4507/2-76

СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

ДУБНА

Р5 - 9980

Е.П.Жидков, Б.Н.Хоромский, Е.Х.Христов

О НЕПРЕРЫВНОМ АНАЛОГЕ МЕТОДА НЬЮТОНА В ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ ТЕОРИЙ РАССЕЯНИЯ

1976

P5 - 9980

Е.П.Жидков, Б.Н.Хоромский, Е.Х.Христов

О НЕПРЕРЫВНОМ АНАЛОГЕ МЕТОДА НЬЮТОНА В ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ ТЕОРИЙ РАССЕЯНИЯ

P5 - 9980

Жидков Е.П. и др.

О непрерывном аналоге метода Ньютона в обратной задаче теории рассеяния

Получены нелокальные условия сходимости непрерывного аналога метода Ньютона в обратной задаче теорий рассеяния. Обоснован метод Эйлера приближенного нахождения потенциала по фазе рассеяния.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований

Дубна 1976

P5 - 9980

Zhidkov E.P. et al.

On Continuous Analog of Newton's Method in Inverse Scattering Problem

There are obtained a nonlocal conditions for convergency of the continuous analog of Newton's method in the inverse scattering problem. It is given proof of iterative Euler's method for approximate constraction of the potential in the schrödinger equation from the plase shift.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research

Dubna 1976

ВВЕДЕНИЕ

Рассматривается обратная задача квантовой теории рассеяния для краевой задачи, определяемой радиальным уравнением Шредингера

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + (k^2 - v(x))y = 0, \quad 0 \le x < \infty \tag{0.I}$$

и краевым условием

$$y(0,k) = 0. \tag{0.2}$$

Потенциал $v(x)$ в (0.I) предполагается элементом вещественного Банахова пространства X с нормой

$$\|v\| = \int_0^\infty x|v(x)|dx < \infty. \tag{0.3}$$

Пусть $f_v(x,k)$ – решение уравнения (0.I), определяемое условием $\lim_{x\to\infty} f_v(x,k)e^{-ikx} = 1$; а $f_v(k) = f_v(0,k)$, $(\mathrm{Im}\,k \ge 0)$, $S_v(k) = f_v(-k)/f_v(k)$, $(-\infty < k < \infty)$ соответственно функция Йоста и функция рассеяния задачи (0.I),(0.2). Хорошо известно, что при условии (0.3) функция Йоста $f_v(k)$ имеет конечное число простых нулей $i\varkappa_j$ $(j=1,2,\dots,N)$, $\varkappa_j > 0$, квадраты которых есть собственные числа задачи (0.I),(0.2), а набор величин

$$s(v)=\{S_v(k),(-\infty<k<\infty);\ \varkappa_j(v)\ ;\ m_j^2=\{\int_0^\infty f^2(x,i\varkappa_j)dx\}^{-1},j=1..N\}\quad(0.5)$$

называемых данными рассеяния краевой задачи (0.I),(0.2), удовлетворяет условиям (/I/, гл.3,§2):

$$S_v(k)=\overline{S_v(-k)}=[S_v(-k)]^{-1},\ N=\frac{\ln S_v(+0)-\ln S_v(+\infty)}{2\pi i}-\frac{1-S_v(0)}{4};\quad(0.6)$$

$$F_{S_v}(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}[1-S_v(k)]e^{ikx}dk\in L^1(-\infty,\infty),\ xF'_{S_v}(x)\in L^1(0,\infty).\quad(0.7)$$

Определим в пространстве X оператор

$$\Psi(v)=4F'_v(2x)\ ,(0<x<\infty),\ ('=\frac{d}{dx}),\quad(0.8)$$

где функция $F_v(x)$ находится по $s(v)$ (0.5) формулой

$$F_v(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}[1-S_v(k)]e^{ikx}dk+\sum_{j=1}^{N}m_j^2(v)e^{-\varkappa_j(v)x},\ 0<x<\infty.\quad(0.9)$$

Область значений оператора Ψ в силу (0.7) содержится в X.

Из основополагающих результатов В.А.Марченко по обратной задаче теорий рассеяния (/I/,гл.3,§3) вытекает, в частности, что,если по некоторому набору величин

$$s_*=\{S_*(k),(-\infty<k<\infty),\ \varkappa_{j*}\ ;\ m_{j*}^2\ ;\ (j=1,2,\dots,N\}\quad(0.10)$$

(где $S_*(k)$ удовлетворяет (0.6),(0.7), а $\varkappa_{j*}$, m_{j*}^2 $(j=1,\dots,N)$ - $2N$ положительных числа, первые N из которых различные), построена формулой (0.9) функция $F_*(x)$, то операторное уравнение

$$Q(v)\equiv\Psi(v)-f_*=0\quad,\ (f_*=4F'_*(2x)),\quad(0.11)$$

имеет в пространстве X единственное решение v_*, для которого данные рассеяния (0.5) краевой задачи (0.I), (0.2) с $v=v_*$ являются s_* (0.10).

Такая постановка обратной задачи рассеяния удобна для применения некоторых общих методов решения нелинейных функциональных

уравнений. Пусть

$$\Omega_v=\{v\in X\mid f_v(k)\neq 0,\ \operatorname{Im}k\geq 0\}\ ;\ \Omega^+_{F'}=\Psi(\Omega_v).\quad(0.12)$$

При $v\in\Omega_v$ и $f_*\in\Omega^+_{F'}$ уравнение (0.II) упрощается, а именно:

$$Q(v)=\Psi(v)-f_*\equiv-\frac{d}{dx}\int_{-\infty}^{\infty}[S_v(k)-S_*(k)]e^{2ikx}=0,\ x>0,\quad(0.13)$$

т.е. оператор $\Psi(v)$, определяемый (0.8),(0.9), редуцируется на

$$\Psi(v)=4F'_{S_v}(2x),\ v\in\Omega_v\ ;\ a\ f_*=4F'_{S_*}(2x),\quad(0.14)$$

где функции $S_v(k)$ и $S_*(k)$ удовлетворяют (0.6) при $N=0$ и, кроме того, $S_v(0)=S_*(0)=1$. В этом случае краевая задача (0.I),(0.2) восстанавливается однозначно по одной лишь функции рассеяния. Искомый потенциал v_* можно получить, следуя /2/, как предел

$$\lim_{t\to\infty}\|v(t)-v_*\|=0\quad(0.15)$$

решения $v(t)$ (t - вещественный параметр) следующей задачи Коши

$$\frac{dv}{dt}=-[\Psi'(v(t))]^{-1}Q(v(t)),\ 0\leq t<\infty,\ v(0)=v_0,\quad(0.16)$$

где $\Psi'(v)$ - производная Фреше оператора Ψ (0.I4) в точке v, $Q(v)$ - определяется (0.I3), а v_0 - заданное "начальное приближение", априорно предполагаемое достаточно близким к v_*. Уравнение (0.I6), определяющее непрерывный аналог метода Ньютона /3/, в рамках единого подхода к численному решению широкого круга нелинейных задач физики /4/, впервые применялось к задаче о расчете потенциала по фазе рассеяния в /5/.

Целью настоящей работы является расширение областей "начальных значений" v_0 задачи (0.I6), для которых существует (0.I5) и обоснование метода Эйлера приближенного интегрирования уравнения (0.I6). Оба вопроса существенны, главным образом, при численных расчетах, так как (0.I6) допускает запись

$$\frac{\partial \upsilon(x,t)}{\partial t}=\frac{1}{\pi}\frac{\partial}{\partial x}\int_{-\infty}^{\infty}\{S_*(k)-S_{\upsilon(t)}(k)\}f^2_{\upsilon(t)}(x,k)dk,\ 0\le t<\infty;\ \upsilon(x,0)=\upsilon_0(x),\quad (0.\mathrm{I7})$$

где $f_\upsilon(x,k)$ и $S_\upsilon(k)$ определяются (0.4), что позволяет строить простые алгоритмы для решения обратной задачи рассеяния на ЭВМ /2,5,6/.

§ I. Области сходимости

Здесь получены некоторые нелокальные условия сходимости для задачи Коши (0.I6), которые определенным образом расширяют множество начальных значений, приведенное в теореме 5.2/2/.

Теорема I.I. Пусть ограниченная область $G\subset\Omega_\upsilon$ и ∂G – ее граница, а υ_* – решение уравнения (0.I3). Тогда необходимым и достаточным условием для того, чтобы $\upsilon_*\in G$ является существованием хотя бы одного $\upsilon_0\in G$, для которого

$$\|Q(\upsilon_0)\|\le d=\inf_{\upsilon\in\partial G}\|Q(\upsilon)\|, \quad (\mathrm{I.I})$$

где $d>0$ при $\upsilon_*\bar\in\partial G$. Если $\upsilon_*\in G$, то множество

$$\Omega_{\upsilon_0}(G)=\{\upsilon_0\in X\mid \|Q(\upsilon_0)\|\le d\}\subset G, \quad (\mathrm{I.2})$$

и для всех $\upsilon_0\in\Omega_{\upsilon_0}(G)$ решение $\upsilon(t)$ задачи (0.I6) при всех $t\in[0,\infty)$ существует, принадлежит G и $\lim_{t\to\infty}\upsilon(t)=\upsilon_*$, причем, если $G_1\supset G$, то $\Omega_{\upsilon_0}(G_1)\supseteq\Omega_{\upsilon_0}(G)$.

Следствие. Для того, чтобы $\upsilon_*\bar\in G$, необходимо и достаточно, чтобы

$$\inf_{\upsilon\in G}\|Q(\upsilon)\|\ge\inf_{\upsilon\in\partial G}\|Q(\upsilon)\|.$$

Замечание. Область $\Omega_{\upsilon_0}(G)$ допустимых начальных значений для задачи (0.I6) можно расширить, заменяя условие (I.I) на более слабое/7/

$$\|Q(\upsilon_0)\|-B^{-1}\inf_{\upsilon\in\partial G}\|\upsilon-\upsilon_0\|\le\inf_{\upsilon\in\partial G}\|Q(\upsilon)\|, \quad (\mathrm{I.3})$$

где $B=\sup_{\upsilon\in G}\|[\Psi'(\upsilon)]^{-1}\|_{[X\to X]}<\infty$,

в силу (2.8),(2.I2). (Первый индекс в нашей нумерации означает номер параграфа.)

Доказательству теоремы I.I предпошлем две леммы.

Лемма I. Производная Фреше $\Psi'(\upsilon)$ оператора $\Psi(\upsilon)$ (0.I4) как операторная функция от υ непрерывна в Ω_υ и ограничена в окрестности каждой точки $\upsilon\in\Omega_\upsilon$. (Утверждение леммы в силу существования локально ограниченной производной Гато $\Psi''(\upsilon)$ (что утверждается в теореме 3.I/2/), является прямым следствием формулы конечных приращений. Здесь приведено прямое доказательство искомого утверждения, так как доказательство указанного свойства $\Psi''(\upsilon)$ не было опубликовано в/2/.)

Доказательство. Для оператора $\Psi'(\upsilon)$ при любом $\upsilon\in\Omega_\upsilon$ справедливо представление (/2/ теорема 3.I).

$$\Psi'(\upsilon)=(I+\Gamma(\upsilon))(I+P(\upsilon)), \quad (\mathrm{I.4})$$

где операторы $I+\Pi(\upsilon)=(I+\Gamma(\upsilon))^{-1}$ и $I+P(\upsilon)$ являются ограниченными интегральными операторами из X в X, ядра которых выражаются посредством ядер $K_\upsilon(x,t)$ и $L_\upsilon(x,t)$ операторов преобразований (3.I),(3.2) следующим образом:

$$(I+\Pi(\upsilon))g=g(x)+\int_x^\infty\Pi_\upsilon(t-x)g(t)dt,\ 0<x<\infty,\ g\in X, \quad (\mathrm{I.5})$$

$$(I+P(\upsilon))g=g(x)-\int_x^\infty P_\upsilon(x,t)g(t)dt,\ 0<x<\infty,\ g\in X, \quad (\mathrm{I.6})$$

где $\Pi_v(t) = 2L_v(t) + \int_0^t L_v(s)L_v(t-s)\,ds$, $L_v(t) = L_v(0,t)$, $0<t<\infty$, (I.7)

$$P_v(x,t) = \operatorname{sign}(t-2x)\,K_v\left(\tfrac{t}{2}, \tfrac{|t-2x|}{2}\right) + \int_x^t K_v\left(\tfrac{t}{2}, \tfrac{u}{2}\right) K_v\left(\tfrac{t}{2}, \tfrac{|u-2x|}{2}\right)\operatorname{sign}(u-2x)\,du. \quad (I.8)$$

Следовательно, для доказательства леммы достаточно показать непрерывность каждого из сомножителей в (I.4). Из (I.5),(I.7) вытекает, что

$$\|\Pi(v+h) - \Pi(v)\|_{[X\to X]} = \sup_{\|g\|\le 1} \|(\Pi(v+h) - \Pi(v))g\| \le \sup_{g} \int_0^\infty \int_x^\infty |\Pi_{v+h}(t-x) - \Pi_v(t-x)||g(t)|\,dt\,dx \le$$

$$\le \int_0^\infty |\Pi_{v+h}(x) - \Pi_v(x)|\,dx \le \int_0^\infty |L_{v+h}(t) - L_v(t)|\,dt\left\{2 + \int_0^\infty \{|L_{v+h}(t)| + |L_v(t)|\}\,dt\right\}.$$

Оценивая правую сторону в последнем неравенстве с помощью (3.I2), (3.I6) получаем

$$\|\Pi(v+h) - \Pi(v)\|_{[X\to X]} \le \|h\|\{1 + \|v+h\|e^{\|v+h\|}\}\{e^{2\|v\|} + e^{\|v\|+\|v+h\|}\} \quad (I.9)$$

при любых $v,\ v+h \in X$. Так как при $v \in \Omega_v$ имеем $(I + \Pi(v))^{-1} = I + \Gamma(v)$ и $\|I + \Gamma(v)\|_{[X\to X]} < \infty$ (/2/ лемма 3.3), то из (I.9) по теореме об обратном операторе следует непрерывность оператора $\Gamma(v)$ в любой точке $v \in \Omega_v$. Из (I.6) имеем

$$\|P(v+h) - P(v)\|_{[X\to X]} \le \sup_{0\le t<\infty} \int_0^t |P_{v+h}(x,t) - P_v(x,t)|\,dx. \quad (I.10)$$

Представление (I.8) вместе с оценками (3.5),(3.9) дает

$$|P_{v+h}(x,t) - P_v(x,t)| \le (1 + \|v+h\|e^{\|v+h\|})\left\{\int_{(t-|t-2x|)/4}^{t/2} (|h(s)| + \|h\|e^{\|v\|}|v(s)|)\,ds + \right.$$

$$+ e^{\|v+h\|}\int_x^t \left(\int_{(t-u)/4}^{t/2} (|h(s)| + \|h\|e^{\|v\|}|v(s)|)\,ds\right)\left(\int_{(t-|u-2x|)/4}^{t/2} |v(s)+h(s)|\,ds\right) du +$$

$$+ e^{\|v\|}\int_x^t \int_{(t-u)/4}^{t/2} |v(s)|\,ds \left(\int_{(t-|u-2x|)/4}^{t/2} (|h(s)| + \|h\|e^{\|v\|}|v(s)|)\,ds\right) du, \quad t \le x.$$

Отсюда с помощью следующих неравенств:

$$\int_{(t-|u-2x|)/4}^{t/2} |v(s)|\,ds \le \int_{\min(\frac{t-x}{4}, \frac{x}{2})}^{t/2} |v(s)|\,ds,\ t\le u\le x;\quad \int_0^t \int_{\min(\frac{t-x}{4}, \frac{x}{2})}^{t/2} |v(s)|\,ds\,dx \le \int_0^{t/2} s|v(s)|\,ds \le \|v\|;$$

$$\int_x^t du \left(\int_{(t-u)/4}^{t/2} |v_i(s)|\,ds\right)\left(\int_{(t-|u-2x|)/4}^{t/2} |v_j(s)|\,ds\right) \le \|v_i\| \int_{\min(\frac{t-x}{4}, \frac{x}{2})}^{t/2} |v_j(s)|\,ds,\quad v_i, v_j \in X;\ i,j = 1,2,$$

$$\int_x^t du \int_{(t-u)/4}^{t/2} |v(s)|\,ds \le \int_0^{t/2} s|v(s)|\,ds \le \|v\|,\quad x<t,$$

находим, что при любых $v,\ v+h \in X$ справедливо

$$\sup_{0\le t<\infty} \int_0^t |P_{v+h}(x,t) - P_v(x,t)|\,dx \le \|h\|(1 + \|v+h\|e^{\|v+h\|})(1 + \|v\|e^{\|v\|} + \|v+h\|e^{\|v+h\|}) \quad (I.II)$$

что вместе с (I.I0) дает непрерывность оператора $P(v)$. Лемма доказана.

<u>Лемма I.2.</u> Множество значений Ω_F^+, (0.I2) оператора $\Psi(v)$ (0.I4) является открытой областью в X и опеределенный на ней оператор $\Psi^{-1}(f)$ непрерывен.

<u>Доказательство</u>. Пусть $v_0 \in \Omega_v$ и $\Psi(v_0) = f_0$. Существование $[\Psi'(v_0)]^{-1}$ (теорема 3.I /2/) вместе с леммой I.I показывает, что к оператору $\Psi(v)$ в некоторой достаточно малой окрестности v_0 применима теорема об обратном операторе (см., например, /8/ стр.44I, теорема I), в силу которой для любого $v_0 \in \Omega_v$ существует окрестность $U_{v_0} = \{v \in \Omega_v \mid \|v - v_0\| < \varepsilon\}$ такая, что для всех $f \in U_{f_0} = \{f \in X \mid \|f - f_0\| < \delta,\ \delta = \delta(\varepsilon) > 0\}$ оператор $\Psi^{-1}(f)$ существует и $\Psi^{-1}(f) \in U_{v_0}$, т.е. $U_{f_0} \subset \Omega_F^+$. Лемма доказана.

<u>Следствие I.</u> Пусть $v_0 \in \Omega_v$ и шар $U_{v_0} = \{v \in X \mid \|v - v_0\| < \rho\} \subset \Omega_v$. Тогда $\inf_{v \in U_{v_0}} \|\Psi(v) - \Psi(v_0)\| > 0$. (I.I2)

<u>Следствие 2.</u> Задача нахождения решения $v_* \in \Omega_v$ уравнения (0.I3) по элементу $f_* \in \Omega_F^+$, является коректно поставленной.

<u>Замечание.</u> Некорректность обратной задачи рассеяния состоит в в самом построении f_* по заданной функции

$S_*(k)$ формулами (0.7),(0.I4), так как операции дифференцирования и преобразования Фурье являются неустойчивыми [9].

Доказательство теоремы I.I. Если $v_* \in \partial G$, то существует шар $U_{v_*} = \{ v \in \Omega_v \mid \|v - v_*\| < \rho \}$, такой, что $U_{v_*} \cap \partial G = 0$. Отсюда в силу (I.I2) получаем, что $d = \inf_{v \in \partial G} \| Q(v) \| > 0$. Необходимость условия (I.I) вытекает из непрерывности оператора $Q(v)$ и $Q(v_*) = 0$. Достаточность (I.I) получается из теоремы 2 [3], если в качестве функционала f_0 положить $f_0(v) = \|Q(v)\|$ и учесть, что в любой ограниченной области $G \subset \Omega_v$, $\sup_{v \in G} \| [\Psi'(v)]^{-1} \|_{[X \to X]} < \infty$ в силу леммы 2.2. Так как теорема 2 [3] является и теоремой о существовании решения $v_* \in G$ для уравнения (0.I3), то условие (I.I) влечет за собой $v_* \in G$. Пусть $H = \Psi(G)$, тогда из леммы I.2 следует, что H - открытое множество в Ω^+_F, и $\partial H = \Psi(\partial G)$. Условие (I.I) означает, что $\Psi(v_0) \in U_{f_*} = \{ f \in X \mid \| f - f_* \| \le d,\ f_* = \Psi(v_*) \}$, так как $d = \inf_{f \in \partial H} \| f - f_* \|$. Следовательно, $U_{f_*} \subset H$, что и дает (I.2). При $v_* \in G$ из $G_1 \supset G$ вытекает в силу леммы I.2, что $\inf_{f \in \partial H_1} \| f - f_* \| \ge \inf_{v \in \partial H} \| f - f_* \|$ т.е. $\Omega_{v_0}(G_1) \supseteq \Omega_{v_0}(G)$. Теорема доказана.

Теорема I.2. Пусть по элементу $f_* \in \Omega^+_F$, построена область

$$H_* = \{ f_0 \in \Omega^+_F \mid \alpha f_* + (1-\alpha) f_0 \subset \Omega^+_F,\ 0 \le \alpha \le 1 \}. \tag{I.13}$$

Тогда при любом $v_0 \in G_* = \Psi^{-1}(H_*)$ решение $v(t)$ задачи Коши (0.I6) содержится в Ω_v и $\lim_{t \to \infty} v(t) = v_* = \Psi^{-1}(f_*)$.

Доказательство. Так как отрезок

$$f(\alpha) = \alpha f_* + (1-\alpha)\Psi(v_0), \quad 0 \le \alpha \le 1$$

является компактом в Ω^+_F, то из непрерывности $\Psi^{-1}(f)$ вытекает, что кривая

$$v(t) = \Psi^{-1}(f(\alpha)),\ \alpha = e^{-t},\ 0 \le t < \infty \tag{I.14}$$

есть компактное, а следовательно, и ограниченное множество в Ω_v, не имеющее общих точек с $\partial \Omega_v$. Отсюда, в силу леммы 2.2, вытекает, что $B = \sup_{0 \le t < \infty} \| \Psi'(v(t))^{-1} \|_{[X \to X]} < \infty$. Далее, следуя [3], имеем, что кривая $v(t)$(I.I4) есть решение задачи (0.I6), притом справедливы соотношения

$$Q(v(t)) = Q(v_0) e^{-t}, \quad \|v'(t)\| \le B \| Q(v_0) \| e^{-t}, \ (0 \le t < \infty)$$

показывающие, что длина $v(t)$ конечна. Это влечет за собой существование предела $\lim_{t \to \infty} v(t) = v_*$, для которого, в силу $\lim_{t \to \infty} \|v'(t)\| = 0$ и (0.I6), должно быть $Q(v_*) = 0$. Теорема доказана.

В заключение этого параграфа уточним свойства областей Ω_v и Ω^+_F, (0.I2).

Лемма I.3. Все положительные потенциалы, а также потенциалы, для которых

$$\|v\| < \ln 2 \approx 0{,}69, \tag{0.15}$$

принадлежат множеству Ω_v.

Доказательство. Первое утверждение хорошо известно. Для того, чтобы показать, что при условии (I.I5) функция Йоста $f_v(k) \ne 0$ при $\operatorname{Im} k \ge 0$, достаточно отметить, что из представления (3.2) при $x = 0$, т.е.

$$f_v(k) = 1 + \int_0^\infty L_v(0,t) e^{ikt} dt, \quad \operatorname{Im} k \ge 0,$$

в силу оценки (3.I6)

$$|f_v(k)| \ge 1 - \int_0^\infty |L_v(0,t)| dt \ge 2 - e^{\|v\|}, \quad \operatorname{Im} k \ge 0.$$

Лемма доказана.

Лемма I.4. Множества Ω_v и Ω^+_F, (0.I2) являются открытыми, односвязными областями в пространстве X. Если $v \in \partial \Omega_v$, то функция Йоста $f_v(k)|_{k=0} = 0$ и $f_v(k) \ne 0$ при $\operatorname{Im} k \ge 0$, $k \ne 0$. Для расстояния $\rho(K, \partial\Omega_v)$ между конусом $K = \{ v \in X \mid v(x) \ge 0 \}$ и $\partial \Omega_v$ справедлива оценка

$$\rho(K, \partial\Omega_v) \equiv \inf_{v_1 \in K, v_2 \in \partial\Omega_v} \|v_1 - v_2\| \geq \ln 2 \tag{I.16}$$

<u>Доказательство</u>. Открытность Ω_v, как было показано в /2/, есть следствие неравенства

$$\sup_{\operatorname{Im} k \geq 0} |f_{v_2}(k) - f_{v_1}(k)| \leq \|v_2 - v_1\| \exp\{\|v_2\| + \|v_1\|\}, \quad v_1, v_2 \in X. \tag{I.17}$$

Пусть потенциал $\tilde{v} \in \partial\Omega_v$ и $f_{\tilde{v}}(i\varkappa_0) = 0$, $\varkappa_0 > 0$. Тогда из (I.17) получаем, что для всех v из некоторой окрестности v_0 краевая задача (0.1),(0.2) имеет хотя бы одно собственное число, что противоречит $\tilde{v} \in \partial\Omega_v$. Следовательно, должно быть $f_{\tilde{v}}(0) = 0$, так как иначе $\tilde{v}$ принадлежал бы Ω_v.

Обозначим через $\delta_v(k) = (i/2)\ln S_v(k)$, $0 \leq k \infty$ фазу рассеяния задачи (0.1),(0.2), которую без ограничения общности считаем непрерывной функцией от k, нормированной условием $\lim_{k\to\infty} \delta_v(k) = 0$. Тогда, если $v_1(x) \leq v_2(x)$ при $0 \leq x < \infty$, $v_1, v_2 \in X$, то (/10/ приложение II)

$$\delta_{v_1}(k) \leq \delta_{v_2}(k), \quad 0 \leq k < \infty. \tag{I.18}$$

Отсюда с учетом неравенства $\delta_{v_1}(0) > \delta_{v_2}(0)$, справедливого для любых $v_1 \in \Omega_v$ и $v_2 \bar{\in} \Omega_v$ (вытекает из (0.6)), получаем, что, если $v \in \Omega_v$, $h \in K$, то $v + h \in \Omega_v$. Следовательно, если v_1, $v_2 \in \Omega_v$, то и $q = \max_x\{v_1(x), v_2(x)\} \in \Omega_v$, так как $h_i(x) = q(x) - v_i(x) \geq 0$, $i = 1,2$. Таким образом, получаем, что $q(x)$ и $v_i(x)$, $i = 1, 2$ можно соединить отрезками

$$q^{(i)}(t) = v_i + t(q - v_i) \subset \Omega_v, \quad 0 \leq t \leq 1, \quad i = 1, 2.$$

Для того, чтобы доказать (I.16), достаточно отметить, что, если $v \bar{\in} \Omega_v$, то в силу (I.18) и $v^- = \min\{v(x), 0\} \bar{\in} \Omega_v$. Следовательно, с учетом (I.15), имеем

$$\inf_{\tilde{v} \in K, v \in \partial\Omega} \|\tilde{v} - v\| \geq \|v^-\| \geq \ln 2.$$

Открытость Ω_F^+, была показана в лемме I.2, односвязность вытекает из односвязности Ω_v и непрерывности $\Psi(v)$. Лемма доказана.

§ 2. <u>Приближенное решение методом Эйлера</u>

Здесь рассмотрены некоторые вопросы приближенного вычисления решения $v(t)$ задачи (0.16)-(0.17):

$$\frac{\partial v(x,t)}{\partial t} = \frac{1}{\pi}\frac{\partial}{\partial x}\int_{-\infty}^{\infty}\{S_*(k) - S_{v(t)}(k)\} f_{v(t)}^2(x,k)\,dk, \quad 0 \leq t < \infty; \quad v(x,0) = v_0.$$

<u>Лемма 2.I</u>. Пусть ограниченная область $G \subset \Omega_v$ и решение v_* уравнения (0.13) принадлежит G. Тогда при любом $\varepsilon > 0$ и всех $v_0 \in \Omega_{v_0}(G)$(I.2) для решения $v(t)$ задачи (0.16) имеем

$$\|v(t) - v_*\| < \varepsilon, \qquad T \leq t < \infty \tag{2.1}$$

при $T \geq -\ln[\varepsilon(Bd)^{-1}]$, где $B = \sup_{v \in G}\|\Psi'(v)^{-1}\|$, $d = \inf_{v \in \partial G}\|Q(v)\|$.

<u>Доказательство</u>. Из теоремы I.I следует, что, если $v_0 \in \Omega_{v_0}(G)$, то $v(t) \in G$ при $0 \leq t < \infty$. Следовательно /3/,

$$\|v(t) - v_*\| = \|\int_t^\infty v'(\tau)\,d\tau\| \leq \int_t^\infty \|\Psi'(v)^{-1}\| \|Q(v_0)\| e^{-\tau}\,d\tau \leq B\|Q(v_0)\|e^{-t}.$$

Лемма доказана.

Разобьем теперь интервал $[0, T]$ на n частей узловыми точками

$$t_0 = 0, \quad t_1 = t_0 + r_1, \quad \ldots, \quad t_n = t_{n-1} + r_n = T \tag{2.2}$$

и пусть

$$\sup_i r_i = r \leq \frac{KT}{n}, \tag{2.3}$$

где $K \geq 1$ – константа, не зависящая от n.

<u>Теорема 2.I</u>. Пусть функция $S_*(k)$, $-\infty < k < \infty$ удовлетворяет условиям (0.6),(0.7) при $N = 0$, $S_*(0) = 1$ и G – ограниченная область в Ω_v, содержащая искомое решение v_* уравнения (0.13). Тогда при любых $\varepsilon > 0$ и $T < \infty$ существует $r = r(\varepsilon, T) > 0$ (2.3)

такое, что, если $\bar{v}_0 = v_0 \in \Omega_{v_0}(G)$ (0.12) и

$$\bar{v}_j(x) = \bar{v}_{j-1}(x) + r_j \frac{d}{dx} \int_{-\infty}^{\infty} \{ S_*(k) - S_{\bar{v}_{j-1}}(k) \} f^2_{\bar{v}_{j-1}}(x,k)\,dk, \quad j=1,\dots,n, \tag{2.4}$$

то

$$\| \bar{v}_j - v_j \| < \varepsilon, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (\sup r_j \leq r), \tag{2.5}$$

где $v_j = v(t_j)$ – значения решения $v(t)$ задачи (0.I7) в точках t_j (2.2). (Последовательность $\bar{v}_j$, $j = 1, 2, \dots, n$, определяемая формулой (2.4), называется приближенным решением задачи Коши (0.I7) полученное методом Эйлера).

<u>Замечание</u>. Утверждения теоремы 2.I и леммы 2.I (при $T \geqslant -\ln[\varepsilon B^2(\inf_{v \in \partial G} \|v - v_0\| + Bd)^{-1})$ остаются справедливыми, если вместо условия $v_0 \in \Omega_{v_0}(G)$ потребовать лишь (I.3).

<u>Доказательство</u> теоремы I.I. вытекает непосредственно из теоремы 2/II/, если учесть, что в силу теоремы I.I решение $v(t) \in G$ при $0 \leq t < \infty$ для любого начального значения $v_0 \in \Omega_{v_0}(G)$, и воспользоваться следующей леммой.

<u>Лемма 2.2</u>. Пусть ядро $N_v(x,t)$ оператора

$$(I + G(v))h = h(x) - \frac{d}{dx} \int_x^{\infty} N_v(x,t) \Big(\int_t^{\infty} h(s)\,ds \Big) dt, \quad 0 < x < \infty, \quad h \in X \tag{2.6}$$

определяется посредством ядра $L_v(x,t)$ оператора преобразоваться (3.2) формулой

$$N_v(x,t) = 4 L_v(x, 2t - x) + 2 \int_x^{2t-x} L_v(x,s) L_v(x, 2t-s)\,ds, \quad x \leq t < \infty, \tag{2.7}$$

а оператор $\Psi(v)$ определяется посредством данных рассеяния (0.5) формулами (0.8), (0.9). Тогда

I. Для любой ограниченной области $G \subset X$ справедливы оценки

$$\sup_{v \in G} \| I + G(v) \|_{[X \to X]} \leq 1 + \tfrac{1}{2}\mu + 6\mu e^{\mu} + \mu^2 e^{2\mu}, \quad (\mu = \sup_{v \in G} \|v\|), \tag{2.8}$$

$$\sup_{v \in G} \| \Psi(v) \| \leq 3\mu^2 + \mu e^{2\mu}, \quad (\mu = \sup_{v \in G} \|v\|). \tag{2.9}$$

2. Функции $\Psi(v)$ и $G(v)$ удовлетворяют условию Липшица, т.е. для любых $v_1, v_2 \in G$

$$\| \Psi(v_2) - \Psi(v_1) \| \leq L_1 \| v_2 - v_1 \|, \quad L_1 \leq 1 + \mu + 20\mu \max\{1, \mu^2\} e^{7\mu}, \tag{2.I0}$$

$$\| G(v_2) - G(v_1) \|_{[X \to X]} \leq L_2 \| v_2 - v_1 \|, \quad L_2 \leq 2 + 9\mu e^{\mu} + 7\mu^2 e^{2\mu} + 2\mu^3 e^{3\mu}, \tag{2.II}$$

$$(\mu = \sup_{v \in G} \|v\|).$$

3. Если $v \in \Omega_v$, то

$$[\Psi'(v)]^{-1} = I + G(v), \tag{2.I2}$$

где $\Psi(v)$ определяется (0.I4).

<u>Доказательство</u>. Оценка (2.8) была получена в (/2/ §3, лемма 3.2). Оценка (2.9) есть следствие неравенства (3.2.2I) (/I/ стр.I54). Для того, чтобы получить (2.I0), отметим сначала, что из основного уравнения обратной задачи рассеяния (/I/ гл. 3)

$$F_v(x+y) + L_v(x,y) + \int_x^{\infty} L_v(x,t) F_v(t+y)\,dt = 0, \quad x \leq y < \infty,$$

где $F_v(x)$ определяется (0.9), а $L_v(x,y)$ – (3.2), следует, что для любых $v_1, v_2 \in X$ справедливо

$$\Delta F(2x) + f(x) + 2 \int_x^{\infty} L_v(x, 2\xi - x) \Delta F(2\xi)\,d\xi = 0, \quad 0 < x < \infty, \tag{2.I3}$$

где $\Delta F(x) = F_{v_2}(x) - F_{v_1}(x)$, а

$$f(x) = \frac{1}{2} \int_x^{\infty} \Delta v(s)\,ds + 2 \int_x^{\infty} \{ L_{v_2}(x, 2\xi - x) - L_{v_1}(x, 2\xi - x) \} F_{v_2}(2\xi)\,d\xi. \tag{2.I4}$$

Отсюда в силу (3.I6)

$$| \Delta F(2x) + f(x) | \leq e^{\sigma_v^{(1)}(x)} \int_x^{\infty} \sigma_v(\xi) e^{-\sigma_v^{(1)}(\xi)} | \Delta F(2\xi) |\,d\xi, \quad 0 < x < \infty. \tag{2.I5}$$

Далее, следуя, в основном, выкладкам из (/I/ стр.I52–I54) находим, что для функции

$$z(x) = \int_x^{\infty} \sigma_v(\xi) e^{-\sigma_v^{(1)}(\xi)} | \Delta F(2\xi) |\,d\xi \quad \Big(\sigma_v(x) = \int_x^{\infty} |v(s)|\,ds, \ \sigma_v^{(1)}(x) = \int_x^{\infty} \sigma_v(s)\,ds \Big) \tag{2.I6}$$

справедливо неравенство

$$- \{ z(x) e^{-\sigma_v^{(1)}(x)} \}' \leq \sigma_v(x) e^{-2\sigma_v^{(1)}(x)} | f(x) |.$$

Интегрируя, получаем

$$z(x)e^{-\sigma_v^{(1)}(x)} \le \int_x^\infty \sigma_v(t)e^{-2\sigma_v^{(1)}(t)}|f(t)|\,dt,$$

откуда в силу (2.I5), (2.I6)

$$|\Delta F(2x)| \le |f(x)| + e^{2\sigma_v^{(1)}(x)}\int_x^\infty \sigma_v(t)e^{-2\sigma_v^{(1)}(t)}|f(t)|\,dt. \qquad (2.I7)$$

Из оценки (/I/ гл. 3)

$$|F_v(2x)| \le \tfrac{1}{2}\sigma_v(x)e^{\|v\|}\operatorname{ch}\|v\|, \quad 0<x<\infty, \quad v\in X, \qquad (2.I8)$$

и (3.I2) получаем для функций $f(x)$ (2.I4)

$$|f(x)| \le \tfrac12 \sigma_{\Delta v}(x) + \tfrac14 \sigma_{v_2}(x)\|\Delta v\|\left(e^{3\mu}+e^{\mu}\right)\left(1+\mu e^{\mu}\right), \left(\mu = \sup_{v\in G}\|v\|\right)$$

откуда в силу (2.I7) вытекает

$$|\Delta F(2x)| \le \{\sigma_{\Delta v}(x) + \|\Delta v\|\sigma_{v_2}(x)\}\max\{1,\mu\}e^{6\mu}. \qquad (2.I9)$$

Дифференцируя (2.I4) по x, имеем

$$\Psi(v_2)-\Psi(v_1) = 4F'_{v_2}(2x)-4F'_{v_1}(2x) = \Delta v(x) + \tfrac12\int_x^\infty (v_2(s)-v_1(s))ds\int_x^\infty (v_2(s)+v_1(s))ds$$
$$+\tfrac12\int_x^\infty (v_2-v_1)ds\, F_{v_2}(2x) + \int_x^\infty v_1(s)ds\,\Delta F(2x) - \int_x^\infty F_{v_2}(x+t)\frac{\partial}{\partial x}\{L_{v_2}(x,t)-L_{v_1}(x,t)\}dt$$
$$+\int_x^\infty \Delta F(x+t)\frac{\partial}{\partial x}L_{v_1}(x,t)\,dt \;.$$

Отсюда с помощью оценок (2.I8), (2.I9) и (3.I3) получаем после несложной выкладки (2.I0).

Из (2.6) следует

$$\sup_{\|h\|\le 1}\|(G(v_2)-G(v_1))h\| = \|G(v_2)-G(v_1)\|_{[X\to X]} \le$$
$$\le \int_0^\infty |N_{v_2}(x,x)-N_{v_1}(x,x)|dx + \int_0^\infty\int_x^\infty \left|\frac{\partial}{\partial x}\{N_{v_2}(x,t)-N_{v_1}(x,t)\}\right|dt\,dx,$$

где в силу (2.7)

$$N_{v_2}(x,x)-N_{v_1}(x,x) = 2\int_x^\infty \{v_2(s)-v_1(s)\}ds,$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\{N_{v_2}(x,t)-N_{v_1}(x,t)\} = \{4\Delta L'_x(x,s)|_{s=2t-x}+\Delta v(t)\} - \{4\Delta L'_t(x,s)|_{s=2t-x}+\Delta v(t)\}$$
$$-\Delta L(x,2t-x)\int_x^\infty (v_2(s)+v_1(s))ds - [L_{v_2}(x,2t-x)+L_{v_1}(x,2t-x)]\int_x^\infty (v_2(s)-v_1(s))ds$$
$$+2\int_x^{2t-x}\Delta L'_x(x,s)[L_{v_2}(x,2t-s)+L_{v_1}(x,2t-s)]ds + 2\int_x^{2t-x}\Delta L(x,s)\frac{\partial}{\partial x}[L_{v_2}(x,2t-s)+L_{v_1}(x,2t-s)]ds.$$

Отсюда в силу оценок (3.I2), (3.I3) вытекает (2.II). Утверждение 3 было получено в(/2/ теорема 3.I). Лемма доказана.

__Теорема 2.2.__ Для любого начального значения v_0, удовлетворяющего условиям теоремы 2.I, приближенное решение (2.4) уравнения (0.I7) сходится при $r\to 0$ (r удовлетворяет (2.3)) равномерно по $t\in[0,T]$, $T<\infty$ к точному решению $v(t)$.

__Доказательство__. Так как из доказательства теоремы I.2 следует, что решение $v(t)$ задачи (0.I6) – компактное множество в Ω_v, а Ω_v – открытое, то существует ограниченная область $G\subset\Omega_v$, содержащая $v(t)$ при $0\le t<\infty$. Следовательно, в силу леммы 2.2 к задаче (0.I6) применима теорема 2 /II/. Теорема доказана.

§ 3. __Оценки для разностей ядер операторов преобразования__

Здесь приведем вывод некоторых оценок, на которых часто ссылались в предыдущих параграфах.

Пусть $K_v(x,t)$ и $L_v(x,t)$ – ядра операторов преобразования (см., например/I/):

$$\varphi_v(x,k) = \frac{\sin kx}{k} + \int_0^x K_v(x,t)\frac{\sin kt}{k}dt, \quad \left(2\frac{d}{dx}K(x,x)=v(x)\right) \qquad (3.I)$$

$$f_v(x,k) = e^{ikx} + \int_x^\infty L_v(x,t)e^{ikt}dt, \quad \operatorname{Im} k\ge 0, \left(-2\frac{d}{dx}L(x,x)=v(x)\right) \qquad (3.2)$$

где $\varphi_v(x,k)$ – решение уравнения (0.I), определяемое условием

$$\varphi_v(0,k)=0, \quad \varphi'_v(0,k)=1 \qquad (3.3)$$

а решение $f_v(x,k)$ определяется условием (0.4).

__Лемма 3.I__. При любых $v_1, v_2\in X$ для разности

$$\Delta K(x,t) = K_{v_2}(x,t) - K_{v_1}(x,t), \quad 0<t\le x \qquad (3.4)$$

ядер операторов преобразования (3.I) справедлива оценка

$$|\Delta K(x,t)| \le \frac{1}{2}\Big\{\int_{\frac{x-t}{2}}^{x}|\Delta v(s)|\,ds + \|\Delta v\| e^{\|v_1\|}\int_{\frac{x-t}{2}}^{x}|v_1(s)|\,ds\Big\}\Big\{1+\|v_2\| e^{\|v_2\|}\Big\}, \quad (3.5)$$

где $\Delta v(x) = v_2(x) - v_1(x)$.

<u>Доказательство</u>. Из интегрального уравнения для ядра $K_v(x,y)$

$$K_v(x,y) = \frac{1}{2}\int_{(x-y)/2}^{(x+y)/2} v(s)\,ds + \int_{(x-y)/2}^{(x+y)/2} dt \int_0^{(x-y)/2} dz\, v(z) K_v(t+z, t-z), \quad 0<y\le x, \quad (3.6)$$

полагая

$$H_v(u,v) = K_v(u+v, u-v), \; \Delta H(u,v) = K(u+v, u-v), \; x+y = 2u, \; x-y = 2v, \quad (3.7)$$

получаем

$$\Delta H(u,v) = \frac{1}{2}\int_v^u \Delta v(t)\,dt + \int_v^u dt\int_0^v \Delta v(t+z) H_{v_2}(t,z)\,dz + \int_v^u dt\int_0^v v_1(t+z)\Delta H(t,z)\,dz. \quad (3.8)$$

Рассматривая (3.8) как интегральное уравнение относительно $\Delta H(u,v)$, покажем, что его можно решить методом последовательных приближений, положив

$$\Delta H_0(u,v) = \frac{1}{2}\int_v^u \Delta v(t)\,dt + \int_v^u dt\int_0^v \Delta v(t+z) H_{v_2}(t,z)\,dz,$$

$$\Delta H_n(u,v) = \int_v^u dt\int_0^v v_1(t+z) H_{n-1}(t,z)\,dz, \quad n = 1, 2, \ldots .$$

Действительно, из оценки

$$|H_v(u,v)| \le \frac{1}{2}\int_v^{u+v}|v(s)|\,ds \, \exp\{\tau_v(u)\}, \quad 0<v\le u, \; \Big(\tau_v(u) = \int_0^u s|v(s)|\,ds\Big), \quad (3.9)$$

получаем, что

$$|\Delta H_0(u,v)| \le \frac{1}{2}\int_v^{u+v}|\Delta v(s)|\,ds + \frac{1}{2} e^{\tau_{v_2}(u)}\int_v^u dt\int_0^v |\Delta v(t+z)|\Big(\int_z^{u+z}|v_2(s)|\,ds\Big)dz =$$

$$= \frac{1}{2}\int_v^{u+v}|\Delta v(s)|\,ds + \frac{1}{2} e^{\tau_{v_2}(u)}\int_0^v \Big(\int_z^{u+z}|v_2(s)|\,ds\Big)\Big(\int_{v+z}^{u+z}|\Delta v(s)|\,ds\Big)dz \le$$

$$\le \frac{1}{2}\int_v^{u+v}|\Delta v(s)|\,ds \Big(1 + \tau_{v_2}(u+v) e^{\tau_{v_2}(u)}\Big) \equiv M(u,v)\int_v^{u+v}|\Delta v(s)|\,ds,$$

так как

$$\omega_v(u,v) = \int_0^v dz\int_z^{u+z}|v(s)|\,ds \le \int_0^{u+v} dz\int_z^{u+v}|v(s)|\,ds = \tau_v(u+v).$$

Покажем индуктивно, что при любом $n = 1, 2, \ldots$ справедлива оценка

$$|\Delta H_n(u,v)| \le M(u,v)\,\tau_{\Delta v}(u+v)\int_v^{u+v}|v_1(s)|\,ds\,\frac{\omega_{v_1}^{n-1}(u,v)}{(n-1)!}, \quad v \le u. \quad (3.10)$$

Из (3.15), (3.16) получаем

$$|\Delta H_1(u,v)| \le M(u,v)\int_v^u\int_0^v |v_1(t+z)|\Big(\int_z^{u+z}|\Delta v(s)|\,ds\Big)dz \le M\,\tau_{\Delta v}(u+v)\int_v^{u+v}|v_1(s)|\,ds,$$

так что оценка (3.10) верна для $n = 0$. Но если верна для n, то она верна и для $n+1$, так как

$$|\Delta H_{n+1}(u,v)| \le M(u,v)\,\tau_{\Delta v}(u+v)\int_v^u dt\int_0^v |v_1(t+z)|\int_z^{u+z}|v_1(s)|\,ds\,\frac{\omega_{v_1}^{n-1}(t,z)}{(n-1)!}\,dz \le$$

$$\le M\,\tau_{\Delta v}(u+v)\int_v^{u+v}|v_1(s)|\,ds\int_0^v \frac{\omega_{v_1}^{n-1}(u,z)}{(n-1)!}\,d\,\omega_{v_1}(u,z) = M\,\tau_{\Delta v}(u+v)\int_v^{u+v}|v_1(s)|\,ds\,\frac{\omega_{v_1}^{n}(u,v)}{n!}.$$

Тем самым показали, что

$$|\Delta H(u,v)| \le \frac{1}{2}\Big(1 + \tau_{v_2}(u+v) e^{\tau_{v_2}(u)}\Big)\Big\{\int_v^{u+v}|\Delta v(s)|\,ds + \tau_{\Delta v}(u+v) e^{\tau_{v_1}(u+v)}\int_v^{u+v}|v_1(s)|\,ds\Big\},$$

откуда в силу (3.7) и $\tau_v(u) \le \tau_v(\infty) = \|v\|$ следует (3.6). Лемма доказана.

<u>Лемма 3.2.</u>. Пусть

$$\Delta L(x,t) = L_{v_2}(x,t) - L_{v_1}(x,t), \quad x \le t < \infty \quad (3.11)$$

разность ядер операторов преобразования (3.2), $v_1, v_2 \in X$.
Тогда справедливы оценки

$$|\Delta L(x,t)| \le \frac{1}{2}\sigma_{\Delta v}\Big(\frac{x+t}{2}\Big) e^{\|v_1\|} + \frac{1}{2}\sigma_{v_2}\Big(\frac{x+t}{2}\Big)\|\Delta v\| e^{\|v_1\|+\|v_2\|}, \quad x \le t, \quad (3.12)$$

$$\Big|\frac{\partial}{\partial x_j}\Delta L(x_1,x_2) + \frac{1}{4}\Delta v\Big(\frac{x_1+x_2}{2}\Big)\Big| \le \frac{1}{2}\sigma_{v_2}\Big(\frac{x_1+x_2}{2}\Big)\sigma_{\Delta v}(x_1) e^{\|v_2\|} +$$

$$+ \frac{1}{2}\sigma_{\Delta v}\Big(\frac{x_1+x_2}{2}\Big)\sigma_{v_1}(x_1) e^{\|v_1\|} + \frac{1}{2}\sigma_{v_2}\Big(\frac{x_1+x_2}{2}\Big)\sigma_{v_1}(x_1)\|\Delta v\| e^{\|v_1\|+\|v_2\|}, \quad j = 1, 2, \quad (3.13)$$

где $\Delta v(x) = v_2(x) - v_1(x)$, $\sigma_v(x) = \int_x^\infty |v(s)|\,ds$.

Доказательство аналогично доказательству леммы 3.I. Полагая

$$H_\upsilon(u,v)=L_\upsilon(u-v,u+v),\quad \Delta H(u,v)=H_{\upsilon_2}(u,v)-H_{\upsilon_1}(u,v),\quad x+t=2u,\ t-x=2v \tag{3.I4}$$

из интегрального уравнения для $H_\upsilon(u,v)$

$$H_\upsilon(u,v)=\frac{1}{2}\int_u^\infty \upsilon(s)\,ds+\int_u^\infty d\alpha\int_0^v \upsilon(\alpha-\beta)\,H_\upsilon(\alpha,\beta)\,d\beta,\quad v\le u,$$

получаем, что

$$\Delta H(u,v)=\frac{1}{2}\int_u^\infty \Delta\upsilon(s)\,ds+\int_u^\infty d\alpha\int_0^v \Delta\upsilon(\alpha-\beta)\,H_{\upsilon_2}(\alpha,\beta)\,d\beta+\int_u^\infty d\alpha\int_0^v \upsilon_1(\alpha-\beta)\,\Delta H(\alpha,\beta)\,d\beta \tag{3.I5}$$

Из оценки

$$|H_\upsilon(u,v)|\le\frac{1}{2}\sigma_\upsilon(u)\exp\{\sigma_\upsilon^{(1)}(u-v)-\sigma_\upsilon^{(1)}(u)\},\quad \left(\sigma_\upsilon^{(1)}(u)=\int_u^\infty \sigma_\upsilon(t)\,dt\right) \tag{3.I6}$$

следует, в силу монотонности функций $\sigma_\upsilon(u-v)-\sigma_\upsilon(u)$, что

$$\left|\int_u^\infty d\alpha\int_0^v \Delta\upsilon(\alpha-\beta)\,H_{\upsilon_2}(\alpha,\beta)\,d\beta\right|\le\frac{1}{2}\sigma_{\upsilon_2}(u)\exp\{\sigma_{\upsilon_2}^{(1)}(u-v)-\sigma_{\upsilon_2}^{(1)}(u)\}\int_u^\infty d\alpha\int_0^v|\Delta\upsilon(\alpha-\beta)|\,d\beta$$

что вместе с

$$\int_u^\infty d\alpha\int_0^v|\Delta\upsilon(\alpha-\beta)|\,d\beta=\int_u^\infty\{\sigma_{\Delta\upsilon}(\alpha-v)-\sigma_{\Delta\upsilon}(\alpha)\}\,d\alpha=\sigma_{\Delta\upsilon}^{(1)}(u-v)-\sigma_{\Delta\upsilon}^{(1)}(u)$$

дает

$$|\Delta H_0(u,v)|=\left|\frac{1}{2}\int_u^\infty\Delta\upsilon(s)\,ds+\int_u^\infty d\alpha\int_0^v\Delta\upsilon(\alpha-\beta)\,H_{\upsilon_2}(\alpha,\beta)\,d\beta\right|\le$$

$$\le\frac{1}{2}\left\{\sigma_{\Delta\upsilon}(u)+\sigma_{\upsilon_2}(u)\{\sigma_{\Delta\upsilon}^{(1)}(u-v)-\sigma_{\Delta\upsilon}^{(1)}(u)\}\exp\{\sigma_{\upsilon_2}^{(1)}(u-v)-\sigma_{\upsilon_2}^{(1)}(u)\}\right\}\equiv\widetilde{M}(u,v). \tag{3.I7}$$

Отсюда, с учетом монотонности функций $\widetilde{M}(u,v)$ (3.I7), получаем, что при любом $n=0,1,2,\dots$ для функции

$$\Delta H_n(u,v)=\int_u^\infty d\alpha\int_0^v \upsilon_1(\alpha-\beta)\,\Delta H_{n-1}(\alpha,\beta)\,d\beta,\quad n=1,2,\dots$$

где $\Delta H_0(u,v)$ определяется (3.I7), справедлива оценка

$$|\Delta H_n(u,v)|\le\widetilde{M}(u,v)\,\frac{\{\sigma_{\upsilon_1}^{(1)}(u-v)-\sigma_{\upsilon_1}^{(1)}(u)\}^n}{n!},\quad n=1,2,\dots,$$

так как

$$|\Delta H_{n+1}(u,v)|\le\int_u^\infty d\alpha\int_0^v|\upsilon_1(\alpha-\beta)|\,\widetilde{M}(\alpha,\beta)\,\frac{\{\sigma_{\upsilon_1}^{(1)}(\alpha-\beta)-\sigma_{\upsilon_1}^{(1)}(\alpha)\}^n}{n!}\,d\beta\le$$

$$\le\widetilde{M}(u,v)\int_u^\infty\frac{(\sigma_{\upsilon_1}^{(1)}(\alpha-v)-\sigma_{\upsilon_1}^{(1)}(\alpha))^n}{n!}\left(\sigma_{\upsilon_1}(\alpha-v)-\sigma_{\upsilon_1}(\alpha)\right)d\alpha=$$

$$=\widetilde{M}(u,v)\,\frac{\{\sigma_{\upsilon_1}^{(1)}(u-v)-\sigma_{\upsilon_1}^{(1)}(u)\}^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Следовательно,

$$|\Delta H(u,v)|\le\frac{1}{2}\left\{\sigma_{\Delta\upsilon}(u)+\sigma_{\upsilon_2}(u)\{\sigma_{\Delta\upsilon}^{(1)}(u-v)-\sigma_{\Delta\upsilon}^{(1)}(u)\}\exp\{\sigma_{\upsilon_2}^{(1)}(u-v)-\sigma_{\upsilon_2}^{(1)}(u)\}\right\}\times \tag{3.I8}$$

$$\times\exp\{\sigma_{\upsilon_1}^{(1)}(u-v)-\sigma_{\upsilon_1}^{(1)}(u)\},$$

что вместе с (3.I4) и $\sigma_\upsilon^{(1)}(u)\le\|\upsilon\|$ дает (3.I2). Дифференцируя обе стороны (3.I5) по u и v, имеем

$$\frac{\partial\Delta H(u,v)}{\partial u}=-\frac{1}{2}\Delta\upsilon(u)-\int_0^v\Delta\upsilon(u-\beta)\,H_{\upsilon_2}(u,\beta)\,d\beta-\int_0^v\upsilon_1(u-\beta)\,\Delta H(u,\beta)\,d\beta,$$

$$\frac{\partial\Delta H(u,v)}{\partial v}=\int_u^\infty\Delta\upsilon(\alpha-v)\,H_{\upsilon_2}(\alpha,v)\,d\alpha+\int_u^\infty\upsilon_1(\alpha-v)\,\Delta H(\alpha,v)\,d\alpha.$$

Из этих равенств, используя оценки (3.I2) и (3.I6), вытекает

$$\sup\left\{\left|\frac{\partial H(u,v)}{\partial u}+\frac{1}{2}\Delta\upsilon(u)\right|,\left|\frac{\partial\Delta H(u,v)}{\partial v}\right|\right\}\le\left|\frac{\partial H(u,v)}{\partial u}+\frac{1}{2}\Delta\upsilon(u)\right|\le$$

$$\le\frac{1}{2}\left\{\sigma_{\upsilon_2}(u)\,\sigma_{\Delta\upsilon}(u-v)\,e^{\|\upsilon_2\|}+\sigma_{\Delta\upsilon}(u)\,\sigma_{\upsilon_1}(u-v)\,e^{\|\upsilon_1\|}+\sigma_{\upsilon_2}(u)\,\sigma_{\upsilon_1}(u-v)\,\|\Delta\upsilon\|\times\right.$$

$$\left.\times e^{\|\upsilon_1\|+\|\upsilon_2\|}\right\}.$$

Отсюда, в силу

$$\frac{\partial\Delta L(x,t)}{\partial x}+\frac{1}{4}\,\Delta v\left(\frac{x+t}{2}\right)=\frac{1}{2}\left\{\frac{\partial\Delta H(u,v)}{\partial u}-\frac{\partial\Delta H(u,v)}{\partial v}+\frac{1}{2}\,\Delta v(u)\right\},$$

$$\frac{\partial\Delta L(x,t)}{\partial t}+\frac{1}{4}\,\Delta v\left(\frac{x+t}{2}\right)=\frac{1}{2}\left\{\frac{\partial\Delta H(u,v)}{\partial u}+\frac{\partial\Delta H(u,v)}{\partial v}+\frac{1}{2}\,\Delta v(u)\right\}$$

следует непосредственно (3.13). Лемма доказана.

В заключение отметим, что указанная здесь слабая зависимость сходимости от начального приближения для метода Ньютона в обратной задачи теорий рассеяния численно подтверждается расчетами, приведенными в /6/.

ЛИТЕРАТУРА

1. В.А.Марченко. Спектральная теория операторов Штурма-Лиувилля. Киев, Наукова думка, 1972.
2. Е.П.Жидков, Р.В.Малышев, Е.Х.Христов. Сообщение ОИЯИ, Р5-9063, Дубна, (1975).
3. М.Г.Гавурин. Изв.вузов. Серия матем. 5(6) 18(1958).
4. Е.П.Жидков, Г.И.Макаренко, И.В.Пузынин. ЭЧАЯ т.4, вып.1, 127-166, (1966).
5. Я.Визнер, Е.П.Жидков, В.Лелек. Препринт ОИЯИ, Р5-3895, Дубна, (1968).
6. Е.П.Жидков, Р.В.Малышев, Е.Х.Христов. Сообщение ОИЯИ, Р5-9923, Дубна, (1976).
7. Е.П.Жидков, Б.Н.Хоромский. Сообщение ОИЯИ, Р5-8244, Дубна, (1974).
8. Л.А.Люстерник, В.И.Соболев. Элементы функционального анализа. М., Наука, 1965.
9. А.Н.Тихонов, В.Я.Арсенин. Методы решения некоректных задач. М., Наука, 1974.

10. Ф.Калоджеро. Метод фазовых функций в теории потенциального рассеяния. М., Мир, 1972.
11. Е.П.Жидков, И.В.Пузынин. ДАН СССР, 180, 18-21 (1967).

Рукопись поступила в издательский отдел 21 июля 1976 года.