93-442

объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

Р7-93-442

С.И.Федотов

ВОЗБУЖДЕНИЕ ЯДЕР НЕРЕЛЯТИВИСТСКИМИ ТЯЖЕЛЫМИ ИОНАМИ

Направлено в журнал «Теоретическая и математическая физика»

1993

1 Введение

Решения задач, связанных с рассеянием нерелятивистских тяжелых ионов на ядрах, становятся проще и нагляднее, если использовать квазиклассическое приближение, основанное на условии малости длины волны взаимодействующих частиц по сравнению с их характеристическими размерами.

Для упругого рассеяния в этом случае обычным является расчет квазиклассических фаз рассеяния на основе интегрирования по классическим траекториям движения. Для неупругого рассеяния и реакций принципиальной трудностью является учет изменения траектории движения в момент передачи энергии возбуждения или массы от одного ядра к другому. Однако если эти величины малы по сравнению с энергией относительного движения или массами участвующих в реакциях ядер, то классические траектории можно считать одинаковыми до и после столкновения. Это так называемое приближение удара широко использовалось в расчетах возбуждений низколежащих коллективных состояний ядер при рассеянии тяжелых ионов в кулоновском и ядерном поле [1].

Очевидно, что постановка и решение подобной задачи в общем случае требует как учета связи большого числа взаимодействующих каналов реакций, так и пересмотра традиционного квазиклассического подхода. Шаг вперед в этом направлении был сделан в [2], где использовалось квазиклассическое приближение для трехмерных волновых функций входного и выходного каналов, "излом траекторий" определялся с помощью условий, получаемых из закона сохранения момента количества движения, а также включалась связь каналов.

В настоящей работе сделана попытка продвинуться в этой сложной задаче с помощью метода континуальных интегралов. В [3] дан пример такого рассмотрения, но при этом предполагалась слабая связь относительного движения с каналами возбуждения. Обсудим более общий случай возбуждения ядер в столкновениях тяжелых ионов с учетом сильной связи каналов. Возбуждения ядер и их относительное движение рассматриваются в едином подходе. Из внутренних переменных выделяются амплитуды фононного типа, что позволяет взять по ним континуальный интеграл точно. По траектории относительного движения континуальный интеграл вычисляется в квазиклассическом приближении в рамках метода стационарной фазы. Из условия стационарности фазы получаются уравнения движения для каждого внутреннего перехода, в которых учитывается влияние этого перехода на относительное движение. Решения этих уравнений дают траекторию относительного движения в самосогласованном виде. Эти траектории позволяют рассчитать дифференциальное сечение столкновения тяжелых ионов, полученное в виде произведения классического дифференциального сечения и множителя, включающего реакцию ядра на возбуждение, т.е. вероятность ядерного перехода.

2 Модельный гамильтониан системы

Из состояний ядра выделим только коллективные возбуждения бозонного типа. Столкновение иона с ядром рассматриваем как сложную квантово–механическую систему. В тензорном пространстве состояний этой системы введем базисные векторы $\mid \mathbf{r}n >=\mid \mathbf{r} >\mid n >$ и $< \mathbf{r}\, n \mid \mathbf{r}'n' >= \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\cdot\delta_{nn'}$,где $\mid \mathbf{r} >$ — собственные векторы оператора координаты относительного движения $\mathbf{r}(t)$, а $\mid n >$ — собственные векторы оператора числа бозонов. Гамильтониан динамической системы разобьем на части,выделив в нем члены $U_{вз.}$, ответственные за внутренние возбуждения:

$$H = \frac{1}{2}\mu\,\dot{\mathbf{r}}^2 + H_{вн.} + U = \frac{1}{2}\mu\,\dot{\mathbf{r}}^2 + H_{вн.} + U_0(\mathbf{r}) + U_{вз.}, \tag{1}$$

где $H_{вн.}$ описывает внутренние возбуждения ядра, а $\frac{1}{2}\mu\dot{\mathbf{r}}^2 + U_0$ — относительное движение.

Для получения конкретных выражений в гамильтониане опишем ядро в виде элементарных мод возбуждения колебательного типа. Гамильтониан системы нуклонов ядра с учетом двухчастичного взаимодействия $v_{12}(|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_1'|)$ в представлении вторичного квантования через операторы поля записывается в виде

$$\begin{aligned} H_{вн.} &= \frac{\hbar^2}{2m}\int \nabla\Psi^+(\mathbf{r}_1)\nabla\Psi(\mathbf{r}_1)\,d\mathbf{r}_1 \\ &+\frac{1}{2}\int \Psi^+(\mathbf{r}_1)\Psi^+(\mathbf{r}_1')v_{12}(|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_1'|)\Psi(\mathbf{r}_1)\Psi(\mathbf{r}_1')\,d\mathbf{r}_1\,d\mathbf{r}_1'. \end{aligned} \tag{2}$$

Перейдем к терминам операторов плотности $\rho\,(\mathbf{r}_1)$ и тока $\mathbf{j}\,(\mathbf{r}_1)$ [4]

$$\begin{aligned} \rho\,(\mathbf{r}_1) &= \Psi^+(\mathbf{r}_1)\,\Psi\,(\mathbf{r}_1) = \rho_0\,(\mathbf{r}_1) + \delta\rho(\mathbf{r}_1), \\ j(\mathbf{r}_1) &= \frac{i\hbar}{2m}\left[\Psi^+(\mathbf{r}_1)\,\nabla\Psi(\mathbf{r}_1) - \nabla\Psi^+(\mathbf{r}_1)\,\Psi(\mathbf{r}_1)\right] = \frac{1}{2}\,(\rho\,\nabla\varphi + \nabla\varphi\,\rho), \end{aligned} \tag{3}$$

где $\rho_0(\mathbf{r}_1)$ — средняя плотность ядра, $\delta\rho(\mathbf{r}_1)$ — отклонение плотности от равновесного значения, φ — потенциал скорости (предполагается безвихревое движение). Оставаясь в рамках гармонического приближения, т.е. пренебрегая членами по $\delta\rho$ и φ выше второго порядка, перепишем гамильтониан в виде

$$\begin{aligned} H_{вн.} &= \frac{m}{2}\int \rho_0\,(\mathbf{r}_1)\,(\nabla\varphi(\mathbf{r}_1))^2\,d\mathbf{r}_1 + \int \frac{\hbar^2}{8m\rho_0(\mathbf{r}_1)}(\nabla\,\delta\rho(\mathbf{r}_1))^2\,d\mathbf{r}_1 \\ &+ \frac{1}{2}\int v_{12}(|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_1'|)\,\delta\rho(\mathbf{r}_1)\,\delta\rho(\mathbf{r}_1')\,d\mathbf{r}_1\,d\mathbf{r}_1' \\ &+ \frac{\hbar^2}{8m}\int\left[\frac{(\nabla\rho_0)^2}{\rho_0^3(\mathbf{r}_1)} - \Delta\left(\frac{1}{\rho_0(\mathbf{r}_1)}\right)\right](\delta\rho(\mathbf{r}_1))^2\,d\mathbf{r}_1 + \mathrm{constant}\,. \end{aligned} \tag{4}$$

Мы интересуемся собственными колебаниями плотности. Флуктуация плотности $\delta\rho(\mathbf{r}_1)$ в приближении $v_{12}\,(|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_1'|) = g(\mathbf{r}_1)\delta(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_1')$ удовлетворяет волновому уравнению

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \delta\rho(\mathbf{r}_1)}{\partial t^2} \; = \; & -\nabla\rho_0(\mathbf{r}_1)\nabla\{\frac{g(\mathbf{r}_1)}{m}\,\delta\rho(\mathbf{r}_1) \\
& +\frac{\hbar^2}{4m}[\frac{(\nabla\rho_0(\mathbf{r}_1))^2}{\rho_0^3(\mathbf{r}_1)} - \Delta(\frac{1}{\rho_0(\mathbf{r}_1)})]\,\delta\rho(\mathbf{r}_1) \\
& -\frac{\hbar^2}{4m}\,\nabla(\frac{1}{\rho_0(\mathbf{r}_1)}\nabla\delta\rho(\mathbf{r}_1))\}.
\end{aligned} \tag{5}
$$

В случае $g(\mathbf{r}_1) = g_0 = \text{constant}$ и $\rho_0(\mathbf{r}_1) = \rho_0 = \text{constant}$, т.е. пренебрегаем поверхностными эффектами, считаем,что ядро имеет жесткий край:

$$
\frac{\partial^2 \delta\rho(\mathbf{r}_1)}{\partial t^2} = (\frac{g_0\rho_0}{m}\,\Delta - \frac{\hbar^2}{4m\,\rho_0}\,\Delta^2)\,\delta\rho(\mathbf{r}_1) \;\equiv \mathrm{L}\,\delta\rho(\mathbf{r}_1) \tag{6}
$$

с граничным условием $\mathbf{n}\nabla\delta\rho(\mathbf{r}_1)\mid_{r_1=R_0} = 0$, где $\mathbf{n}$ — вектор, нормальный поверхности ядра. Решение этого уравнения, периодическое во времени, ищем в виде $\delta\rho(\mathbf{r}_1, t) = \delta\rho(\mathbf{r}_1)\,e^{-i\omega t}$. Тогда нормальные колебания удовлетворяют уравнению:

$$
\mathrm{L}\,\delta\rho(\mathbf{r}_1) + \omega^2\delta\rho(\mathbf{r}_1) = 0\;, \tag{7}
$$

т.е. являются диспергирующими. Ограничиваясь **недиспергирующими** нормальными колебаниями, получим хорошо известное уравнение Гельмгольца

$$
\Delta\delta\rho(\mathbf{r}_1) + k^2\delta\rho(\mathbf{r}_1) = 0\;; \qquad k^2 = \frac{m}{g_0\,\rho_0}\,\omega^2\;. \tag{8}
$$

Общее решение этого уравнения дается выражением

$$
\delta\rho(\mathbf{r}_1) = \sum_{nlm} \delta\rho_{nlm} j_l(k_{nl}r_1)\,Y_{lm}(\frac{\mathbf{r}_1}{r_1})\;. \tag{9}
$$

Введем операторы рождения b^+_{nlm} и уничтожения b_{nlm} бозонов, выбрав множители в формуле таким образом, чтобы придать гамильтониану $H_{\text{ок.}}$ диагональный вид:

$$
\delta\rho_{nlm} = \left(\frac{\hbar\rho_0\,k^2_{nl}}{2m\,N_{nl}\,\omega_{nl}}\right)^{1/2} \left(b^+_{nlm} + (-)^m\,b_{nl-m}\right)\,, \tag{10}
$$

где нормировочная константа $N_{nl} = \int_0^{R_0} r^2 j_l^2(k_{nl}r)dr$. Аналогичные результаты получаются и для потенциалов скоростей, что позволяет в итоге записать выражение для гамильтониана $H_{\text{ок.}}$:

$$
H_{\text{ок.}} = \sum_{nlm} \hbar\omega_{nl}\;(b^+_{nlm}\,b_{nlm} + \frac{1}{2}). \tag{11}
$$

Потенциальная энергия взаимодействия иона с ядром состоит из кулоновской и ядерной частей:

$$
U_{\text{вз.}} = U^{\text{кул.}}_{\text{вз.}} + U^{\text{яд.}}_{\text{вз}}\;; \qquad U_0 = U^{\text{кул.}}_0 + U^{\text{яд.}}_0\;.
$$

Для каждого из потенциалов можно воспользоваться процедурой усреднения эффективного взаимодействия по плотностям $\rho(\mathbf{r}_2)$ и $\rho(\mathbf{r}_1)$ сталкивающихся иона и

ядра. Учтем только возбуждение ядра–мишени. Ядерную часть взаимодействия представим как

$$
U = U^{\text{яд.}}_0(\mathbf{r}) + U^{\text{яд.}}_{\text{вз.}} = \int \rho(\mathbf{r}_1)V(|\mathbf{r}-\mathbf{r}_1)|)\,d\mathbf{r}_1 = U^{\text{яд.}}_0(\mathbf{r}) + \int V(|\mathbf{r}-\mathbf{r}_1|)\,\delta\rho(\mathbf{r}_1)d\mathbf{r}_1,
$$

где $V(|\mathbf{r}-\mathbf{r}_1|) = \int v_{12}(|\mathbf{r}+\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1|)\rho(\mathbf{r}_2)d\mathbf{r}_2$ —взаимодействие между нуклонами в ядре с налетающим ионом на относительном расстоянии $\mathbf{r}$. $U^{\text{яд.}}_0(\mathbf{r})$ сводится к потенциалу типа "потенциал близости"[5]. Возьмем эффективные нуклон–нуклонные силы в виде, принятом в теории конечных ферми-систем [6]:

$$
v_{12}(|\mathbf{r}+\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1|) = f_{in}\left(\frac{d\rho_0}{d\epsilon_F}\right)^{-1}\,\delta(|\mathbf{r}+\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1|),
$$

где f_{in} — константа эффективного взаимодействия нуклонов в ядре, $\frac{d\rho_0}{d\epsilon_F}$ — производная от плотности по энергии Ферми. Тогда, учитывая (9) и (10), получим следующее выражение для $U^{\text{яд.}}_{\text{вз.}}$:

$$
U^{\text{яд.}}_{\text{вз.}} = \sum_{nlm}\,\gamma_{nlm}(\mathbf{r})\;(b^+_{nlm} + (-)^m\,b_{nlm})\,,
$$

$$
\gamma_{nlm}(\mathbf{r}) = 4\pi\rho_0\,f_{in}\left(\frac{d\rho_0}{d\epsilon_F}\right)^{-1}\left(\frac{\hbar\rho_0 k^2_{nl}}{2mN_{nl}\omega_{nl}}\right)^{\frac{1}{2}} j_l(k_{nl}r)Y_{lm}(\frac{\mathbf{r}}{r})\int_0^{R_0} j_0(k_{nl}r)r^2dr\;. \tag{12}
$$

3 Волновая функция системы

Следуя концепции континуальных интегралов Фейнмана, будем описывать временную эволюцию системы пропагатором $K(\mathbf{r}_f n_f t_f \mid \mathbf{r}_i n_i t_i) \equiv$ $< \mathbf{r}_f n_f t_f \mid \mathbf{r}_i n_i t_i >$. Действительно, волновая функция системы $\Psi(\mathbf{r}, n, t) =$ $< \mathbf{r}n \mid \Psi_s(t) >=< \mathbf{r}nt \mid \Psi_h >$,где вектор $\mid \mathbf{r}nt >= e^{iHt} \mid \mathbf{r}n >$,а $\mid \Psi_s(t) >$ и $\mid \Psi_h >$ — **векторы** состояния в шредингеровском и гейзенберговском представлениях, связанные соотношением $\mid \Psi_s(t) >= e^{-iHt} \mid \Psi_h >$. С учетом полноты ортонормированного базиса системы следует соотношение

$$
\begin{aligned}
\Psi(\mathbf{r}_f n_f t_f) &=< \mathbf{r}_f n_f t_f \mid \Psi_h > \\
&= \sum_{n_i}\int < \mathbf{r}_f n_f t_f \mid \mathbf{r}_i n_i t_i >< \mathbf{r}_i n_i t_i \mid \Psi_h > d\mathbf{r}_i \\
&= \sum_{n_i}\int < \mathbf{r}_f n_f t_f \mid \mathbf{r}_i n_i t_i > \Psi(\mathbf{r}_i n_i t_i)d\mathbf{r}_i.
\end{aligned} \tag{13}
$$

Для того чтобы воспользоваться техникой континуального интегрирования для внутренних переменных, так же,как и для относительной координаты, перейдем к базису непрерывного представления по когерентным состояниям. Этот базис является переполненным с условием полноты $1 = \frac{1}{\pi}\int d^2z \mid z >< z \mid$, где $d^2z \equiv d(Rez)d(Imz)$ и интегрирование распространяется на всю комплексную плоскость. Хорошо известно и выражение для собственных состояний гармонического осциллятора

$$
< z \mid n >= (n!)^{-\frac{1}{2}} z^n \exp(-\frac{1}{2}|z|^2)\;.
$$

В случае, когда имеем дело со многими степенями свободы, выражение единицы записывается в более общей форме:

$$1=\frac{1}{\pi^K}\int\cdots\int\mid\{Z_k\}><\{Z_k\}\mid\prod_{k=1}^{K}d^2Z_k\quad ,$$

где

$$\mid\{Z_k\}>=\mid Z_1Z_2\cdots Z_K>\ .$$

Для простоты записи ограничимся только одной внутренней степенью свободы. Учтем многие степени свободы в окончательном результате, что приведет к соответствующим произведениям и суммированию. Теперь можно записать пропагатор $<\mathbf{r}_f n_f t_f\mid\mathbf{r}_i n_i t_i>$ в следующем виде:

$$<\mathbf{r}_f n_f t_f\mid\mathbf{r}_i n_i t_i>=\int d^2z_f d^2z_i<n_f\mid z_f><\mathbf{r}_f z_f t_f\mid\mathbf{r}_i z_i t_i><z_i\mid n_i>. \tag{14}$$

Чтобы освободиться от бозонных амплитуд b^+,b, вычислим в пропагаторе $<\mathbf{r}_f z_f t_f\mid\mathbf{r}_i z_i t_i>$ континуальный интеграл по всем возможным "траекториям" z, выделив в гамильтониане H слагаемые, в которые входят амплитуды, т.е. $H_1(t)=H_{вн.}+U_{вз.}$. Разобьем временной промежуток между t_i и t_f на $(N+1)$ равных частей. Тогда

$$\begin{aligned}<z_f t_f\mid z_i t_i>=\int\cdots\int d^2z_1\ldots d^2z_N<z_f t_f\mid z_N t_N>\\ \times<z_N t_N\mid z_{N-1}t_{N-1}>\ldots<z_1 t_1\mid z_i t_i>.\end{aligned} \tag{15}$$

Вычислим пропагатор малого сегмента при $N\to\infty$:

$$\begin{aligned}&<z_{j+1}\mid\exp\{-\frac{i}{\hbar}\tau H_1(t_j)\}\mid z_j>=<z_{j+1}\mid 1-\frac{i}{\hbar}\tau H_1(t_j)+O(\tau^2)\mid z_j>\\ &=<z_{j+1}\mid z_j>\left(1-\frac{i}{\hbar}\tau\frac{<z_{j+1}\mid H_1(t_j)\mid z_j>}{<z_{j+1}\mid z_j>}\right)\\ &=<z_{j+1}\mid z_j>\exp\{-\frac{i}{\hbar}\tau\frac{<z_{j+1}\mid H_1(t_j)\mid z_j>}{<z_{j+1}\mid z_j>}\}.\end{aligned}$$

В результате полный пропагатор

$$\begin{aligned}<z_f t_f\mid z_i t_i>=\int\cdots\int\prod_{j=0}^{N}<z_{j+1}\mid z_j>\\ \times\exp\{-\frac{i}{\hbar}\tau\frac{<z_{j+1}\mid H_1(t_j)\mid z_j>}{<zj+1\mid z_j>}\}\frac{1}{\pi^N}d^2z_1\ldots d^2z_N,\end{aligned} \tag{16}$$

где $z_0=z_i, z_{N+1}=z_f$. Используя факт, что когерентные состояния являются собственными состояниями оператора b, т.е. $b\mid z>=z\mid z>$, известное выражение $<z\mid z'>=\exp\left(-\frac{1}{2}|z|^2+\bar{z}z'-\frac{1}{2}|z'|^2\right)$ и проведя N-кратное интегрирование по z, получаем для пропагатора $<z_f t_f\mid z_i z_i>$ выражение

$$\begin{aligned}<z_f t_f\mid z_i t_i>=\exp\{\bar{z}_f z_i e^{i\omega(t_f-t_i)}-\frac{i}{\hbar}[\bar{z}_f e^{-i\omega t_f}\int_{t_i}^{t_f}e^{i\omega t}\gamma_{nlm}(\mathbf{r})dt\\ +z_i e^{i\omega t_i}\int_{t_i}^{t_f}e^{-i\omega t}\bar{\gamma}_{nlm}(\mathbf{r})dt]-\frac{1}{\hbar^2}\int_{t_i}^{t_f}ds\int_{t_i}^{s}\bar{\gamma}_{nlm}(\mathbf{r}(s))\gamma_{nlm}(\mathbf{r}(t))e^{i\omega(t-s)}dt\}.\end{aligned} \tag{17}$$

Подставив полученное выражение в (14) и проинтегрировав по z_i и z_f, полагая, что ядро в начальный момент находится в основном состоянии, т.е. $n_i=0$, получим

$$<\mathbf{r}_f n_f t_f\mid\mathbf{r}_i n_i t_i>=<\mathbf{r}_f\mid\exp\{-\frac{i}{\hbar}(\frac{1}{2}\mu\dot{\mathbf{r}}^2+U_o(\mathbf{r}))\}T_{n_f n_i}[\mathbf{r}]\mid\mathbf{r}_i>, \tag{18}$$

где

$$\begin{aligned}T_{n_f n_i}[\mathbf{r}]=\left[\frac{1}{i\hbar}\int_{t_i}^{t_f}\gamma_{nlm}(\mathbf{r})\,e^{i\omega(t-t_f)}dt\right]^{n_f}\frac{1}{\sqrt{n_f}}\\ \times\exp\left\{-\frac{1}{\hbar^2}\int_{t_i}^{t_f}ds\int_{t_i}^{s}\bar{\gamma}_{nlm}(\mathbf{r}(s))\,\gamma_{nlm}(\mathbf{r}(t))\,e^{i\omega(t-s)}dt\right\}\end{aligned}$$

есть амплитуда вероятности перехода $n_i\to n_f$,т.е.пропагатор $<z_f t_f\mid z_i t_i>$ в представлении чисел заполнения, вычисленная при фиксированном значении $\mathbf{r}(t)$. Эта амплитуда зависит от выбора траектории, поэтому и записана в виде функционала от $\mathbf{r}(t)$. Таким образом, пропагатор $<\mathbf{r}_f n_f t_f\mid\mathbf{r}_i n_i t_i>$, описывающий рассеяние,соответствующее переходу $n_i\to n_f$, представляется в виде фейнмановского интеграла по траектории $\mathbf{r}(t)$; обозначим его через $K_{n_f n_i}(\mathbf{r}_f t_f\mid\mathbf{r}_i t_i)$ и представим в виде [7]

$$K_{n_f n_i}(\mathbf{r}_f t_f\mid\mathbf{r}_i t_i)=\int_{\mathbf{r}_i t_i}^{\mathbf{r}_f t_f}D\mathbf{r}\exp(\frac{i}{\hbar}S_o[\mathbf{r}])T_{n_f n_i}[\mathbf{r}], \tag{19}$$

где $S_o[\mathbf{r}]=\int_{t_i}^{t_f}[\frac{1}{2}\mu\dot{\mathbf{r}}^2-U_o(\mathbf{r})]dt$ — классическое действие вдоль траектории $\mathbf{r}(t)$. Записывая $T_{n_f n_i}[\mathbf{r}]$ как

$$T_{n_f n_i}[\mathbf{r}]=|T_{n_f n_i}[\mathbf{r}]|\exp(\frac{i}{\hbar}\varphi_{n_f n_i}[\mathbf{r}]);\ \varphi_{n_f n_i}=\hbar Im\ln T_{n_f n_i}[\mathbf{r}],$$

имеем для $K_{n_f n_i}$

$$K_{n_f n_i}=\int_{\mathbf{r}_i t_i}^{\mathbf{r}_f t_f}D\mathbf{r}\,\exp\left\{\frac{i}{\hbar}(S_o[\mathbf{r}]+\varphi_{n_f n_i}[\mathbf{r}])\right\}|T_{n_f n_i}[\mathbf{r}]|, \tag{20}$$

т.е. получаем модифицированную функцию действия для системы. Ее изменение обусловлено взаимодействием с внутренними степенями свободы ядра. Если рассеяние удовлетворяет условию

$$(S_o[\mathbf{r}]+\varphi_{n_f n_i}[\mathbf{r}])>>\hbar,$$

можно воспользоваться квазиклассическим приближением для интеграла (20). Подынтегральное выражение представляет собой комплексный функционал от траектории $\mathbf{r}(t)$ с быстро осциллирующей фазой. Интеграл берется в приближении стационарной фазы, согласно которому основной вклад в него дают траектории, делающие фазу стационарной:

$$\delta(S_o[\mathbf{r}]+\varphi_{n_f n_i}[\mathbf{r}])=\delta(S_o[\mathbf{r}]+\hbar Im\ln T_{n_f n_i}[\mathbf{r}])=0. \tag{21}$$

Если имеется несколько таких траекторий, то квазиклассический пропагатор представляется суммой по ним [8-10]:

$$\begin{aligned}K_{n_f n_i}&=\sum_\alpha\Big(\frac{\mu}{2\pi\hbar i}\Big)^{\frac{3}{2}}\left|\frac{\partial^2 S_\alpha}{\partial\mathbf{r}_f\partial\mathbf{r}_i}\right|^{\frac{1}{2}}\exp(\frac{i}{\hbar}S_\alpha-\frac{1}{2}\nu\pi i)|T_{n_f n_i}[\mathbf{r}_\alpha]|\\ &=\sum_\alpha\Big(\frac{\mu}{2\pi\hbar i}\Big)^{\frac{3}{2}}\frac{1}{|\partial\mathbf{r}_f/\partial\dot{\mathbf{r}}_i|^{\frac{1}{2}}}\exp(\frac{i}{\hbar}S_\alpha-\frac{1}{2}\nu\pi i)|T_{n_f n_i}[\mathbf{r}_\alpha]|,\end{aligned} \tag{22}$$

где ν — число фокальных точек вдоль классической траектории $\mathbf{r}_\alpha$, т.е. когда якобиан $\frac{\partial \mathbf{r}_f}{\partial \mathbf{r}_i} = 0$. Определив $Kn_f n_i$, мы полностью определили волновую функцию системы (13).

4 Дифференциальное сечение рассеяния

Для определения сечения рассеяния необходимо найти асимптотическое значение (13). Предположим, что начальное состояние системы определяется функцией $\exp(\frac{i}{\hbar}(\mathbf{p}_i\mathbf{r}_i - E_i t))$, соответствующей относительному движению иона и ядра. Тогда

$$\Psi^+_{n_f n_i}(\mathbf{r}_f t_f) = \int K_{n_f n_i} \exp\{\frac{i}{\hbar}(\mathbf{p}_i\mathbf{r}_i - E_i t)\} d\mathbf{r}_i, \; t_i \to -\infty. \tag{23}$$

Верхний индекс у волновой функции $\Psi^+_{n_f n_i}(\mathbf{r}_f t_f)$ означает, что она соответствует волне, свободной при $t \to -\infty$, и, следовательно, отвечает "запаздывающему" пропагатору $K_{n_f n_i}(\mathbf{r}_f t_f \mid \mathbf{r}_i t_i)$. Подставляя значение $K_{n_f n_i}$ из (22) и используя выражение $S_\alpha = \int(\mathbf{p}d\mathbf{r} - H dt)$, берем интеграл (23) многомерным методом стационарной фазы [11]:

$$\Psi^+_{n_f n_i} = \sum \frac{|t_i|^{\frac{3}{2}}}{|\,\partial \mathbf{r}_f \,/\, \partial \dot{\mathbf{r}}_i\,|^{\frac{1}{2}}} \exp\left\{\frac{i}{\hbar}(\mathbf{p}_i\mathbf{r}_i + \int_{\mathbf{r}_i}^{\mathbf{r}_f} \mathbf{p} d\mathbf{r}) - \frac{1}{2}\nu\pi i\right\}. \tag{24}$$

Действительно, в интеграл (23) наибольший вклад дает траектория, для которой $\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_i}(\mathbf{p}_i\mathbf{r}_i + S_\alpha) = 0$, т.е. $\mathbf{p}_i = -\frac{\partial S_\alpha}{\partial \mathbf{r}_i}$, что является свойством классической траектории. Рассмотрим две траектории при $r \to \infty$. По первой траектории ион движется свободно с постоянным импульсом $\mathbf{p}_i$. В этом случае $\Psi^+ \to e^{\frac{i}{\hbar}\mathbf{p}_i\mathbf{r}}$. Во втором случае ион взаимодействует с ядром. Принимая во внимание, что якобиан представляет собой отношение преобразующихся друг в друга элементов объема и что волновые векторы пропорциональны элементам длины, запишем

$$\frac{|t_i|^{\frac{3}{2}}}{|\,\partial \mathbf{r}_f \,/\, \partial \dot{\mathbf{r}}_i\,|^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{|\,\partial \mathbf{r}_f \,/\, \partial \mathbf{r}_i\,|^{\frac{1}{2}}} = \left(\frac{dV_i}{dV_f}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{\rho\, d\rho\, d\varphi\, k_i}{r^2\, d\Omega\, k_f}\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\lim_{t_i \to -\infty} (\frac{\mathbf{r}_i}{t_i} - \dot{\mathbf{r}}_i) = 0.$$

В этом случае

$$\Psi^+ \to (\frac{\rho\, d\rho\, d\varphi\, k_i}{r^2\, d\omega\, k_f})^{\frac{1}{2}} \exp\{\frac{i}{\hbar}(\mathbf{p}_i\mathbf{r}_i + \int_{\mathbf{r}_i}^{\mathbf{r}_f} \mathbf{p}\, d\mathbf{r}) - 1/2\nu\pi i\} |T_{n_f n_i}[\mathbf{r}]|.$$

Окончательно волновая функция имеет вид

$$\Psi^+_{n_f n_i}(\mathbf{r}_f t_f) = e^{\frac{i}{\hbar}\mathbf{p}_i\mathbf{r}} + \left(\frac{\rho\, d\rho\, d\varphi\, k_i}{d\Omega\, k_f}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{e^{ik_f r}}{r} e^{i\chi} |T_{n_f n_i}|, \tag{25}$$

где χ — вещественная функция, вид которой для дальнейшего не важен, или

$$\Psi^+_{n_f n_i} \to e^{\frac{i}{\hbar}\mathbf{p}_i\mathbf{r}} + \frac{f}{r} e^{ik_f r}, r \to \infty,$$

где

$$f = \sqrt{\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{к.л.}} \frac{k_i}{k_f}}\, |T_{n_f n_i}|\, e^{i\chi}.$$

Отсюда получаем выражение для дифференциального сечения рассеяния в первом порядке квазиклассического приближения континуального интеграла (20)

$$\frac{d\sigma_{n_i \to n_f}}{d\Omega} = \sum_\alpha \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{к.л.}} |T_{n_f n_i}[\mathbf{r}]|^2, \tag{26}$$

где $(\frac{d\sigma}{d\Omega})_{\text{к.л.}}$ — дифференциальное сечение для классического движения вдоль траектории $\mathbf{r}(t)$, полученной из уравнения (21). $T_{n_f n_i}[\mathbf{r}]$ — соответствующая квантовая амплитуда вдоль того же пути. Эта амплитуда определяется в квазиклассической теории реакций с тяжелыми ионами [5] путем решения системы линейных дифференциальных уравнений, к которым сводится уравнение Шредингера. Используется метод последовательных приближений. В практических расчетах обычно ограничиваются первым приближением, соответствующим первому порядку зависящей от времени теории возмущения. В случае возбуждения n_f бозонов различной мультипольности она имеет вид

$$T_{n_f n_i}[\mathbf{r}] = \prod \left[\frac{1}{i\hbar} \int_{t_i}^{t_f} \gamma_{nlm}(\mathbf{r}) e^{i\omega_{nl}(t-t_f)}\, dt\right]^{n_f} \frac{1}{\sqrt{n_f!}}$$
$$\times \exp\{-\sum_{nlm} \frac{1}{\hbar^2} \int_{t_i}^{t_f} ds \int_{t_i}^{s} \bar{\gamma}_{nlm}(\mathbf{r}(t))\gamma_{nlm}(\mathbf{r}(t))\, e^{i\omega_{nl}(t-s)}\, dt\}. \tag{27}$$

В случае упругого рассеяния

$$T_{n_f n_i} = \exp\{-\sum_{nlm} \frac{1}{\hbar^2} \int_{t_i}^{t_f} ds \int_{t_i}^{s} \bar{\gamma}_{nlm}(\mathbf{r}(s))\gamma_{nlm}(\mathbf{r}(t))\, e^{i\omega_{nl}(t-s)}\, dt\}. \tag{28}$$

Таким образом, в едином подходе к внешнему и внутреннему движениям получены выражения для дифференциальных сечений.

5 Уравнения движения

Дифференциальные сечения рассеяния (26) зависят от траектории относительного движения. Уравнение для координаты относительного движения можно получить, варьируя модифицированную функцию действия (21). Рассмотрим переход из основного в однобозонное возбужденное состояние. Так как

$$\hbar\, \delta\{Im \ln T_{n_f n_i}\} = \hbar\, Im \frac{\int_{t_i}^{t_f} \nabla\gamma_{nlm}(\mathbf{r})\, e^{i\omega_{nl}t'}\, \delta\mathbf{r}\, dt'}{\int_{t_i}^{t_f} \gamma_{nlm}(\mathbf{r}) e^{i\omega_{nl}t'}\, dt'}$$
$$-\frac{1}{\hbar} Im \int_{t_i}^{t_f} dt \int_{t_i}^{t} \nabla \cdot \bar{\gamma}_{nlm}(\mathbf{r}(t))\gamma_{nlm}(\mathbf{r}(t')) e^{i\omega_{nl}(t'-t)}\, \delta\mathbf{r}(t)\, dt'$$
$$-\frac{1}{\hbar} Im \int_{t_i}^{t_f} dt \int_{t}^{t_f} \nabla \cdot \gamma_{nlm}(\mathbf{r}(t))\bar{\gamma}_{nlm}(\mathbf{r}(t')) e^{i\omega_{nl}(t-t')}\, dt'\, \delta\mathbf{r}(t),$$

получаем окончательно уравнение в следующем виде:

$$
\begin{aligned}
&\mu\,\ddot{\mathbf{r}}(t) + \nabla_r U(\mathbf{r}(t)) = \frac{1}{\hbar} Im\, \nabla_r \bar{\gamma}_{nlm}(\mathbf{r}(t)) \int_{t_i}^{t} \gamma_{nlm}(\mathbf{r}(t'))\, e^{i\omega_{nl}(t'-t)}\, dt' \\
&+\frac{1}{\hbar} Im\, \nabla_r \gamma_{nlm}(\mathbf{r}(t)) \int_{t}^{t_f} \bar{\gamma}_{nlm}(\mathbf{r}(t'))\, e^{i\omega_{nl}(t-t')}\, dt' \\
&-\hbar\, Im\, \frac{\nabla_r \gamma_{nlm}(\mathbf{r}(t))\, e^{i\omega_{nl}t}}{\int_{t_i}^{t_f} \gamma_{nlm}(\mathbf{r}(t'))\, e^{i\omega_{nl}t'}\, dt'}.
\end{aligned}
\tag{29}
$$

Присутствие интегральных членов в (29) означает, что значение координаты относительного движения в определенный момент зависит от траектории движения в целом. Следовательно, решение уравнения (29) можно искать методом итераций: с начальным пробным значением $\mathbf{r}_o(t)$ решаем уравнение (29) для нового значения $\mathbf{r}_1(t)$, затем вычисляем величины сечений и т.д.

Таким образом, для каждого ядерного перехода находится траектория движения, при вычислении которой учитывается влияние этого перехода. В таком самосогласованном подходе в итоге получаем величины дифференциальных сечений возбуждения ядер.

В заключение считаю своим приятным долгом поблагодарить В.К.Лукьянова за многочисленные и плодотворные обсуждения работы.

Список литературы

[1] Treatise on Heavy–Ion Science. V.1. Ed. Bromly. N.–Y. Plenum Press 1984.

[2] Zagrebaev V.I. // Ann.Phys. (NY). 1990. V.197. P.33.

[3] Koeling T., Malfliet R.A. // Phys.Rep. 1975. V.22C, P.181.

[4] Kobe D.H., Coomer G.C. // Phys.Rev. 1973. V.A7. P.1312.

[5] Broglia R.A., Winther A. Lectures Notes on Heavy–Ion Reactions, Vol.1, The Benjamin / Cummings Publishing Comp. Massachusets, 1981.

[6] Мигдал А.Б. Теория конечных ферми–систем и свойства атомных ядер. М.: Наука, 1965.

[7] Pechukas P.// Phys.Rev. 1969. V.181. P.164,174.

[8] Schulman L.S. Techniques and Applications of Path Integration. N.Y., 1981.

[9] Маслов В.П. // ЖВМ и МФ. 1961. Т.1. 1. С.113; 1961. Т.1. 4. С.638.

[10] Маслов В.П., Федорюк М.В. Квазиклассическое приближение для уравнений квантовой механики. М.: Наука, 1976.

[11] Федорюк М.В. Метод перевала. М.: Наука, 1977.

Рукопись поступила в издательский отдел
10 декабря 1993 года.

Федотов С.И. P7-93-442

Возбуждение ядер нерелятивистскими тяжелыми ионами

Рассмотрено рассеяние нерелятивистских тяжелых ионов. Получены дифференциальные сечения рассеяния на базе фейнмановских интегралов по путям. Континуальный интеграл по внутренним переменным берется точно, по траектории относительного движения — в квазиклассическом приближении. Написаны уравнения движения с учетом возбуждения ядра.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна, 1993

Перевод автора

Fedotov S.I. P7-93-442

Excitation of Nuclei by Nonrelativistic Heavy Ions

Scattering of nonrelativistic heavy ions has been considered. Differential cross sections of scattering are derived by using Feynman path integrals. The continual integral is exactly taken over internal variables whereas over the trajectory of relative motion it is calculated in the quasiclassical approach.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna, 1993