

сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

P6-85-405

В.Н.Покровский, И.А.Простаков,¹ Ш.Бриансон,²
В.Б.Бруданин, Ц.Вылов, В.П.Чистяков¹

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ ОЦЕНКИ МАССЫ
АНТИНЕЙТРИНО ИЗ БЕТА-РАСПАДА ТРИТИЯ

¹ Московский инженерно-физический институт

² Центр ядерной спектроскопии и масс-спектрометрии,
Орсэ, Франция

1985

ВВЕДЕНИЕ

Наиболее перспективным методом определения массы антинейтрино, по-видимому, является исследование формы бета-спектра трития в области граничной энергии $\sim 18,6$ кэВ/. Именно этим методом была получена оценка $m_{\bar{\nu}}$ < 35 эВ /см. обзор^{/1/} и приведенные там ссылки/, а в 1980 г. - указание на отличную от нуля массу антинейтрино^{/2/}. Впоследствии авторы^{/3/} уточнили свои результаты, а ряд других групп выдвинул проекты проведения новых экспериментов с использованием различных тритиевых источников и усовершенствованных методов анализа низкоэнергетических бета-спектров.

Тем временем с учетом исключительной важности вывода о ненулевой массе антинейтрино детально анализировались условия эксперимента^{/2/}. При этом были обнаружены некоторые эффекты /см., например,^{/1,4,5/} /, ставящие под сомнение выводы работы^{/2/}. К сожалению, авторы работы^{/3/} ограничились только сообщением об использованном методе и результатах эксперимента, а детальное описание эксперимента до сих пор не опубликовано.

Очевидно, что извлечь информацию о ненулевой массе антинейтрино из формы бета-спектра трития достаточно сложно и возможно в принципе, если справедливы, например, следующие утверждения:

а/ непрерывное распределение электронов дается теорией Ферми для V-A варианта взаимодействия, т.е. только фазовый множитель зависит от величины $m_{\bar{\nu}}$;

б/ атомные эффекты в заселении конечных состояний $^3\text{He}^+$ при распаде трития определяются для конкретного источника с достаточной точностью;

в/ приборная форма линии /ПФЛ/ для бета-частиц трития может быть определена достаточно точно с помощью электронов внутренней конверсии /ЭВК/ градуировочного источника;

г/ фон в масс-чувствительной области не зависит от энергии и легко контролируется;

д/ статистическая процедура обработки экспериментальных данных выбрана корректно.

Заметим, что вклад в изменение формы спектра при нарушении подобных предположений сравним, а может быть и больше вклада $m_{\bar{\nu}} \neq 0$ в области граничной энергии трития.

Поэтому представляется естественным провести вычислительный эксперимент относительно чувствительности измерения массы антинейтрино в идеальном случае, когда все параметры, кроме $m_{\bar{\nu}}$ и граничной энергии бета-спектра, заранее известны, и тем са-

мым проверить корректность статистической процедуры и получить требования к точности, с которой указанные выше проблемы должны быть исследованы. В результате можно получить верхнюю границу точности определения m_{ν} при заданных условиях. С другой стороны, при заданной величине m_{ν} можно определить условия, в которых должен быть проведен эксперимент. Это имеет существенное значение при планировании новых экспериментов.

В настоящей работе описывается математическая модель процесса измерения бета-спектра трития и приводятся первые результаты такого вычислительного эксперимента. Рассмотрены вопросы, связанные с корреляцией получаемых оценок и смещениями оценок при неправильной модели функции отклика,

1. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Для статистической обработки спектров в вычислительном эксперименте применяется основанная на методе максимального правдоподобия математическая модель обработки спектрометрических экспериментов^{/8/}. Найденные в эксперименте или при моделировании числа отсчетов в каналах $n_i / i = 1, \dots, K$, где K - число каналов спектрометра/ можно рассматривать как компоненты случайного вектора \vec{n} . Вероятность получения какого-либо набора $\{n_i\}$ можно определить либо с помощью распределения Пуассона, либо перейти к нормированному случаю, т.е. к распределению чисел отсчетов в каналах /ячейках гистограммы/ при условии, что общее число отсчетов равно $N = \sum_i n_i$. Это распределение будет полиномиальным:

$$P(\eta_i = n_i, i=1, \dots, K | \sum_i n_i = N) = \frac{N!}{n_1! \dots n_K!} \prod_{i=1}^K p_i^{n_i} \quad /1/$$

где p_i - вероятность появления отсчета в i -м канале ($\sum_i p_i = 1$).

При этом в общем случае p_i зависит от вектора независимых переменных \vec{x}_i , вектора оцениваемых параметров $\vec{\theta}$ и вектора априорно известных параметров \vec{a} .

Заметим, что использование полиномиального распределения имеет то преимущество, что позволяет сосредоточиться на изучении формы спектра, т.е. на сравнении относительных экспериментальных частот заполнения каналов n_i/N с вероятностями p_i , и исключить из числа рассматриваемых параметров величину, связанную с активностью источника. При этом оценки параметров получают из условия максимума функции

$$\ln L = \sum_{i=1}^K n_i \ln p_i \quad /2/$$

а элементы матрицы, обратной ковариационной матрице оценок, имеют вид

$$C_{j\ell}^{-1} = N \sum_{i=1}^K \frac{1}{p_i} \frac{\partial p_i}{\partial \theta_j} \frac{\partial p_i}{\partial \theta_{\ell}} \quad /3/$$

Величину p_i можно выразить через нормированные вероятности a_i, b_i заполнения i -го канала истинным или фоновым событием

$$p_i = \frac{\gamma}{1+\gamma} a_i + \frac{1}{1+\gamma} b_i \quad /4/$$

где γ - отношение эффект/фон во всем измеряемом диапазоне энергий от E_{\min} до $E_{\max} = E_{\min} + K\Delta$ / Δ - ширина канала/.

Предполагая спектрометр линейным, а эффективность регистрации электронов и фон постоянными в диапазоне энергий $[E_{\min}, E_{\max}]$, получим

$$b_i = 1/K \quad /5/$$

Предположим далее, что непрерывное распределение электронов дается V-A вариантом взаимодействия. Тогда для компоненты с граничной кинетической энергией T_0 можем записать

$$S_0(E; T_0, m_{\nu}) = F(Z, \xi) \sqrt{E(E+2m_0c^2)} (E+m_0c^2) \times \\ \times (T_0 + m_{\nu}c^2 - E) \sqrt{(T_0 - E)(T_0 - E + 2m_{\nu}c^2)}, \quad /6/$$

где E - кинетическая энергия электрона, m_0 - его масса покоя, $F(Z, \xi)$ - кулоновский фактор /функция Ферми/, $\xi = E + m_0c^2$.

При наличии нескольких компонент бета-спектра, соответствующих распаду на возбужденные конечные состояния с энергиями возбуждения E_j^* / $j = 0, \dots, J$; $E_0^* = 0$ /, результирующий спектр будет иметь вид

$$S(E) = \sum_{j=0}^J A_j w_j S_0(E; T_j, m_{\nu}), \quad /7/$$

где A_j - нормировочная константа, w_j - вероятность соответствующей ветви распада, $T_j (= T_0 - E_j^*)$ - граничная кинетическая энергия компоненты; заметим, что $S_0(E; T_j, m_{\nu}) = 0$ при $E \geq T_j$. Кроме того, расчеты величин

$$A_j^{-1} = \int_0^{T_j} S_0(E; T_j, m_{\nu}) dE, \quad /8/$$

проведенные при E_j^* и m_{ν} , изменяющихся в пределах от 0 до 50 эВ, показывают, что значения A_j изменяются при этом менее чем на 1%. Поэтому в дальнейших расчетах они были опущены.

Если функция отклика спектрометра /приборная форма линии/ имеет вид $G(E, E')$, то для ненормированной вероятности попадания отсчета в i -й канал можно записать

$$q_i = \int_{E_1}^{E_{i+1}} \int_0^{T_0} S(E) G(E, E') dE dE', \quad /9/$$

где E_1 - /левая/ граница i -го канала. Окончательно, учитывая, что эффективность регистрации электронов предполагается независимой от энергии, имеем

$$a_i = q_i / \sum_{i=1}^K q_i. \quad /10/$$

В вычислительном эксперименте ради простоты принято, что исследуется бета-спектр атомарного трития, и использована двухуровневая аппроксимация возбужденных состояний из [7]:

$$E_0^* = 0, \quad w_0 = 0,7; \quad E_1^* = 43 \text{ эВ}, \quad w_1 = 0,3. \quad /11/$$

Кроме того, функция отклика спектрометра бралась в виде гауссиана

$$G(E, E') = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{(E-E')^2}{2\sigma^2}\right], \quad /12/$$

что позволило упростить вычисление q_i .

Таким образом, в нашем случае вектор независимых переменных \bar{x}_i имеет единственную компоненту - энергию E_i , а параметрами модели являются граничная энергия электронов T_0 , масса антинейтрино m_{ν} , граница измеряемого диапазона энергий E_{\min} , ширина канала Δ , число каналов K , полная ширина линии на полувысоте $R = 2\sqrt{2 \ln 2} \sigma$, суммарное число отсчетов N , отношение эффект/фон γ , энергия возбужденного состояния E_1^* и вероятность перехода на него w_1 .

2. СХЕМА ПРОВЕДЕНИЯ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОГО ЭКСПЕРИМЕНТА

На основе описанной выше модели процесса измерений и процедуры статистической обработки было создано программное обеспечение вычислительного эксперимента, состоящего из следующих этапов:

1/ Ввод истинных значений всех модельных параметров и указание вектора оцениваемых параметров θ . Настоящая работа посвящена оцениванию величин $m_{\nu} (= \theta_1)$ и $T_0 (= \theta_2)$.

2/ Получение модельных спектров. По заданному набору параметров с помощью соотношений /4/-/12/ путем численного интегрирования находятся величины p_i , а затем моделируется спектр - величины q_i . Возможны два способа такого моделирования:

- моделирование случайного вектора с полиномиальным распределением путем проведения N статистических испытаний с датчиком равномерно распределенных чисел;

- при больших N для независимого пуассоновского заполнения каналов можно использовать нормально распределенные случайные числа со средними $Mq_i = Np_i$, дисперсиями $Dq_i = Np_i(1-p_i)$ и последующей перенормировкой к заданному N .

3/ Ввод значений фиксированных параметров. Если эти значения совпадают с заданными на первом этапе, то можно говорить о "правильной" модели обработки.

4/ Статистическая обработка спектров. Поскольку число оцениваемых параметров невелико, максимум функционала максимального правдоподобия /2/ ищется путем численного перебора его значений на сетке с аргументами m_{ν} , T_0 . При правильной модели обработки варьирование проводится в узком диапазоне значений, определяемом только статистическим разбросом. При неправильной модели обработки из-за возможного смещения оценок варьирование проводится с последовательным уменьшением шага на сетке. В последующем предполагается использовать методы нелинейной оптимизации с привлечением средств машинной геометрии и графики.

5/ Получение выборочных оценок $\bar{\theta}_1$, $\bar{\theta}_2$ и их ковариационных характеристик. Повторяя моделирование и обработку спектров L раз, по полученному набору оценок $\{\theta_{i\ell}^*, \theta_{j\ell}^*\}$ можно определить выборочные средние

$$\bar{\theta}_i = \frac{1}{L} \sum_{\ell=1}^L \theta_{i\ell}^* \quad /13/$$

и выборочную ковариационную матрицу

$$\bar{C}_{ij} = \frac{1}{L-1} \sum_{\ell=1}^L (\theta_{i\ell}^* - \bar{\theta}_i)(\theta_{j\ell}^* - \bar{\theta}_j), \quad /14/$$

где $i = 1, 2; j = 1, 2$.

Вычислительный эксперимент проводится на ЭВМ СМ-4 и ЕС-1040. Отметим, что для визуализации полученных наборов данных и т.п. широко использовалась диалоговая графическая система PLOT [8].

3. СВОЙСТВА ОЦЕНОК m_{ν} И T_0 ПРИ ПРАВИЛЬНОЙ МОДЕЛИ ОБРАБОТКИ

На первом этапе вычислительного эксперимента свойства оценок при правильной модели обработки исследовались для довольно больших значений суммарного числа отсчетов $N = 400000$ и отношения эффект/фон $\gamma = 10$. В качестве примера на рис.1 при-

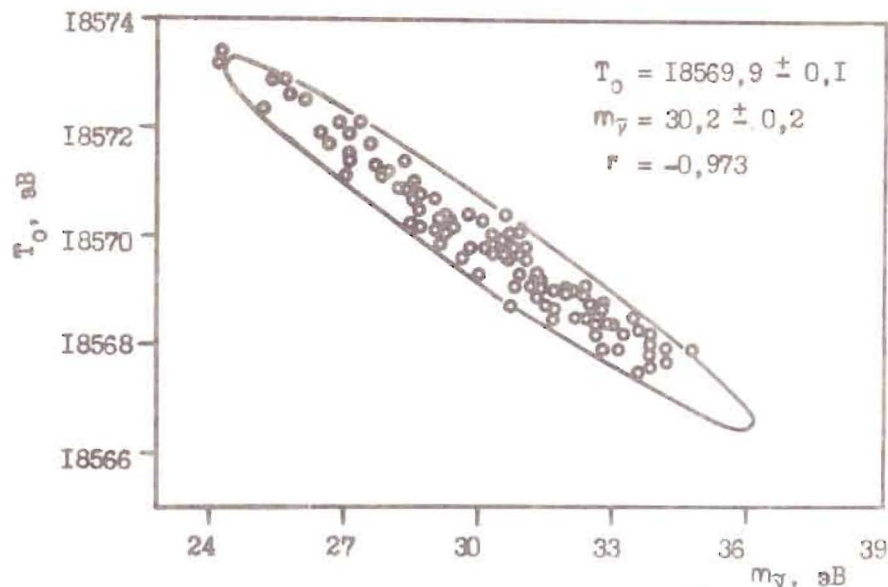


Рис. 1. Совместное распределение оценок m_{ν}^* , T_0^* для выборки объемом $L = 100$. Значения модельных параметров: $m_{\nu} = 30$ эВ; $T_0 = 18570$ эВ; $R = 45$ эВ; $\gamma = 10$; $E_1^* = 43$ эВ; $w_1 = 0,3$; $N = 400000$; $K = 50$; $E_{\min} = 18400$ эВ; $E_{\max} = 18600$ эВ.

ведено совместное распределение оценок m_{ν}^* , T_0^* в выборке объемом $L = 100$, полученных при шаге на сетке, равном $0,1$ эВ. Эллипс, построенный по выборочным характеристикам, ограничивает 95% доверительный интервал. В данном случае были получены следующие оценки /при истинных значениях $m_{\nu} = 30$ эВ, $T_0 = 18570$ эВ/:

средние значения $\bar{m}_{\nu} = 30,2$ эВ; $\bar{T}_0 = 18569,9$ эВ
 стандартные выборочные отклонения $s_m = 2,3$ эВ; $s_T = 1,3$ эВ; /15/
 коэффициент корреляции $r = -0,973$.

Здесь, как и в других выборках, прежде всего обращает на себя внимание сильная корреляция между оценками m_{ν} , T_0 . Вместо величин m_{ν} и T_0 , являющихся параметрами спектра /6/, вообще говоря, можно воспользоваться величинами $E_0 (= T_0 + m_{\nu} c^2)$ и m_{ν} либо E_0 и T_0 . Тогда соотношение /6/ должно быть заменено соответственно на

$$S_0(E; E_0, m_{\nu}) \sim (E_0 - E) \sqrt{(E_0 - E)^2 - (m_{\nu} c^2)^2} \quad /16/$$

или

$$S_0(E; E_0, T_0) \sim (E_0 - E) \sqrt{(E_0 - E)^2 - (E_0 - T_0)^2} \quad /17/$$

Для всех параметризаций были вычислены ковариационные матрицы /3/. Полученные значения стандартных отклонений /при $N = 400000$ / и коэффициентов корреляции сведены в таблице. В скобках приведены значения стандартных отклонений для третьего параметра, которые могут быть найдены с помощью соотношения $E_0 = T_0 + m_{\nu} c^2$. Как видно, с точки зрения достижимой точности результатов нет оснований для предпочтения какой-либо из параметризаций.

Таблица

Стандартные отклонения /в эВ/ и коэффициенты корреляции оценок при различных параметризациях

	Параметризация		
	m_{ν}, T_0	m_{ν}, E_0	E_0, T_0
σ_m	2,20	2,20	/2,20/*
σ_T	1,27	/1,27/*	1,27
σ_E	/1,00/*	1,00	1,00
ρ	-0,975	+0,959	-0,872

* Оценено с помощью соотношения $E_0 = T_0 + m_{\nu} c^2$.

Далее, при любом выборе параметров получаемые оценки всегда сильно коррелированы. Заметим, что положительная корреляция оценок E_0 , m_{ν} объясняет поведение этих параметров в зависимости от номера серии в эксперименте /2/, отмеченное в обзоре /1/. Укажем также на близость теоретических и выборочных /15/ оценок стандартных отклонений и корреляций.

Наконец, возможное систематическое смещение оценок если и существует, то мало и не превышает стандартного отклонения средних значений.

4. СМЕЩЕНИЯ ОЦЕНОК m_{ν}, T_0 ПРИ НЕПРАВИЛЬНОЙ МОДЕЛИ ФУНКЦИИ ОТКЛИКА СПЕКТРОМЕТРА

В работе /4/ указано, что использование при обработке значения полуширины R_c вместо истинного значения R должно приводить

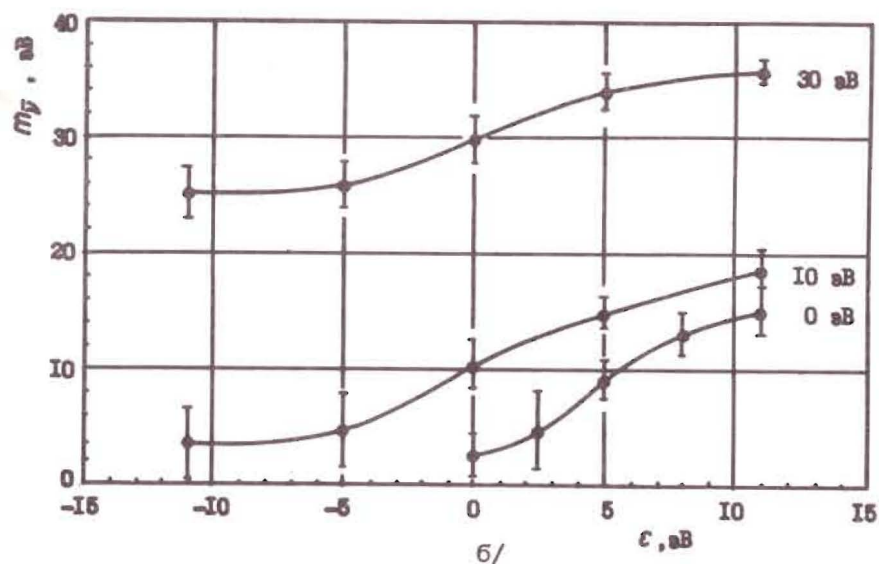
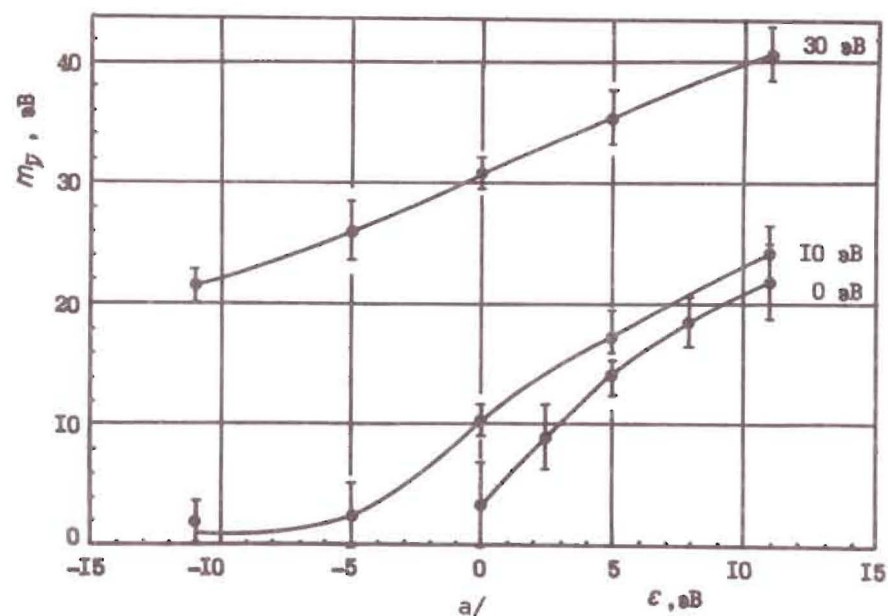


Рис.2. Зависимость оценки $\bar{m}_{\bar{\nu}}$ от величины $\epsilon = R_f - R$ для $m_{\bar{\nu}}^0 = 0, 10, 30$ эВ: а/ $R = 45$ эВ, б/ $R = 20$ эВ. Остальные модельные параметры те же, что и для рис.1.

к смещению оценки $m_{\bar{\nu}}$, и предложена приближенная формула для определения такого смещения:

$$\bar{m}_{\bar{\nu}}^2 - m_{\bar{\nu}}^2 \approx 2 \epsilon R, \quad /18/$$

где $\bar{m}_{\bar{\nu}}$ - оценка, а $m_{\bar{\nu}}$ - истинное значение массы антинейтрино; $\epsilon = R_f - R$.

Вычислительный эксперимент, аналогичный описанному выше, был проделан при $m_{\bar{\nu}}^0 = 0, 10$ и 30 эВ для двух значений $R/20$ и 45 эВ/ и ряда значений ϵ . Его результаты изображены на рис.2. Видно, что количественные расчеты подтверждают качественные предположения о смещениях оценки $m_{\bar{\nu}}$: при $\epsilon > 0$ оценка массы антинейтрино превышает истинное значение, а $\epsilon < 0$ приводит к ее занижению. Приближенная формула /18/ качественно передает ход зависимости $\bar{m}_{\bar{\nu}}$ от ϵ , хотя и дает завышенные значения смещения оценок.

Отметим, что при $\bar{m}_{\bar{\nu}} = 0$ возникает дополнительное смещение оценок, связанное с условием $m_{\bar{\nu}} \geq 0$ при обработке спектра.

Что касается оценок T_0 , то при смещении оценки $m_{\bar{\nu}}$ они получают противоположное по знаку и близкое по величине смещение, как этого и следует ожидать при сильной отрицательной корреляции указанных оценок.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Созданный программный комплекс вычислительного эксперимента позволяет исследовать зависимости свойств оценок как от различных физических параметров, таких, например, как атомные эффекты в веществе источника или форма линии спектрометра, так и от других факторов, например, от способов получения оценок. Ведутся работы по применению средств машинной графики для анализа функции правдоподобия и поиска оценок, а также работы по планированию реального эксперимента на основе данных вычислительного эксперимента.

Авторы благодарны Д.Г. Хорюшину за помощь в проведении вычислительного эксперимента.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вылов Ц. ОИЯИ, Р6-83-517, Дубна, 1983.
2. Любимов В.А. и др. ЖЭТФ, 1981, 81, с.1158.
3. Boris S. et al. In: Proc. of the Europ. Physical Society NER 83, Brighton, England, 1983, p.386.
4. Simpson J.J. Phys.Rev., 1984, D30, p.1110.
5. Ching Cheng-sui, Ho Tso-Hsin. Phys.Rep., 1984, 112, p.1.

6. Простаков И.А. и др. В кн.: Автоматизация эксперимента в физических исследованиях. Энергоатомиздат, М., 1984, с.48.
7. Bergkist K.E. Nucl.Phys., 1972, B39, p.317.
8. Бруданин В.Б. и др. ОИЯИ, P10-85-117, Дубна, 1985.

В Объединенном институте ядерных исследований начал выходить сборник "Краткие сообщения ОИЯИ". В нем будут помещаться статьи, содержащие оригинальные научные, научно-технические, методические и прикладные результаты, требующие срочной публикации. Будучи частью "Сообщений ОИЯИ", статьи, вошедшие в сборник, имеют, как и другие издания ОИЯИ, статус официальных публикаций.

Сборник "Краткие сообщения ОИЯИ" будет выходить регулярно.

The Joint Institute for Nuclear Research begins publishing a collection of papers entitled *JINR Rapid Communications* which is a section of the JINR Communications and is intended for the accelerated publication of important results on the following subjects:

- Physics of elementary particles and atomic nuclei.
- Theoretical physics.
- Experimental techniques and methods.
- Accelerators.
- Cryogenics.
- Computing mathematics and methods.
- Solid state physics. Liquids.
- Theory of condensed matter.
- Applied researches.

Being a part of the JINR Communications, the articles of new collection like all other publications of the Joint Institute for Nuclear Research have the status of official publications.

JINR Rapid Communications will be issued regularly.



Рукопись поступила в издательский отдел
30 мая 1985 года.

Принимается подписка на препринты и сообщения Объединенного института ядерных исследований.

Установлена следующая стоимость подписки на 12 месяцев на издания ОИЯИ, включая пересылку, по отдельным тематическим категориям:

ИНДЕКС	ТЕМАТИКА	Цена подписки на год
1.	Экспериментальная физика высоких энергий	10 р. 80 коп.
2.	Теоретическая физика высоких энергий	17 р. 80 коп.
3.	Экспериментальная нейтронная физика	4 р. 80 коп.
4.	Теоретическая физика низких энергий	8 р. 80 коп.
5.	Математика	4 р. 80 коп.
6.	Ядерная спектроскопия и радиохимия	4 р. 80 коп.
7.	Физика тяжелых ионов	2 р. 85 коп.
8.	Криогеника	2 р. 85 коп.
9.	Ускорители	7 р. 80 коп.
10.	Автоматизация обработки экспериментальных данных	7 р. 80 коп.
11.	Вычислительная математика и техника	6 р. 80 коп.
12.	Химия	1 р. 70 коп.
13.	Техника физического эксперимента	8 р. 80 коп.
14.	Исследования твердых тел и жидкостей ядерными методами	1 р. 70 коп.
15.	Экспериментальная физика ядерных реакций при низких энергиях	1 р. 50 коп.
16.	Дозиметрия и физика защиты	1 р. 90 коп.
17.	Теория конденсированного состояния	6 р. 80 коп.
18.	Использование результатов и методов фундаментальных физических исследований в смежных областях науки и техники	2 р. 35 коп.
19.	Биофизика	1 р. 20 коп.

Подписка может быть оформлена с любого месяца текущего года.

По всем вопросам оформления подписки следует обращаться в издательский отдел ОИЯИ по адресу: 101000 Москва, Главпочтамт, п/я 79.

Покровский В.Н. и др.
О некоторых свойствах оценки массы антинейтрино из бета-распада трития

P6-85-405

С целью изучения свойств оценки массы антинейтрино из бета-распада трития проведен вычислительный эксперимент. Рассмотрен идеальный случай, когда известны все параметры /соотношение эффект/фон, функция отклика, атомные эффекты и т.д./, кроме массы антинейтрино $m_{\bar{\nu}}$ и граничной кинетической энергии бета-спектра T_0 . Математическая модель обработки основана на методе максимального правдоподобия. Полученные оценки $m_{\bar{\nu}}$ и T_0 оказываются сильно коррелированными. Как показано вычислениями теоретической ковариационной матрицы, высокая степень корреляции сохраняется и при других возможных параметризациях спектра / $m_{\bar{\nu}}$ и $E_0 = T_0 + m_{\bar{\nu}}$ либо E_0 и T_0). Исследовано также смещение оценок $m_{\bar{\nu}}$, T_0 при использовании на стадии обработки неправильного значения разрешения спектрометра.

Работа выполнена в Лаборатории ядерных проблем ОИЯИ,

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1985

Перевод О.С.Виноградовой

Pokrovsky V.N. et al.
On Some Properties of Antineutrino Mass Estimate from Beta-Decay of Tritium

P6-85-405

The computer experiment on investigation of properties of antineutrino mass estimate from beta-decay of tritium has been carried out. The ideal case is considered, when all parameters (the ratio effect/background, the response function, the atomic effects etc.) are known except of antineutrino mass $m_{\bar{\nu}}$ and beta-spectrum kinetic energy end-point T_0 . The mathematical model of data treatment is based on the method of maximal likelihood. The estimates of $m_{\bar{\nu}}$ and T_0 so obtained are highly correlated. This high correlation remains and with other possible parametrizations ($m_{\bar{\nu}}$ and $E_0 = T_0 + m_{\bar{\nu}}$ or E_0 and T_0) as well. The bias of $m_{\bar{\nu}}$, T_0 estimates under using a wrong value of spectrometer resolution is also investigated.

The investigation has been performed at the Laboratory of Nuclear Problems, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1985