



ОБЪЕДИНЕННЫЙ  
ИНСТИТУТ  
ЯДЕРНЫХ  
ИССЛЕДОВАНИЙ  
ДУБНА

P7-86-82

Н.И.Тарантин

КРИТЕРИЙ Н.БОРА  
ОТНОСИТЕЛЬНО ПРИМЕНИМОСТИ  
КЛАССИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ  
К ОПИСАНИЮ КУЛОНОВСКОГО РАССЕЯНИЯ  
ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ

Направлено в Оргкомитет симпозиума  
"Нильс Бор и наука XX века"  
/4-7 октября 1985 г., Пущино/

1986

Вопрос о возможности использования классической механики для описания квантовых явлений микромира является одним из фундаментальных в теории и практике познания. Уже в первых работах по квантовой механике специальное внимание уделялось рассмотрению возможностей квазиклассического приближения при описании квантово-механических явлений. Так, например, в монографии Мотта и Мессси <sup>/1/</sup> отмечается, что поведение электронного пучка, предсказываемое уравнением Шредингера, совпадает с результатами, вытекающими из механики Ньютона, если длина волны де Бройля для электрона не меняется заметно на расстоянии нескольких длин этой волны. Выполнение этого условия требует  $\text{см.}^{1/2}$ , с.12/, чтобы

$$|\text{grad } V| \lambda \ll W, \quad /1/$$

где  $V$  и  $W$  - потенциальная и кинетическая энергия электрона,  $\lambda$  - дебройлевская длина волны электрона.

Н.Бор в одной из своих первых работ по теории торможения осколков деления ядер веществом <sup>/2/</sup> отмечает, не прибегая к специальному доказательству, что при рассмотрении столкновений двух заряженных частиц простая дифракционная картина волновой механики является строгой только при условии, что  $k \ll 1$ . Когда же  $k \gg 1$ , хорошим приближением, несомненно, является классическая картина орбитального движения одной частицы относительно другой. В этом высказывании безразмерный параметр  $k$ , если использовать обозначения, принятые в последующих работах Н.Бора, есть  $k = 2|e_1 e_2| / \hbar v$ , где  $e_1, e_2$  и  $v$  - электрические заряды и относительная скорость сталкивающихся частиц.

Более детальное рассмотрение этой проблемы дается Н.Бором в работе <sup>/3/</sup>. В этой работе, подготовленной в 1942 году и опубликованной лишь спустя шесть лет из-за обстоятельств, вызванных второй мировой войной, дается систематическое рассмотрение явления рассеяния заряженных частиц, явлений возбуждения и ионизации, возникающих при движении заряженных частиц в веществе. Теория этих явлений имела в свое время большое значение для получения информации о строении атома из результатов опытов, аналогичных опытам Томсона и Резерфорда, имела и продолжает иметь важное значение для разработки экспериментальных методов исследований атомных ядер и ядерных превращений, основанных на измерении потерь энергии заряженными частицами при их прохождении регистрирующего устройства.

Значительное место в работе <sup>/3/</sup> отведено анализу пределов применимости различных методов рассмотрения и, в частности, пер-

вому подробному рассмотрению критерия справедливости использования классической механики в теории кулоновского рассеяния заряженных частиц. В редакционной предисловии к переводу работы на русский язык приоритетный характер этого рассмотрения отмечен следующими словами: "В современной физической литературе отсутствует... ясное изложение условий применимости классической механики к рассмотрению столкновений атомных частиц" /3/, с.5/.

В работе Н.Бора рассмотрена /см. /3/, с.17-19/ классическая гиперболическая траектория частицы с положительным зарядом в кулоновском поле точечного заряда ядра. Эта траектория в пространстве задается прицельным параметром  $p$ , который, в свою очередь, фиксируется с помощью диафрагмы с отверстием диаметром  $d$ . Наличие диафрагмы вызывает волновую дифракцию пучка частиц и тем самым вызывает некоторую неопределенность угла отклонения частицы. "Все дело теперь в том, - пишет далее Н.Бор - будет ли эта дифракция мала по сравнению с отклонением частицы в поле сил или она будет велика и совершенно исказит отклонение орбиты. В первом случае возможно сконструировать волновой пакет, который с большой точностью будет следовать по классической орбите, во втором - мы будем иметь дело с настоящим квантовым эффектом, анализ которого в терминах обычной механики невозможен".

Дифракционная неопределенность угла отклонения частицы представлена Н.Бором со ссылкой на работу /1/ как

$$\delta\phi = \lambda/d, \quad /2/$$

угол же отклонения частицы в кулоновском поле точечного заряда ядра в системе ц.м. определен со ссылкой на работу /4/ формулой

$$\operatorname{tg}(\theta/2) = b/2p, \quad /3/$$

где  $b = 2|e_1 e_2|/m_0 v^2$ ,  $m_0$  - приведенная масса рассеиваемой частицы и рассеивающего ядра. Обычно величину  $b$  интерпретируют как минимальное расстояние между сталкивающимися положительно заряженной частицей и ядром при лобовом сближении. В работе /3/ дается другая, не менее физическая, но менее видимая интерпретация величины  $b$  как диаметра соударения, поскольку параметрам  $p \leq b/2$  и поперечному сечению  $\sigma = \pi b^2/4$  соответствует в системе ц.м. рассеяние частиц в заднюю полусферу:  $\theta \geq \pi/2$ .

В дальнейшем рассмотрении в /3/ Н.Бор ограничивается только малыми углами отклонения частицы  $\theta$ , отвечающими наибольшим прицельным параметрам  $p$  и поэтому имеющими наибольший статистический вес и определяющее значение во многих явлениях. При  $\theta \ll 1$  из формулы /3/ следует

$$\theta \approx b/p. \quad /4/$$

Продифференцировав /4/ по  $p$  и положив  $\delta p = d/2$ , Н.Бор получает

$$\delta\theta = bd/2p^2 = \theta^2 d/2p \quad /5/$$

как меру неточности в определении классического угла отклонения в результате проявления неопределенности прицельного параметра  $p$ . Для определения меры общей неточности угла отклонения частицы в результате проявления квантово-механической дифракции и классической неопределенности используется стандартное выражение

$$\Delta\theta = \sqrt{(\delta\phi)^2 + (\delta\theta)^2}, \quad /6/$$

из которого, ссылаясь на формулы /2/ и /6/, Н.Бор получает соотношение

$$\Delta\theta \geq \sqrt{\lambda/b} \theta. \quad /7/$$

Как необходимое и достаточное условие для определенности классической траектории  $\Delta\theta \leq \theta$  при рассеянии частицы в кулоновском поле ядра из требования /7/ следует неравенство

$$k = b/\lambda = 2|e_1 e_2|/\hbar v \gg 1. \quad /8/$$

Неравенство /8/ следует также из общего условия /1/ при подстановке в /1/ в качестве  $\operatorname{grad} V$  производной от кулоновского потенциала  $V = e_1 e_2/r$ , взятой на расстоянии наибольшего сближения двух сталкивающихся ядер  $r = b$ .

При условном равенстве  $\hbar = 0$ , обязательно ведущем к классической интерпретации квантовых явлений, имеем  $k = \infty$ , что является предельным выражением неравенства /8/.

В рассматриваемой работе /3/ переход от формулы /6/ к формуле /7/ не сопровождается промежуточными действиями, что понижает степень доказанности далеко не очевидного соотношения /7/. Переход от формулы /6/ к формуле /7/ расшифрован в работе /5/ как поиск минимального значения  $\Delta\theta$  при варьировании размера диаметра отверстия диафрагмы. Из условия экстремума  $d(\Delta\theta)/dd = 0$ , где  $dd$  - дифференциальное приращение диаметра отверстия диафрагмы, для малых углов, рассматриваемых в /3/, следует  $d^2 = 2\lambda p^2/b$ . Это приводит к

$$(\Delta\theta)_{\min} = 2\sqrt{\lambda/b} \theta. \quad /9/$$

При выполнении условия экстремума вклады в  $(\Delta\theta)_{\min}$ , обусловленные квантово-механической и классической неопределенностями, равны друг другу:  $|\delta\phi| = |\delta\theta|$ .

В работе /5/ рассмотрение применимости классической механики для описания рассеяния заряженных частиц в кулоновском поле ядра распространено на большие углы рассеяния  $\theta$ . Для больших углов  $\theta$  формула /9/ преобразуется в

$$(\Delta\theta)_{\min} = 2\sqrt{\lambda/b} \sin(\theta/2). \quad /10/$$

Необходимость в формуле /10/ будет проиллюстрирована ниже.

Движение заряженной частицы по классической гиперболической траектории в кулоновском поле ядра приводит к известному Резерфордскому закону рассеяния заряженных частиц, выраженному че-

рез дифференциальное сечение рассеяния. Известно также, что квантово-механическое рассмотрение рассеяния заряженных частиц в кулоновском поле ядра приводит к выражению сечения рассеяния, тождественно совпадающему с классической формулой Резерфорда, если рассеиваемая и рассеивающая частицы не идентичны /см.<sup>1/</sup>, с.42-51/. Тождественность выражений сечений рассеяния заряженных частиц в кулоновском поле ядра, следующих из рассмотрений методами классической и квантовой механики, не означает отсутствия необходимости в критерии применимости классической механики к рассмотрению рассеяния. Формула Резерфорда определяет статистику углов рассеяния случайно распределенных по площади частиц, имеющих все возможные значения прицельного параметра. Поэтому в силу отсутствия выделенности прицельного параметра неопределенность классического рассмотрения не проявляется в конечном результате независимо от значения параметра  $\kappa$ . Однако положение меняется при рассмотрении рассеяния частиц с выделенными тем или иным физическим способом прицельными параметрами.

Одним из примеров ограничения прицельных параметров или орбитальных моментов количества движения рассеиваемых частиц является "модель резкого обрезания" /6/. В этой модели предполагается, что частица поглощается ядром, если классическая дистанция наибольшего сближения в кулоновском поле равна или меньше суммы радиусов двух сталкивающихся ядер. Как показывают эксперименты при  $\kappa \gg 1$  угловое распределение рассеянных тяжелых ионов достаточно хорошо описывается классическими представлениями. В области малых углов рассеяния, ограниченной некоторым предельным значением угла, дифференциальное сечение выражается формулой Резерфорда, а вне этой области резко уменьшается. При невыполнении условия  $\kappa \gg 1$  дифференциальное сечение рассеяния "осциллирует" относительно классического сечения, отражая результаты суперпозиции рассеяния парциальных волновых функций с угловыми моментами, меньшими некоторого значения, и поглощения парциальных волновых функций с большими угловыми моментами.

Ограничение прицельных параметров рассеиваемых в кулоновском поле частиц должно проявиться в реакции туннельной передачи спаренных нуклонов при соударении двух ядер сверхтекучего типа, рассмотренной в работе /7/. Одной из причин, снижающих вероятность сверхтекучего перехода спаренных нуклонов, является необходимость испускания или поглощения квантов электромагнитного поля для компенсации разности энергий связи пар нуклонов в ядре-доноре и ядре-акцепторе. Это явление аналогично нестационарному эффекту Джозефсона при сверхпроводящем туннельном переходе электронов /8/. Как показано в работе /5/, компенсация разности энергий связи пар нуклонов может быть осуществлена и безрадиационным способом. Это можно достигнуть путем изменения энергии вращения системы при нецентральной столкновении двух ядер в результате изменения момента инерции при передаче нуклонов. Осуществление этого механизма сверхтекучей передачи требует реализации оп-

ределенного прицельного параметра при столкновении двух сверхтекучих ядер и, следовательно, фиксирования определенного угла рассеяния бомбардирующего ядра.

Столкновение двух тяжелых ядер в реакциях сверхтекучих передач характеризуется хорошими условиями для классического описания / $\kappa \geq 200$ /. Угол квазиупругого рассеяния при этом определяется классической формулой /3/ с учетом почти касания двух столкнувшихся ядер, необходимого для снижения кулоновского и ядерного барьеров, и изменений энергии орбитального движения и энергии электростатического взаимодействия из-за передачи нуклонов. Для рассмотренных в работе /5/ реакций передачи различного числа пар нейтронов при столкновении ускоренных ионов  $^{60}\text{Ni}$  с сепарированными изотопами олова  $\theta = 52^\circ - 63^\circ$  и согласно формуле /10/  $(\Delta\theta)_{\min} = \pm 1^\circ$ . Проверка правильности классического описания внешнего проявления сугубо квантово-механического явления - сверхтекучей передачи спаренных нуклонов - дело будущих экспериментаторов.

В работе /3/ с.19-20/ в качестве примера, иллюстрирующего непригодность при  $\kappa \leq 1$  представления о классической орбите, приводится типично квантово-механический эффект обмена при столкновении одинаковых частиц. В этом случае сечение рассеяния в широкой области углов существенно больше или существенно меньше /в зависимости от типа статистики, которой подчиняются частицы/, чем сечение, даваемое классической механикой. При  $\kappa \gg 1$  дифференциальное сечение рассеяния тождественных частиц также не совпадает с формулой Резерфорда. Этот кажущийся парадокс "находит свое разрешение в том, - пишет Н.Бор - что любая попытка разделить посредством подходящих диафрагм орбиты сталкивающихся частиц и исключить, таким образом, явление обмена вызовет дифракцию, которая помешает наблюдению квантово-механических особенностей в законе рассеяния".

После выхода в свет работы Н.Бора /3/ критерий  $\kappa \gg 1$  для обоснованности классической картины и критерий  $\kappa \ll 1$  для обоснованности квантово-механической картины использовался при рассмотрении траекторий заряженных частиц со ссылкой на работу /3/ или на ее автора. Так, например, в работе известного физика Брейта /9/ читаем: "Диапозитив 1 показывает, как мы будем трактовать классически движение заряженных частиц... Известно, что очень важным в таком рассмотрении является значение параметра  $\kappa$ . Согласно хорошо известному аргументу Нильса Бора, если этот параметр много больше единицы, то движение должно быть существенно классическим..."

Однако в последние годы параметр и критерий возможности классического описания движения заряженных частиц часто связывается с именем Зоммерфельда без ссылок на обоснованность такой связи. Так, например, в монографии Басса /10/ параметр классичности, обозначенный символом  $\mu$ , называется параметром Зоммерфельда без ссылки на источник информации. Аналогичная ситуация имеет

место в книге /11/ и ряде других работ. В некоторых случаях дело доходит до курьезов. Например, в /12/ для классификации столкновений двух сложных ядер вводится величина, называемая параметром, аналогичным параметру Зоммерфельда. Однако автор другой работы /13/ при ссылке на /12/ называет этот параметр параметром Резерфорда, усомнившись, по-видимому, в обоснованности первого наименования.

В работе Басса /10/, представляющей собой изложение курса лекций, которые читались автором студентам начиная с 1967 года, используется преимущественно классическое, а не волновое описание орбитального движения тяжелых ионов. В связи с этим автором дается /см. /10/ с.2/ достаточно общее заключение о том, что классическое описание возможно, когда дебройлевская длина волны короче характерного для рассматриваемого взаимодействия расстояния, например, суммы радиусов двух столкнувшихся ядер или расстояния наибольшего сближения при кулоновском взаимодействии. В качестве критерия применимости классической механики принимается без какого-либо дополнительного обоснования условие  $n = Z_1 Z_2 e^2 / \hbar v \gg 1$ , где  $Z_1 e$  и  $Z_2 e$  - заряды сталкивающихся ядер, параметр  $n$  называется параметром Зоммерфельда. Заметим, что введенный параметр  $n$  отличается от параметра Н.Бора к отсутствием множителя, равного двум.

Исследование работ Зоммерфельда, например, исследование одной из его последних работ - третьего издания монографии "Строение атома и спектры" /14/, являющейся обобщением, в частности, работ автора в квантовой теории непрерывных спектров атома, т.е. теории инфинитного движения электронов, не выявило рассмотрений относительно условий применимости классики или волновой механики для описания движения заряженных частиц. Такого рассмотрения нет ни при выводе формулы Резерфорда методами классической механики /см. /14/ т. II, с.341-342/, ни при выводе этой формулы методами волновой механики /см. /14/ т. II, с.336-341/.

В монографии /14/ параметр  $n = Z e^2 / \hbar v$  /см. /14/ т. II, с.72/ используется как главное квантовое число, при этом дается ссылка на Н.Бора как автора принципа квантования орбит электронов в атоме и как автора понятия квантового числа. Напомним, что в работе Н.Бора /15/ приведены условия равенства центробежной силы, действующей на электрон, находящийся на круговой орбите, силе кулоновского притяжения электрона к ядру атома:

$$mv^2/a = Ze^2/a^2, \quad /11/$$

где  $m$  и  $v$  - масса и скорость электрона,  $a$  - радиус орбиты, а также историческое условие квантования момента количества движения электрона

$$mva = n\hbar, \quad /12/$$

где  $n$  - введенное Н.Бором квантовое число. Как можно видеть, из равенств /11/ и /12/ следует определение  $n = Ze^2 / \hbar v$ .

В работе /14/ понятие главного квантового числа  $n$ , определяющего стационарные орбиты электронов с отрицательной полной энергией в атоме, распространено /см. /14/ т. II, с.101-102/, на несвязанные состояния электрона с положительной энергией через  $n = Ze^2 / \hbar v$  - чисто мнимое число, не обязательно имеющее целочисленное значение модуля. Мнимость этого числа использована /см. /14/ т. II, с.337/ для получения формулы Резерфорда из общей формулы для квантово-механической амплитуды рассеянной волны.

Автор выражает глубокую благодарность проф. А.А.Тяпкину, указавшему на необходимость дополнительных разъяснений и иллюстраций критерия применимости классической механики в связи с тождественностью классического и квантово-механического выражений для дифференциального сечения рассеяния. Автор благодарит Б.И.Пустыльника за замечания, способствовавшие улучшению изложения.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Mott N.P., Massey H.S.W. "The Theory of Atomic Collisions" Oxford at the Clarendon Press, 1933; Мотт Н., Мессис Г. "Теория атомных столкновений", ОНТИ, Л., М., 1936.
2. Bohr N. Phys.Rev., 1941, 59, p.270.
3. Bohr N. Dan.Mat.Fys.Medd., 1948, 18, n.8 (ed.2-1953); Бор Н. "Прохождение атомных частиц через вещество", ИЛ, М., 1950.
4. Thomson J.J. "Conduction of Electricity through Gases" Cambridge, 1906.
5. Тарантин Н.И. ОИЯИ, Р7-82-184, Дубна, 1982.
6. Blair J.S., Phys.Rev., 1954, 95, p.1218.
7. Гольданский В.И., Ларкин А.И. ЖЭТФ, 1967, 53, с.1032.
8. Josephson B.D. Phys.Lett., 1962, 1, p.251.
9. Breit G. In: "Proceed.Conf.Reactions between Complex Nuclei" Catlinburg, May 5-7, 1958, p.284.
10. Bass R. "Nuclear Reaction with Heavy Ions" Springer-Verlag. Berlin, Heidelberg, New York, 1980.
11. Mayer-Kuckuk T. "Kernphysik", B.G.Teubner, Stuttgart, 1984.
12. Galin J. Journ.Phys., 1976, 37, p.C5-83.
13. Lefort M. Journ.Phys., 1976, 1976, 37, C5-57.
14. Sommerfeld A. "Atombau und Spektrallinien" I, II, Band, Friedr. Vieweg und Sohn. Braunschweig, 1951; Зоммерфельд А. "Строение атом и спектры", ГИТТЛ, М., 1956.
15. Bohr N. Phil Mag. 1913, 26, p.1, 476, 857.

Рукопись поступила в издательский отдел  
12 февраля 1986 года.

**WILL YOU FILL BLANK SPACES IN YOUR LIBRARY?**

You can receive by post the books listed below. Prices - in US \$,  
including the packing and registered postage

D1,2-82-27	Proceedings of the International Symposium on Polarization Phenomena in High Energy Physics. Dubna, 1981.	9.00
D2-82-568	Proceedings of the Meeting on Investigations in the Field of Relativistic Nuclear Physics. Dubna, 1982	7.50
D3,4-82-704	Proceedings of the IV International School on Neutron Physics. Dubna, 1982	12.00
D11-83-511	Proceedings of the Conference on Systems and Techniques of Analytical Computing and Their Applications in Theoretical Physics. Dubna, 1982.	9.50
D7-83-644	Proceedings of the International School-Seminar on Heavy Ion Physics. Alushta, 1983.	11.30
D2,13-83-689	Proceedings of the Workshop on Radiation Problems and Gravitational Wave Detection. Dubna, 1983.	6.00
D13-84-63	Proceedings of the XI International Symposium on Nuclear Electronics. Bratislava, Czechoslovakia, 1983.	12.00
E1,2-84-160	Proceedings of the 1983 JINR-CERN School of Physics. Tabor. Czechoslovakia. 1983.	6.50
D2-84-366	Proceedings of the VII International Conference on the Problems of Quantum Field Theory. Alushta, 1984.	11.00
D1,2-84-599	Proceedings of the VII International Seminar on High Energy Physics Problems. Dubna, 1984.	12.00
D17-84-850	Proceedings of the III International Symposium on Selected Topics in Statistical Mechanics. Dubna, 1984. /2 volumes/.	22.50
D10,11-84-818	Proceedings of the V International Meeting on Problems of Mathematical Simulation, Programming and Mathematical Methods for Solving the Physical Problems, Dubna, 1983	7.50
	Proceedings of the IX All-Union Conference on Charged Particle Accelerators. Dubna, 1984. 2 volumes.	25.00
D4-85-851	Proceedings on the International School on Nuclear Structure. Alushta, 1985.	11.00

Orders for the above-mentioned books can be sent at the address:  
Publishing Department, JINR  
Head Post Office, P.O.Box 79 101000 Moscow, USSR

Тарантин Н.И. P7-86-82  
Критерий Н.Бора относительно применимости классической механики к описанию кулоновского рассеяния заряженных частиц

Напоминается о разработке Н.Бором критерия применимости классической механики при рассмотрении рассеяния заряженных частиц в кулоновском поле ядра:  $\kappa = b/\lambda \gg 1$ , где  $b$  - диаметр соударения,  $\lambda$  - дебройлевская длина волны рассеиваемой частицы. Дан анализ проявления критерия при рассмотрении кулоновского рассеяния заряженных частиц и, в частности, рассеяния, сопровождаемого ядерными реакциями. Обращается внимание на правильность наименования критерия.

Работа выполнена в Лаборатории ядерных реакций ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1986

Перевод О.С.Виноградовой.

Tarantin N.I. P7-86-82  
N.Bohr Criterion Concerning the Applicability of Classical Mechanics to the Description of Charged Particle Coulomb Scattering

It is reminded about the development by N.Bohr of the criterion of using the classical mechanics when considering charged particle scattering in the Coulomb nuclear field:  $\kappa = b/\lambda \gg 1$ , where  $b$  - collision diameter,  $\lambda$  - de Broglie wave length. The analysis of manifestation of the criterion to the consideration of charged particle Coulomb scattering and, in particular, of scattering accompanied by nuclear reactions is given. Attention is paid to the correctness of the criterion name.

The investigation has been performed at the Laboratory of Nuclear Reactions, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1986