$

где $k_{jn} = \mu_0 \Delta a$.

Чем высота обмотки соленоида меньше, тем при одинаковой толщине обмоток секций ($\Delta a = \text{конст.}$) больше отступаем от условия достижения B_{0cN}^{max} (2). Например, для $2b \geq 20$ см относительное понижение индукции в центре с учетом типичной j_c - В характеристики сверхпроводников NbTi меньше 0,01%. С учетом этого можно математически задачу облегчить тем, что предположим одинаковыми толщины секций основной обмотки.

С целью применения выражения для расчета индукции магнитного поля на оси соленоида в виде суммы степенных рядов^{/5/} от отдельных секций обмотки разделим реальную обмотку на фиктивные цилиндрические катушки с постоянной средней плотностью тока так, чтобы у всех фиктивных катушек был одинаковый внутренний диаметр обмотки $2a_1$. Параметры фиктивных катушек (см. обозначения на рис. 1) показаны в табл. 1.

Сформулируем условия расчета размеров обмотки соленоида в виде системы уравнений:

$$\begin{aligned}
B_{0cN} &= \sum_{n=1}^7 \Delta B_{0cN} = a_1 \sum_{n=1}^7 [j_n F(\alpha_n, \beta_n)], \\
\sum_{n=1}^7 [j_n E_2(\alpha_n, \beta_n) F(\alpha_n, \beta_n)] &= 0, \\
\sum_{n=1}^7 [j_n E_4(\alpha_n, \beta_n) F(\alpha_n, \beta_n)] &= 0, \\
\frac{\sum_{n=1}^7 \{j_n [(\beta_n - \xi_2) G(\alpha_n, \beta_n - \xi_2) + (\beta_n + \xi_2) G(\alpha_n, \beta_n + \xi_2)]\}}{2 \sum_{n=1}^7 [j_n \beta_n G(\alpha_n, \beta_n)]} &= \frac{B}{B_0} \Big|_{z_2}.
\end{aligned} \tag{7}$$

Таблица 1

Фиктивная катушка	Внутренний радиус обмотки	Наружный радиус обмотки	Высота обмотки	Средняя плотность тока
1	a_1	a_4	$2b_1$	j_1
2	a_1	a_3	$2b_1$	$-(j_1 - j_2)$
3	a_1	a_2	$2b_1$	$-(j_2 - j_3)$
4	a_1	a_5	$2b_5$	j_1
5	a_1	a_5	$2(b_1 + \Delta b)$	$-j_1$
6	a_1	a_6	$2b_5$	$-(j_2 - j_3)$
7	a_1	a_6	$2(b_1 + \Delta b)$	$j_2 - j_3$

В системе уравнений (7) индексом n обозначена n -ая фиктивная катушка. $\alpha = a_2/a_1$ и $\beta = b/a_1$ - относительные размеры; $F(\alpha, \beta)$ - коэффициент формы (см. (2а)); $E_2(\alpha, \beta)$ и $E_4(\alpha, \beta)$ - коэффициенты степенного ряда (см., напр., /12/); $\xi_2 = z_2/a_1$, где $2z_2$ - длина участка оси соленоида, на котором должна быть заданная неоднородность поля $\leq B/B_0$. Символом $G(\alpha, \beta)$ обозначено выражение:

$$G(\alpha, \beta) = \ln \frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{1 + \sqrt{1 + \beta^2}}. \tag{7a}$$

5. МЕТОД РЕШЕНИЯ

Для расчета размеров обмотки секционированного соленоида с высокой однородностью магнитного поля (р и с. 1) составлена программа для ЭВМ на ФОРТРАНе. Система уравнений (7) решается численно с помощью обобщенного правила ложного положения.

Программа, которая находит решения для заданных величин $a_1, B_0, A_{ef}, \Delta b, B/B_0|z_2$ и j_c - В характеристики сверхпроводников, состоит из двух частей. Из-за того, что количество неизвестных 5 (см. рис. 1): $\Delta a, a_5, a_6, b_1, b_5$, а количество уравнений только 4 (7), расчет разделен на два этапа:

На первом этапе предполагается, что корректирующая обмотка не разделена и намотана из того же сверхпроводника, что и наружная секция основной обмотки. Решением системы уравнений (7) определяются размеры Δa и b_1 и размеры неразделенной корректирующей обмотки a'_5 и b'_5 .

На втором этапе, исходя из уже рассчитанных размеров основной части обмотки, определяют размеры секционированной корректирующей обмотки a_5, a_6, b_5 (см. рис. 1) так, чтобы была достигнута однородность 6-й степени и загрузка сверхпроводников шла как можно равномернее. Сечения сверхпроводников в секциях основной обмотки выбираются при помощи формулы (3) так, чтобы их критические токи были одинаковы. Для равномерной загрузки сверхпроводников необходимо подобрать "оптимальный" размер a_6 , при котором, однако, соблюдаются заданные условия однородности поля. Алгоритм при этом следующий: для каждой величины размера a_6 из заданного множества определяются размеры a_5 и b_5 из условия достижения однородности поля 6-й степени:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^7 [j_n E_2(\alpha_n, \beta_n) F(\alpha_n, \beta_n)] &= 0, \\ \sum_{n=1}^7 [j_n E_4(\alpha_n, \beta_n) F(\alpha_n, \beta_n)] &= 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Из множества рассчитанных таким образом величин a_6 выбирается такая, при которой лучше (равномернее) загружены сверхпроводники.

6. ЧИСЛЕННЫЙ ПРИМЕР

В ЛВЭ ОИЯИ автором выполнен расчет параметров соленоида, учитывающий наличие следующего набора многожильных ниобий-титановых проводов с диаметрами 0,70; 0,85; 1,20 мм и коэффициентом заполнения ~ 50%. Характеристика $j_c - B$ (пересчитана на сечение одного витка обмотки A_{ef}) имеет $j_c = (9,3 - 0,95 B) \cdot 10^8$ [А/м², Т].

Форма обмотки соленоида показана на рис. 1; основные параметры: $2a_1 = 4,4$ см, $B_{0c} = 8,4$ Т, в шаровом пространстве диаметром 10 мм около центра соленоида должна быть получена однородность поля $< 1 \cdot 10^{-5}$, а на участке оси соленоида длиной $z_2 = \pm 100$ мм однородность $\leq 1\%$. Эффективные сечения сверхпроводников показаны в табл. 2; величина $\Delta b = 3$ мм (ширина ребра каркаса). Характеристики $I_c - B$ сверхпроводников линеаризуем в предполагаемой области в виде $I_c = I_{c0} - m_1 B$. Значения I_{c0n} и m_{1n} даны в табл. 2.

Таблица 2

Диаметр сверхпроводника [мм]	A_{ef} [мм ²]	I_{c0} [А]	$m_1 = \partial I_c / \partial B _{B_x}$ [А/Т]
0,70	0,64	595	60,6
0,85	0,93	830	84,6
1,20	1,83	1780	181,8

Результаты расчета следующие: $\Delta a = 13,2$ мм, $b_1 = 94,4$ мм, $a_5 = 69,5$ мм, $b_5 = 161,0$ мм, $a_6 = 38,0$ мм.

Загружение сверхпроводников в отдельных секциях $\eta_n = I_{cM} / I_{cn}$ при критическом токе соленоида $I_{cM} =$

= 155 А: $\eta_1 = 71,5\%$, $\eta_2 = 90,5\%$, $\eta_3 = \eta_5 = 95,5\%$, $\eta_4 = 100\%$. Неодинаковые критические токи в секциях получились из-за неоптимальности величин A_{efn} . Индукция в центре соленоида при критическом токе $B_{0c} = 8,43$ Т.

Чтобы оценить экономический эффект по расходу сверхпроводника в данном примере, сравним рассчитанный соленоид с оптимизированным соленоидом аналогичной формы и постоянной плотностью тока во всем объеме обмотки ^{/1/}. Авторы ^{/1/} при расчете не задавали дополнительного требования однородности поля на определенном участке оси соленоида. Соленоид, рассчитанный по ^{/1/}, должен иметь объем обмотки ~7000 см³. Соленоид, рассчитанный вышеуказанным методом, имеет объем обмотки 3840 см³. Применение разработанного метода позволило снизить в данном случае расход сверхпроводника на ~45^о.

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Известный способ повышения индукции в центре соленоида данных размеров за счет секционирования обмотки на цилиндрические секции с различной средней плотностью тока применен при расчете сверхпроводящего соленоида с высокой однородностью магнитного поля.

Расчет исходит из теории Гарретта ^{/5/}, по которой составляющие индукции магнитного поля цилиндрических систем можно выразить в форме степенного ряда с полиномами Лежандра и коэффициентами этого ряда, являющимися функциями геометрии системы.

Рассмотрен вопрос выбора размеров обмотки секционированного соленоида с высокой однородностью магнитного поля относительно простой формы (см. рис. 1). Задача расчета сформулирована математически и представлен метод ее решения. Приведен численный пример, в котором продемонстрирован экономический эффект по расходу сверхпроводника.

ЛИТЕРАТУРА

1. B.Girard, M.Sauzade. Nucl.Instr. and Meth., 25, 269, 1964.
2. J.Jelínek, I.Doležal. Czechosl.Journ. Phys., sec. A, 22, 331, 1972.
3. L.Cesnak, J.Kokavec, D.Kabát, V.Pešta. Czechosl. Journ.Phys., sec. A,22,234, 1972.
4. L.Cesnak, D.Kabát, J.Kokavec, L.Krem-paský. Elektrotechnický obzor, 64,1,3,1975.
5. M.W.Garrett.Journ.Appl.Phys.,22, 1091, 1951.
6. L.Cesnak, D.Kabát.Journ.Phys.E: Scient.Instr, 5, 944, 1972.
7. Е.П.Жидков, Л.Л.Зиновьева, Н.Б.Рубин. ОИЯИ, Р9-7580, Дубна, 1973.
8. Л.Александров, Е.П.Жидков, Л.Л.Зиновьева. ОИЯИ, Р11-8059, Дубна, 1973.
9. Е.Ю.Клименко, В.К.Ожогина. Препринт ИАЭ, 2511, Москва, 1975.
10. I.E.C.Williams.Rev.Scient.Instr., 37,8, 1030, 1966.
11. В.Б.Зенкевич, В.В.Сычев. Магнитные системы на сверхпроводниках. Наука, Москва, 1972, 198.
12. Д.Монтгомери. Получение сильных магнитных полей с помощью соленоидов, пер. с англ. Наука, Москва, 1971, 265.

Рукопись поступила в издательский отдел
10 августа 1976 года.