



ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

98-159

P7-98-159

В.К.Лукиянов, В.П.Пермяков, Ю.В.Чубсов

МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭЙКОНАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ
УПРУТОГО РАССЕЯНИЯ
В ПОЛЕ ПОТЕНЦИАЛА ВУДСА—САКСОНА

Направлено в журнал «Известия РАН, серия физическая»

1998

В работе [1] было показано, что ядро-ядерное рассеяние при энергиях от нескольких десятков до сотен МэВ на нуклон можно исследовать в рамках высокоэнергетического приближения (ВЭП) [2, 3], когда выполняются условия $kR \gg 1$, $E \gg |U|$. В ряде случаев для простого вида потенциалов взаимодействия с его помощью удастся получить аналитические выражения для амплитуд рассеяния. Их использование весьма полезно для исследования физики ядерных взаимодействий, так как зависимости от параметров потенциалов прослеживаются в явном виде. В то же время до сих пор это не удавалось сделать для наиболее типичного в ядерной физике потенциала Вудса — Саксона:

$$U(r) = (V_0 + iW_0)f_N(r), \quad f_N(r) = \frac{1}{1 + \exp \frac{r-R}{a}}. \quad (1)$$

Данная работа посвящена решению этой задачи.

Приведем некоторые исходные выражения ВЭП. Согласно [4] амплитуда ВЭП рассеяния имеет вид

$$f(\theta) = -\frac{m}{2\pi\hbar^2} [t_{(+)}(q) - t_{(-)}(q)], \quad (2)$$

где $q = 2k \sin(\theta/2)$, θ - угол рассеяния. Выражения "ближней" $t_{(+)}$ и "дальней" $t_{(-)}$ -амплитуд представляются как

$$t_{(\pm)}(\gamma) = 2\pi \frac{\hbar v}{q} \gamma J^{(\pm)}(\gamma), \quad \gamma = -i \frac{V_0 + iW_0}{\hbar v}. \quad (3)$$

Здесь

$$J^{(\pm)} = \int_0^{\infty} r dr f_N(r) e^{g_{(\pm)}(r, \gamma)}, \quad (4)$$

$$g_{(\pm)}(r, \gamma) = \pm iqr + \gamma I(r), \quad (5)$$

$$I(b) = 2 \int_0^{\infty} f_N(\sqrt{b^2 + \lambda^2}) d\lambda, \quad b = r \cos \frac{\theta}{2}, \quad (6)$$

где b - прицельный параметр.

Видно, что из-за условия $kR \gg 1$ интеграл (4) сильно осциллирует, что представляет значительные трудности для его вычисления. Чтобы от них избавиться, приходится выходить на комплексную плоскость r или b , где можно выбрать такие контуры интегрирования, на которых эти осцилляции либо исчезают, либо значительно ослаблены. Так, в

работ [1, 5] было разработано так называемое двухполосное приближение, когда контур интегрирования выбирался охватывающим, соответственно, для $t_{(+)}$ и $t_{(-)}$ — амплитуд первый и четвертый квадранты, а при их расчете учитывались вклады только двух вычетов в ближайших к действительной оси полюсах $r_1^\pm = R \pm i\pi a$ подынтегральной функции $f_N(r)$ (1). При этом эйкональный интеграл $I(b)$ вычислялся приближенно с использованием вместо ферми-распределения f_N сначала Θ -функции [1], а затем — трапециодальной [5]. Это накладывает ограничения на углы рассеяния, так как такие приближения реального потенциала при выходе на комплексную плоскость r оказываются не всегда приемлемыми в области основного вклада. Вместе с тем, в принципе, для случая реалистического потенциала Вудса — Саксона эйкональный интеграл (6) можно вычислить в явном виде [6]. Он выражается в виде бесконечной суммы

$$I(b) = 2R - 2\pi i a \sum_{p=1}^{\infty} \left(\frac{r_p^+}{\lambda_p^{(+)}} + \frac{r_p^-}{\lambda_p^{(-)}} \right), \quad (7)$$

где $\lambda_p^{(\pm)} = \sqrt{(r_p^{(\pm)})^2 - b^2}$, $r_p^\pm = R \pm i\pi a(2p - 1)$ с $p=1, 2, 3, \dots$. При этом каждый член суммы имеет свои особенности в точках r_p^\pm . Кроме того, расчет (7) должен проводиться при выполнении условия

$\text{Im } \lambda_p^{(\pm)} \geq 0$. Все это сильно ограничивает возможности использования данного выражения в аналитических расчетах амплитуды рассеяния.

Однако в предыдущей работе [7] при вычислении быстро осциллирующего интеграла (4) методом перевала выяснилось, что, во-первых, точки основного вклада (перевала) лежат возле особенностей $b = r \cos(\theta/2) = r_1^{(\pm)} = R \pm i\pi a$ только первого слагаемого суммы (7), где остальные слагаемые ведут себя весьма плавно. И, во-вторых, по этой же причине в уравнении на точки перевала $g'_{(\pm)}(r_s) = 0$, вкладом производных от членов суммы (7) с $p > 1$ можно пренебрегать. Это последнее обстоятельство сильно упрощает уравнение и позволяет найти соответствующие точки перевала $r_s = r_s(\theta)$ в явном виде (см. также [8]). В качестве примера на рис. 1 и 2 показано поведение реальных и мнимых частей интеграла $I(b)$ для $R = 7,05$ фм, $a = 0,5$ фм и $\theta = 15^\circ$ на комплексной плоскости r , где пунктиром изображено его поведение с учетом только первого члена суммы (7), а сплошной — точный численный расчет $I(b)$ по формуле (6). Эти кривые, по существу, просто сдвинуты друг относительно друга, и все характерные изменения (7)

определяются только одним слагаемым с $p = 1$.

Далее, обратимся к стандартному ответу, получаемому в методе перевала при расчете интеграла (4):

$$J^{(\pm)}(r_s) = -r_s f_N(r_s) e^{g^{(\pm)}(r_s)} \sqrt{-2\pi/g''_{(\pm)}(r_s)}. \quad (8)$$

Видно, что его абсолютная величина зависит в основном от фазы в экспоненте $\exp\{g_{(\pm)}(r_s)\}$, а значит от того, насколько точно удастся ее вычислить. Что же касается второй производной, то она с достаточной точностью определяется только первым слагаемым в сумме (7).

Таким образом, приходим к выводу, что при нахождении седловой точки r_s определяющую роль в эйкональном интеграле $I(b)$ для вудсаксоновского потенциала играет первое слагаемое с $p = 1$ в сумме (7). А остальные слагаемые с $p > 1$ важны, чтобы правильно рассчитать абсолютную величину амплитуды рассеяния. Из-за плавного поведения в области основного вклада на комплексной плоскости их можно попытаться смоделировать в более простой форме по сравнению с тем, как они представлены в (7). Ниже предлагается такого вида модельное выражение для эйконального интеграла (6), которое достаточно хорошо описывает поведение его реальной и мнимой частей в зависимости от комплексного b в области ближайших к реальной оси особенностей $b = R \pm i\pi a$

$$I(b) = 2R - 2\pi i a \left(\frac{r_1^+}{\lambda_1^{(+)}} + \frac{r_1^-}{\lambda_1^{(-)}} \right) + \Delta(b). \quad (9)$$

Здесь

$$\Delta(b) = \Delta_R(b) + i\Delta_I(b), \quad b = b_1 + ib_2. \quad (10)$$

$$\Delta_R = A_R(b_1 - B_R) + C_R b_2^2 (b_1 - D_R), \quad (11)$$

$$\Delta_I = A_I \frac{b_2^4}{a_I + b_2^4} (b_1 - B_I)^2 - C_I (b_2 - D_I), \quad (12)$$

$$A_R = 1,032(a - 1,62), \quad B_R = 2,517, \\ C_R = -0,016(R - 3,656), \quad D_R = 0,917R, \quad (13)$$

$$A_I = 0,94(0,628 - a)(R - 2,826), \\ a_I = 10,64, \quad B_I = 0,21(a + 3,783)(R + 0,071), \\ C_I = 0,128(1,466 - a)(R + 3), \quad D_I = 0,282. \quad (14)$$

Это выражение для Δ обеспечивает достаточную точность в пределах изменения значений радиуса потенциала $R \sim 6 - 8$ фм и параметра диффузности $a \sim 0,6 - 0,8$ фм, что видно из рис.1 и 2, где звездочками дан приближенный расчет по формулам (9)-(14). Более общее представление о точности предложенной параметризации можно получить из рис.3 и 4, где показаны поверхности отклонений реальной и мнимой частей модельного выражения эйконального интеграла от точного

$$\delta = \Delta - 2\pi ia \sum_{p=2} \left(\frac{r_p^+}{\lambda_p^{(+)}} + \frac{r_p^-}{\lambda_p^{(-)}} \right) \quad (15)$$

в зависимости от изменения прицельного параметра b на комплексной плоскости. Видно, что в окрестности особой точки $b = R \pm i\pi a$ (здесь $R = 760$ фм, $a = 066$ фм) эти отклонения не выходят за пределы 10%.

Теперь проанализируем возможности предложенного модельного представления эйконального интеграла I в описании амплитуд и сечений рассеяния. В качестве тестовой задачи рассмотрим рассеяние двух ядер массы 17 и 90 при энергии $E=1435$ МэВ в поле потенциала Вудса — Саксона с геометрическими параметрами $R=7,05$ фм и $a=0,5$ фм, параметры V_0 и W_0 будут изменяться. На рис.5 показаны расчеты "ближней" $|J^{(+)}|$ и "дальней" $|J^{(-)}|$ - амплитуд: точные расчеты выполнены численным интегрированием — сплошные линии, пунктир — расчеты по формуле (8) методом перевала с использованием точного выражения (7) для эйконального интеграла, звездочками представлен расчет методом перевала, когда $I(b)$ представлен модельным выражением (9).

Здесь приведены три типичных случая: (а) рефракция (отсутствие поглощения, $V_0=-50$ МэВ, $W_0=0$), (б) оптическая модель ($V_0=-50$ МэВ, $W_0=-25$ МэВ) и (в) сильное поглощение ($V_0=-1$ МэВ, $W_0=-50$ МэВ). Обнаруживается следующая картина: в первых двух случаях наличие действительной части потенциала приводит к тому, что при сравнительно небольших углах θ "ближняя" амплитуда $J^{(+)}$ на один-два порядка превышает "дальнюю" $J^{(-)}$. При некотором угле $\theta = \theta_e$ эти амплитуды становятся равными друг другу, сам угол θ_e "точки пересечения" возрастает по мере роста поглощения W_0 и слабо зависит от V_0 . Так, в варианте (б) ("оптическая модель") амплитуда $J^{(+)}$ при $\theta_e \simeq 20^\circ$ на три порядка меньше своего значения при $\theta = 5^\circ$. И всюду здесь она примерно на порядок величины превышает $J^{(-)}$ и практически совпадает с тем, что дает для нее расчет с помощью модельного эйконального

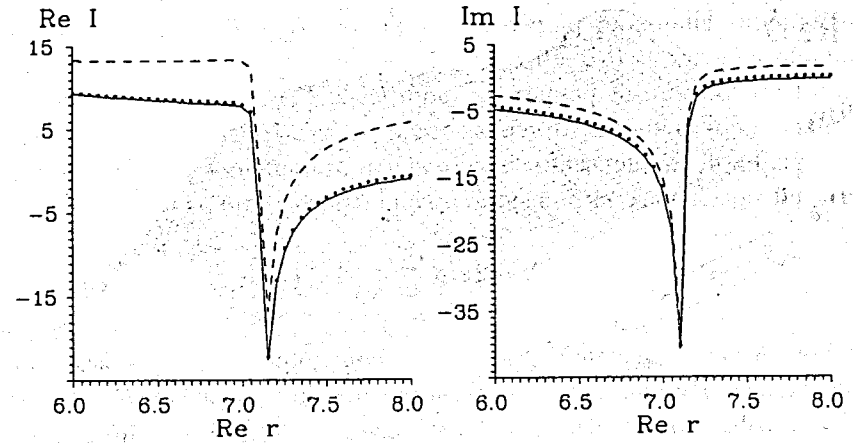


Рис.1. Поведение Re и Im частей эйконального интеграла $I(b)$ в зависимости от $Re r$ при $\theta = 15^\circ$, $R = 7,05$ фм, $a = 0,5$ фм. $Im r = \pi a$. Сплошные линии - точный численный расчет по формуле (6), пунктир - расчет с учетом только первого члена $p = 1$ в сумме (7), звездочки - модельная аппроксимация (9)

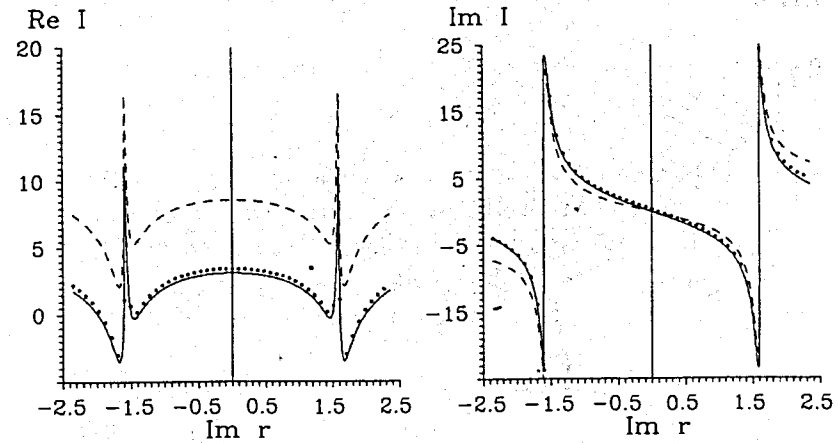


Рис.2. То же, что и на рис.1, но в зависимости от $Im r$ при $Re r = R$

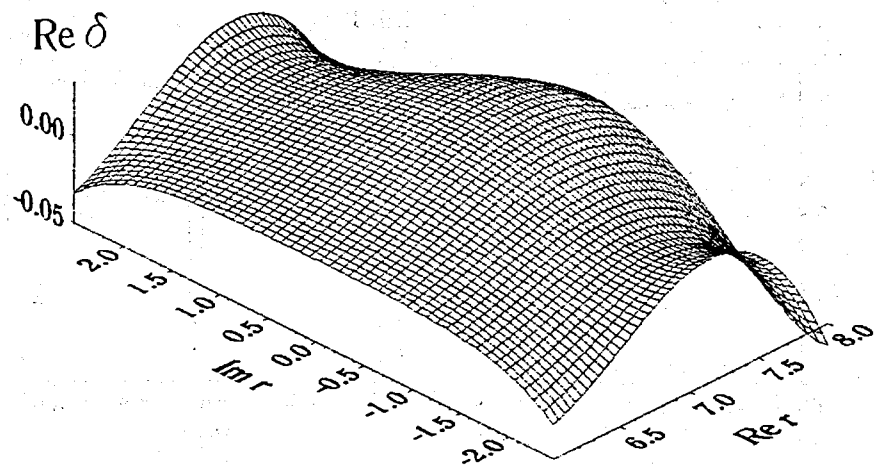


Рис.3 Поверхность отклонения (15) реальной $Re \delta$ части модельного выражения эйконального интеграла (9) от точного (7) в зависимости от изменения прицельного параметра b на комплексной плоскости при $R = 7,0$ фм, $a = 0,6$ фм

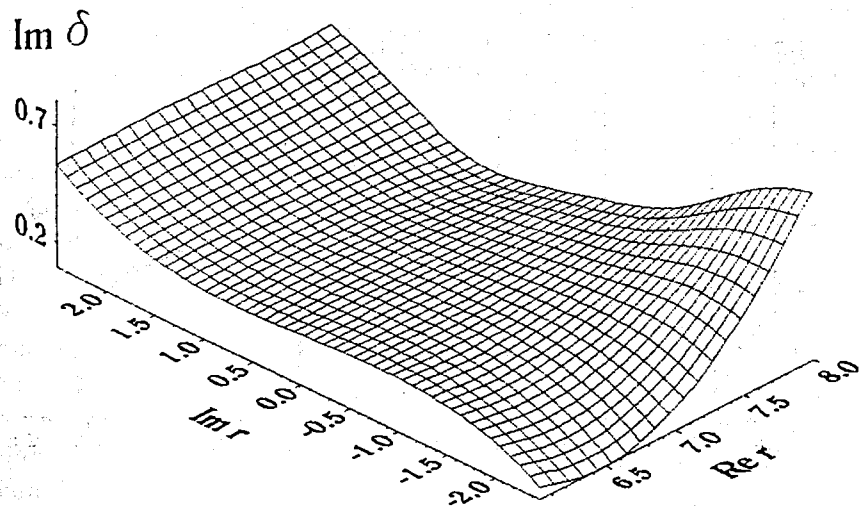


Рис.4. То же, что и на рис.3, но для мнимой части $Im \delta$

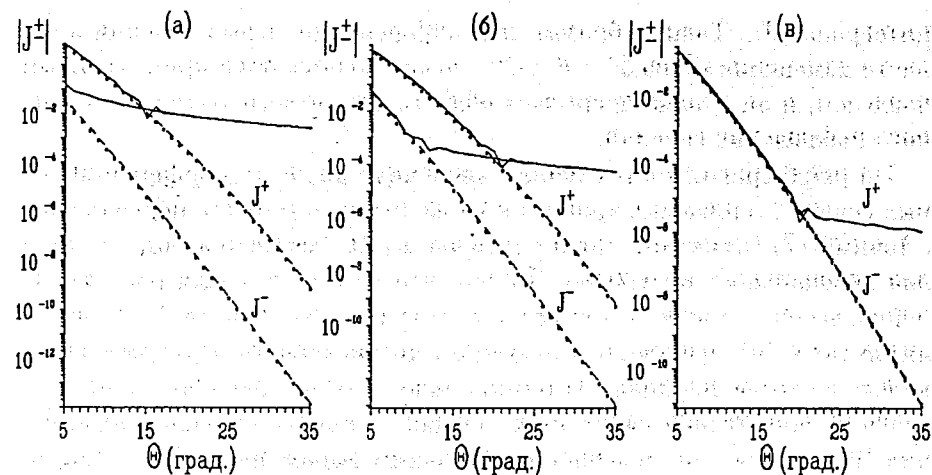


Рис.5. Поведение "ближней" $J^{(+)}$ и "дальней" $J^{(-)}$ амплитуд: (а) $V_0=50$ МэВ, $W_0=0$; (б) $V_0=50$ МэВ, $W_0=-25$ МэВ; (в) $V_0=-1$ МэВ, $W_0=-50$ МэВ. Сплошные линии - точный численный расчет (4), пунктир - расчет методом перевала по формуле (8) с использованием точного выражения (7) для $I(b)$, звездочки - расчет методом перевала, когда $I(b)$ представлен выражением (9).

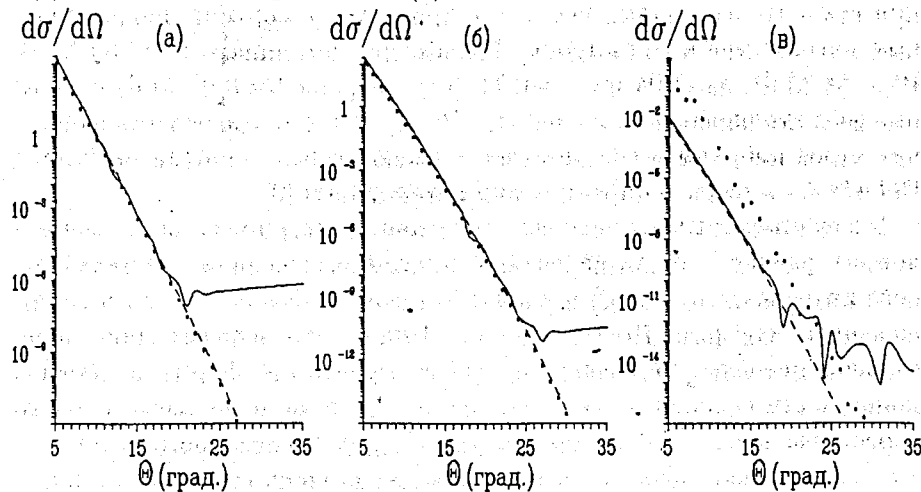


Рис.6. Дифференциальные сечения рассеяния (в фм²/ср): (а) $V_0=50$ МэВ, $W_0=0$; (б) $V_0=50$ МэВ, $W_0=-25$ МэВ; (в) $V_0=-1$ МэВ, $W_0=-50$ МэВ. Сплошные линии - точный численный расчет, пунктир - расчет методом перевала с точным выражением (7) для эйконального интеграла, звездочки - расчет методом перевала с модельным эйконалом (9)

интеграла (9). Таким образом, для дифференциальных сечений в области изменения углов $5^\circ < \theta < 20^\circ$ можно пользоваться предложенным подходом, и он вполне покрывает область возможного экспериментального наблюдения сечений.

На рис.6 сравниваются точные численные расчеты дифференциальных сечений (сплошные кривые) и их же расчеты методом перевала как с точным (7) (пунктир), так и с модельным (9) (звездочки) выражением для эйконального интеграла. Видно, что во всех случаях расчеты по перевальной методике с точным и модельным эйконалами I для вариантов (а) и (б) совпадают с результатами численного интегрирования вплоть до углов, начиная с которых наклон кривых дифференциальных сечений качественно изменяется. Однако в случае сильного поглощения (в) сечение, вычисленное с модельным выражением (9), сдвинуто по абсолютной величине относительно расчета по перевальной методике с использованием точного выражения эйконала. Следует отметить, что при выбранных параметрах потенциала основной вклад в дифференциальное сечение при относительно малых углах рассеяния определяется в основном амплитудой $t_{(+)} \sim J^{(+)}$.

В качестве другого примера на рис.7 показано поведение сечения при относительно малых углах, где проявляется картина дифракционных максимумов и минимумов. Параметры потенциала ($V_0 = -60$ МэВ, $W_0 = -54$ МэВ, $a_0 = 1,04$ фм, $a = 0,71$ фм), энергия $E = 1504$ МэВ и атомные веса сталкивающихся ядер $A_1 = 16$, $A_2 = 60$, а также область изменения углов выбраны в соответствии с имеющимися данными рассеяния $^{16}\text{O} + ^{60}\text{Ni}$ и подогнанным под них потенциалом [9].

Здесь представлены расчеты: численное интегрирование (сплошная линия), расчет методом перевала с точным выражением для эйконального интеграла (пунктир) и расчет методом перевала с модельным выражением для фазы (9) (звездочки). Видно, что использование перевальной методики позволяет хорошо воспроизвести форму и порядок зависимости сечения от угла рассеяния. Если же использовать только первое слагаемое $p = 1$ в выражении (7) для эйконального интеграла $I(b)$, то это, как показано в [7], приводит к очень сильному отличию абсолютной величины сечения, примерно на четыре порядка, от его точного значения.

В заключение обратим внимание на то, что использованное нами приближенное решение уравнения на седловую точку [7] с учетом только $p = 1$ члена в (7) не меняет общих выводов. Проверка показывает, что

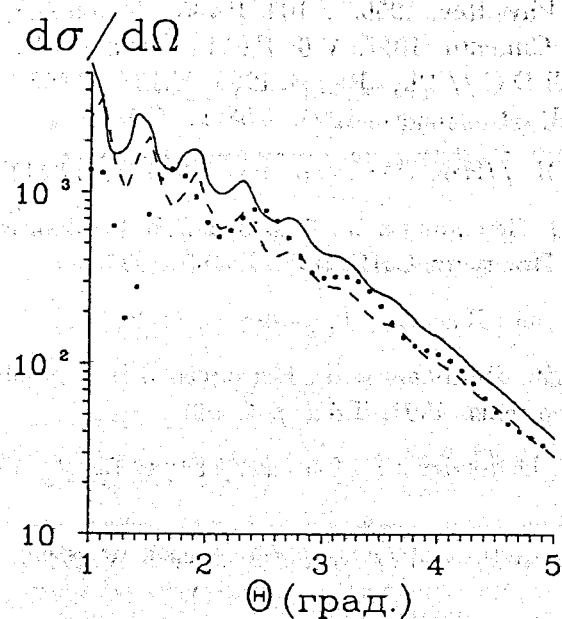


Рис.7. То же, что и на рис.6, но для рассеяния $^{16}\text{O} + ^{60}\text{Ni}$ с реалистическими параметрами потенциала из [9]

расчет амплитуд рассеяния и, соответственно, дифференциальных сечений с помощью перевальной методики практически не зависит от того, используем мы приближенные (из [7]) или точные значения для седловых точек. Вся тонкость заключается в правильном моделировании гладкой части эйконального интеграла, определяемой суммой членов с $p > 1$, и поэтому нужно каждый раз проводить тщательный анализ приближенных эйкональных интегралов и фаз квазиклассических волновых функций при выходе на плоскость комплексного прицельного параметра.

Литература

1. Лукьянов В.К. // ЯФ. 1995. Т.58. С.1955.
2. Glauber R.J. // in Lectures on Theoretical Physics (Interscience, New York, 1959), V.I.

3. Schiff L.I.// Phys.Rev. 1956. V.103. P.443.; Saxon D.S. and Schiff L.I.// Nuovo Cimento. 1957. V.6. P.614.; Yennie D.R., Woos F.L. and Ravenhall D.C.// Phys.Rev.B. 1965. V.137. P.882.; Лукьянов В.К.// Изв. РАН, сер.физ., 1994. Т.58(1). С.8.
4. Лукьянов В.К. //Изв. РАН, сер. физ. 1996, Т. 60(11) С.8.
5. Ембулаев А.В., Земляная Е.В., Лукьянов В.К, Пермяков В.П., Чубов Ю.В. // Препринт ОИЯИ, Р7-97-185, 1997.
6. Shepard J.R. and Rost E.// Phys.Rev.C. 1982. V.25. P.2660.
7. Земляная Е.В., Лукьянов В.К., Пермяков В.П., Чубов Ю.В. // Изв. РАН, сер. физ. 1997. Т.61(1). С.140.
8. Amado R.D., Dedonder J.P., Lenz F.// Phys. Rev C. 1980, V. 21, N. 2, P. 647 ;
9. Roussel-Chamaz P. et al // Nucl. Phys. 1988. V. A477. P.345.

Рукопись поступила в издательский отдел
5 июня 1998 года.