СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА



Р5 - 9923

Е.П.Жидков, Р.В.Малышев, Е.Х.Христов

# О РАСЧЕТЕ НА ЭВМ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ РАССЕЯНИЯ

1976

P5 - 9923

Е.П.Жидков, Р.В.Малышев, Е.Х.Христов

# О РАСЧЕТЕ НА ЭВМ
# ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ РАССЕЯНИЯ

Настоящая заметка непосредственно примыкает к нашей прежней работе/I/. Ее цель - показать, как с помощью операторов преобразований Крамма-Крейна /2-5/ предложенная в /I/ схема восстановления потенциала в радиальном уравнении Шредингера по фазе рассеяния применяется для расчетов на ЭВМ обратной задачи рассеяния в случае наличия связанных состояний.

Рассматривается краевая задача, определяемая уравнением

$$y'' + (k^2 - v(x))y = 0, \qquad 0 \leq x < \infty \tag{0.I}$$

и краевым условием

$$y(0,k) = 0. \tag{0.2}$$

Потенциал $v(x)$ предполагается вещественным и удовлетворяющим неравенству

$$\int_0^\infty (1+x)|v(x)|dx < \infty. \tag{0.3}$$

Обозначим через $\varphi_v(x,k)$ и $f_v(x,k)$ решения уравнения (0.I), определяемые условиями

$$\varphi_v(x,k): \varphi_v(0,k) = 0, \varphi_v'(0,k) = 1; \; f_v(x,k): \lim_{x\to\infty} e^{-ikx} f_v(x,k) = 1, \tag{0.4}$$

и пусть

$$f_v(k)=f_v(0,k),(\Im k\geq 0); \quad S_v(k)=f_v(-k)/f_v(k), (-\infty<k<\infty) \qquad (0.5)$$

соответственно функция Йоста и функция рассеяния задачи (0.I), (0.2). (Индекс $v$ указывает, что отмеченная величина относится к уравнению (0.I) с потенциалом $v$.)

Спектр краевой задачи (0.I),(0.2) при условии (0.3) непрерывен на положительной $k^2>0$ полуоси и состоит из конечного числа простых отрицательных собственных чисел $\lambda_1<\lambda_2<\ldots<\lambda_N<0$, $\lambda_j=k_j^2$, где $k_j=i\varkappa_j$ $(\varkappa_j>0)$ – нули функций Йоста $f_v(k)$ в верхней полуплоскости $\Im k>0$. В.А.Марченко было показано(/6/ гл.3), что данные рассеяния

$$S(v)=\{S_v(k),(-\infty<k<\infty); \varkappa_j(v), m_j^2(v)=\{\int_0^\infty f_v^2(x,i\varkappa_j(v))dx\}^{-1}, j=1,\ldots,N\} \qquad (0.6)$$

определяют однозначно краевую задачу (0.I), (0.2) и получено основное уравнение обратной задачи теории рассеяния, позволяющее находить эффективно $v$ по $S(v)$. Обзор различных подходов в обратной задаче рассеяния, основанных в основном на ставших уже классическими в этой области работ И.М.Гельфанда-Б.М.Левитана, М.Г.Крейна, В.А.Марченко, содержится в работе Л.Д.Фаддеева/4/. В теоретическом аспекте предложенный ниже алгоритм нахождения $v$ по $S(v)$ является несколько громоздким по сравнению с /6/, но с вычислительной точки зрения, за счет решения обратной задачи итерационным процессом и применения регуляризации, оправдывает себя неплохо при численных расчетах.

§ I. В этом параграфе мы наметим схему применения общего метода Ньютона-Канторовича решения нелинейных функциональных уравнений/7/ в обратной задаче теории рассеяния и перечислим необходимые для построения расчетного алгоритма сведения о преобразованиях Крамма-Крейна.



Обозначим через $X$ линейное, нормированное пространство вещественных функций $v(x)$, для которых выполнено неравенство (0.3), и норма задается равенством

$$\|v\|_X=\int_0^\infty(1+x)|v(x)|dx. \qquad (I.I)$$

Пусть $\Omega(N), N=0,1,\ldots$ – множества потенциалов $v\in X$, для которых краевая задача (0.I),(0.2) имеет ровно $N$ собственных чисел и функция Йоста $f_v(0)\neq 0$. Отметим, что все $\Omega(N)$ являются открытыми множествами в $X$. Если $v\in\Omega(N)$, то функция рассеяния $S_v(k)$ (0.5) обладает следующими свойствами (/6/ гл. 3):

$$S_v^{-1}(k)=S_v(-k)=\overline{S_v(k)}; \quad \ln S_v(+0)-\ln S_v(+\infty)=2i\pi N, \qquad (I.2)$$

$$F_S(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\{1-S_v(k)\}e^{ikx}dk\in L^1(-\infty,\infty); (1+x)F_S'(x)\in L^1(0,\infty). \qquad (I.3)$$

Кроме того, справедлива асимптотика (/8/ гл.I2):

$$S_v(k)=1+\frac{1}{2ik}\int_0^\infty v(x)dx+o(\tfrac{1}{|k|}), \quad k\to\infty. \qquad (I.4)$$

По данным рассеяния $S(v)$ (0.6) построим в $\Omega(N)$ оператор

$$\Psi(v)=\{F'_{S_v}(x),(0<x<\infty); \varkappa_j(v); m_j^2(v),(j=1,2,\ldots,N)\}, \qquad (I.5)$$

где функция $F_{S_v}(x)$ определяется (I.3). Область значений оператора $\Psi(v)$ содержится в пространстве $X_N=X\oplus R^{2N}$, элементами которого являются наборы из функций $f(x)\in X$ и $2N$ вещественных чисел $x_j$. Норма определяется равенством

$$\|\Psi\|_{X_N}=\|f\|_X+\sum_{j=1}^{2N}|x_j|. \qquad (I.6)$$

Пусть задан набор величин

$$S_*=\{S_*(k),(-\infty<k<\infty); \varkappa_{j*}; m_{j*}^2, j=1,2,\ldots,N\}; \qquad (I.7)$$

где функция $S_*(k)$ удовлетворяет условиям (I.2),(I.3), а $\varkappa_{j*}, m_{j*}^2$ $(j=1,2,\ldots,\mathcal{N})$ - $2\mathcal{N}$ положительных чисел, первые $\mathcal{N}$ из которых различные, по которым построен элемент

$$\Psi_* = \{ F_*'(x), (0<x<\infty);\ \varkappa_j^*;\ m_{j*}^2, (j=1,2,\ldots,\mathcal{N}) \} \in X_{\mathcal{N}}. \tag{I.8}$$

Из теоремы 3.3.3 [6] вытекает, что операторное уравнение

$$\Psi(v) = \Psi_* \tag{I.9}$$

с правой частью (I.8) имеет в $\Omega(\mathcal{N})$ единственное решение $v_* \in X$, для которого данные рассеяния $S(v_*) = S_*$. Эта формулировка обратной задачи рассеяния позволяет применить модифицированный метод Ньютона-Канторовича [7] для решения уравнения (I.9), которым нахождение решения $v_* = \lim\limits_{n\to\infty} v_n$ сводится к построению последовательности

$$v_{n+1} = v_n - [\Psi'(v_0)]^{-1}(\Psi(v_n) - \Psi_*), \quad n = 0,1,\ldots, \tag{I.10}$$

где $v_0 \in \Omega(\mathcal{N})$ - начальное приближение, $\Psi'(v_0)$ - производная Фреше оператора $\Psi(v)$ (I.5) в точке $v_0$, $[\Psi'(v_0)]^{-1}$ - обратный к ней оператор. Теория возмущения для уравнения Шредингера (0.I) позволяет доказать сущетсвование производной $\Psi'(v)$ в любой точке $v \in \Omega(\mathcal{N})$, которая является линейным ограниченным оператором в областью определения $X$ и значениями в $X_{\mathcal{N}}$. Явный вид обратного оператора $[\Psi'(v)]^{-1}$ находится с помощью уравнения Марченко [6]. Соответствующая выкладка была подробно проделана в [I] для случая $v \in \Omega(0)$, общий случай $v \in \Omega(\mathcal{N})$, $\mathcal{N}=1,2,\ldots$ рассматривается аналогично. В конечном счете, для последовательности (I.I0) получаем выражение

$$\begin{aligned} v_{n+1}(x) = v_n(x) &+ \frac{1}{\pi}\frac{d}{dx}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\{S_{v_n}(k) - S_*(k)\} f_{v_0}^2(x,k)\,dk + \\ &+ \frac{d}{dx}\sum_{j=1}^{\mathcal{N}}\Big\{(m_j^2(v_n) - m_{j*}^2) f_{v_0}^2(x, i\varkappa_j(v_0)) + m_j^2(v_0)(\varkappa_j(v_n) - \varkappa_{j*})\frac{d}{d\varkappa} f_{v_0}^2(x,i\varkappa)\Big|_{\varkappa=\varkappa_j(v_0)}\Big\}. \end{aligned} \tag{I.II}$$



Наличие начального приближения $v_0$, для которого $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = v_*$, вытекает из существования решения $v_* \in \Omega(\mathcal{N})$ уравнения (I.9) и открытости множества $\Omega(\mathcal{N})$. Операторы преобразования

$$f(x,k) = e^{ikx} + \int\limits_x^{\infty} L(x,t)e^{ikt}\,dt, \quad (\operatorname{Im} k \geq 0)$$

(см., например, [6] гл.3 § I) и представление (I.3) позволяют получить выражение для равенства (I.II) посредством $\Psi(v)$ (I.5) и $\Psi_*$ (I.8), из которого вытекает, что $v_n \in X$, $n = 0,1,\ldots$. Выбор пространства $X$ с нормой (I.I) вместо рассматриваемого в [I] условия $\int\limits_0^{\infty} x\,|v(x)|\,dx < \infty$, объясняется тем, что условие (0.3) обеспечивает существование асимптотики (I.4), знание которой помогает существенно при определении начального приближения $v_0$ (см.§ 2).

Формула (I.II) сводит задачу о нахождении $v_*$ к простым итерациям, однако, так как для этого нужно на каждом шагу итерационного процесса вычислять значения оператора $\Psi(v_n)$, т.е. решать прямую задачу рассеяния, то ее непосредственное применение приводит к значительным вычислительным трудностям. Поэтому при расчетах, в случае наличия связанных состояний, удобно свести сначала задачу к более простой по схеме, изложенной в следующей лемме.

<u>Лемма I.I.</u> Пусть по набору величин

$$\{ S_*(k)\ (-\infty<k<\infty);\ \varkappa_1 > \varkappa_2 > \ldots > \varkappa_{\mathcal{N}} \}, \tag{I.I2}$$

где функция $S_*(k)$ удовлетворяет условиям (I.2),(I.3), а $\varkappa_j$ $(j=1,2,\ldots,\mathcal{N})$ - произвольные положительные числа, построена функция

$$S_{0*}(k) = \prod_{j=1}^{\mathcal{N}}\left(\frac{k - i\varkappa_j}{k + i\varkappa_j}\right)^2 S_*(k), \quad -\infty < k < \infty. \tag{I.I3}$$

Тогда существует единственный потенциал $v_{0*} \in \Omega(0)$, для которого $S_{0*}(k)$ является функция рассеяния задачи (0.I),(0.2). Потенциал $v_* \in \Omega(\mathcal{N})$, для которого $S_*(k)$ и $\lambda_j = -\varkappa_j^2, (j=1,\ldots,\mathcal{N})$

является соответственно функцией рассеяния и собственными числами краевой задачи (0.I)-0.2) с $\upsilon = \upsilon_*$, определяется с помощью $\upsilon_{0*}(x)$ формулой

$$\upsilon_*(x) = \upsilon_{0*}(x) - \frac{d^2}{dx^2}\sum_{j=1}^{N} \ln\Big(1 + C_j \int_0^x \varphi_{j-1}^2(t, i\varkappa_j)\,dt\Big), \quad 0 \le x < \infty \quad (I.I4)$$

где $C_j$ - произвольные положительные постоянные. Функции $\varphi_{j-1}(x, i\varkappa_j)$ $j = 1, 2, \ldots, N$ являются решениями краевых задач

$$y'' - (\varkappa_j^2 + \upsilon_{j-1}(x))y = 0, \ (0 \le x < \infty); \ \varphi_{j-1}(0, i\varkappa_j) = 0, \ \varphi_{j-1}'(0, i\varkappa_j) = 1 \quad (I.I5)$$

с потенциалами, определяемыми рекуррентной формулой:

$$\upsilon_j(x) = \upsilon_{j-1}(x) - 2\frac{d^2}{dx^2} \ln\Big(1 + C_j \int_0^x \varphi_{j-1}^2(t, i\varkappa_j)\,dt\Big), \ (j = 1, \ldots, N); \ \upsilon_0 = \upsilon_{0*}. \quad (I.I6)$$

Если $\varphi_{\upsilon_*}(x, i\varkappa_j), (j = 1, \ldots, N)$ - собственные функции задачи (0.I),(0.2), удовлетворяющие начальным условиям (0.4), то

$$C_j = \Big\{ \int_0^\infty \varphi_{\upsilon_*}^2(x, i\varkappa_j)\,dx \Big\}^{-1} = [f_{\upsilon_*}'(0, i\varkappa_j)]^2 m_j^2(\upsilon_*). \quad (I.I7)$$

Доказательство этой леммы основано на технике операторов преобразований Крамма-Крейна и содержится, например, в /4,5/.

Остается восстановить $\upsilon_{0*}(x)$ по функции $S_{0*}(k)$ (I.I3). Это можно сделать методом, основанным на следующем утверждении /I/ §5.

<u>Лемма I.2.</u> Пусть набор величин (I.I2) удовлетворяет условиям леммы I.I и функция $S_{0*}(k)$ построена по формуле (I.I3). Тогда всегда существует начальное приближение $\upsilon_0 \in \Omega(0)$, которое можно выбрать достаточно близко к искомому $\upsilon_{0*}$, для того, чтобы последовательность

$$\upsilon_{n+1}(x) = \upsilon_n(x) + \frac{1}{\pi}\frac{d}{dx}\int_{-\infty}^{\infty} \{S_{\upsilon_n}(k) - S_{0*}(k)\} f_{\upsilon_0}^2(x, k)\,dk, \ n = 0, 1, \ldots \quad (I.I8)$$



сходилась при $n \to \infty$ по норме (I.I) к потенциалу $\upsilon_{0*} \in \Omega(0)$, для которого $S_{\upsilon_{0*}}(k) = S_{0*}(k)$.

§ 2. Опишем схему, по которой была составлена программа для расчета на ЭВМ обратных задач, рассматриваемых в настоящей заметке*). Обозначим через

$$\delta_\upsilon(k) = \frac{i}{2} \ln S_\upsilon(k), \quad 0 \le k < \infty, \quad (2.I)$$

фазу рассеяния краевой задачи (0.I),(0.2). Будем считать, не ограничивая общности, $\delta_\upsilon(k)$ непрерывной функцией, нормированной условием $\delta_\upsilon(+\infty) = 0$, что выполняется, если вычислять фазу с помощью фазового уравнения (/9/,гл. 4):

$$\delta_\upsilon'(x, k) = \frac{1}{k}\upsilon(x)\sin^2(kx - \delta_\upsilon(x, k)), (0 \le x < \infty); \ \delta_\upsilon(0, k) = 0, \quad (2.2)$$

откуда

$$\delta_\upsilon(k) = \lim_{x \to \infty} \delta_\upsilon(x, k), \quad 0 < k < \infty. \quad (2.3)$$

В качестве данных рассеяния потенциала $\upsilon \in \Omega(N)$ будем рассматривать набор величин

$$Q(\upsilon) = \{ \delta_\upsilon(k), (0 \le k < \infty); \ \varkappa_j(\upsilon); \ C_j(\upsilon) = \{\int_0^\infty \varphi_j^2(x, i\varkappa_j(\upsilon))\,dx\}^{-1}; j = 1, N\} \quad (2.4)$$

определяющих, как и (0.6), однозначно краевую задачу (0.I),(0.2). Выбор нормировочных постоянных $C_j$ вместо $m_j^2$ (0.6) позволяет непосредственно пользоваться преобразованиями (I.I4)-(I.I6), если учесть, что справедлива следующая лемма.

---

*) Результаты численного расчета непосредственно по схеме, изложенной в леммах I.I и I.2, будут опубликованы отдельно.

Лемма 2.I. Пусть задан набор величин

$$Q_* = \{ \delta_*(k), (0 \le k \infty); \; \varkappa_{j*}; \; C_{j*}; (j=1,2,\dots,\mathcal{N}) \}, \quad (2.5)$$

определяющих однозначно потенциал $v_* \in \Omega(\mathcal{N})$, для которого $Q(v_*) = Q_*$. Тогда функция

$$\delta_{0*}(k) = \delta_*(k) + 2\sum_{j=1}^{\mathcal{N}} \operatorname{arctg} \frac{\varkappa_j}{k}, \quad 0 \le k < \infty \quad (2.6)$$

является фазой рассеяния потенциала $v_{0*} \in \Omega(0)$, с помощью которого $v_*$ восстанавливается формулами (I.I4)-(I.I6).

Доказательство. Логарифмируя обе стороны (I.I3) и учитывая, что

$$\ln \frac{k - i\varkappa_j}{k + i\varkappa_j} = -2i \operatorname{arctg} \frac{\varkappa_j}{k}, \quad j = 1,2,\dots,\mathcal{N},$$

получаем (2.6). Из $v_* \in X$ следует, что $v_{0*} \in X$, так как функции $\Delta v_j(x) = v_j(x) - v_{j-1}(x), (j=1,\dots,\mathcal{N})$ в силу (I.I6), являются непрерывными функциями, для которых справедливы асимптотики(/4/ §I2):

$\Delta v_j(x) \sim -4C_j x, (x \to 0)$; $\Delta v_j(x) \approx -\frac{2}{C_j}(2\varkappa_j)^3 e^{-\varkappa_j x}, (x \to \infty)$.

Из этих асимптотик вытекает также, что если $v_* \in L^1(0,\infty)$, то и $v_{0*} \in L^1(0,\infty)$ (и обратно), что вместе с асимптотикой(/8/ гл.I2):

$$\delta_v(k) = \frac{1}{2k}\int_0^\infty v(x)dx + o\left(\frac{1}{k}\right), \quad k \to \infty, \quad (2.7)$$

справедливой для любого $v \in L^1(0,\infty)$, дает следующее

Следствие. Пусть определенный данными рассеяния (2.5) потенциал $v_* \in X$, тогда $v_{0*} \in X$ и

$$\int_0^\infty v_{0*}(x)dx - 4\sum_{j=1}^{\mathcal{N}} \varkappa_j = \int_0^\infty v_*(x)dx = \lim_{k\to\infty} 2k\,\delta_*(k). \quad (2.8)$$

Таким образом, лемма 2.I вместе с леммой I.I. сводит задачу о восстановлении $v_*$ по $Q_*$ (2.5) к нахождению $v_{0*}$ по приведенной фазе $\delta_{0*}$ (2.6). Последняя задача сводится к решению уравнения /I/ §6



$$h_n^{(\alpha)}(x) - \int_x^\infty P_{v_0}(x,t)\, h_n^{(\alpha)}(t) = F_n^{(\alpha)}(x), \quad 0 \le x < \infty, \quad (2.9)$$

с правой частью

$$F_n^{(\alpha)}(x) = \frac{8}{\pi}\int_0^\infty |f_{v_0}^2(k)| \{\delta_{v_n}(k) - \delta_{0*}(k)\} \frac{k\cos kx}{1+\alpha k^3} dk. \quad (2.10)$$

Искомый потенциал $v_{0*}(x)$ получается как предел при $n \to \infty$ последовательности $v_{n+1}(x) = v_n(x) + h_n^{(\alpha)}(x), n=0,1,\dots$, где $v_0 \in \Omega(0)$ – начальное приближение, $\delta_{0*}(k)$ – задается (2.6), $\delta_{v_n}(k)$ определяется по $v_n$ формулами (2.2), (2.3), а $|f_{v_0}(k)| = \exp\{k^{-1}\int_0^\infty v_0(x)\sin(2kx - 2\delta_{v_0}(x,k))dx\}$. Ядро

$$P_{v_0}(x,t) = \operatorname{sign}(t-2x) K_{v_0}\left(\frac{t}{2}, \frac{|t-2x|}{2}\right) + \int_x^t K_{v_0}\left(\frac{t}{2}, \frac{u}{2}\right) K_{v_0}\left(\frac{t}{2}, \frac{|u-2x|}{2}\right) \operatorname{sign}(u-2x)du, \quad x \le t < \infty, \quad /6/$$

где $K_{v_0}(x,t)$ – решение интегрального уравнения

$$K_{v_0}(x,t) = \frac{1}{2}\int_{\frac{x-t}{2}}^{\frac{x+t}{2}} v_0(s)ds + \int_{\frac{x-t}{2}}^{\frac{x+t}{2}} ds \int_0^{\frac{x-t}{2}} v_0(s+\xi) K_{v_0}(s+\xi, s-\xi)d\xi, \quad x \le t < \infty$$

Введение регуляризирующего параметра $\alpha > 0$ в (2.I0) соответствует аналогичному методу устойчивого суммирования рядов Фурье, предложенного А.Н.Тихоновым и В.Я.Арсениным(/I0/ гл.6). Начальные приближения выбираем в виде

$$v_0(x) = \begin{cases} A(b-x), & 0 \le x \le b, \\ 0, & b \le x < \infty, \end{cases} \quad (2.11)$$

где $A$ и $b$ удовлетворяют условию

$$\frac{Ab^2}{2} = \lim_{k\to\infty} 2k\,\delta_*(k) + 4\sum_{j=1}^{\mathcal{N}} \varkappa_j.$$

Это равенство, вместе с (2.8), дает $\int_0^\infty v_n(x)dx = \int_0^\infty v_0(x)dx$ при любом $n = 0,1,\dots$, в силу свойства $\int_0^\infty h_n^{(\alpha)}(x)dx = 0$ (/I/ §6). Отметим в заключение, что вопросы об области сходимости метода Ньютона в обратной задаче рассеяния и об аналитическом обосновании сходимости $\upsilon_n^{(\alpha)}(x)$ при $\alpha \to 0$, $n \to \infty$ к искомому потенциалу $\upsilon_*(x)$ нуждаются в дальнейшем обосновании, которое будет опубликовано отдельно.

§ 3. Приведенная в предыдущем параграфе рассчетная схема проверялась на модельных задачах. По заданному потенциалу $\upsilon(x)$ строится набор $Q(\upsilon)$ (2.4), по которому восстанавливается потенциал $\upsilon_*$ и сравнивается с $\upsilon(x)$. Фаза $\delta_\upsilon(k)$ находим, решая задачу (2.2),(2.3). Собственные числа находим как нули функций Йоста $f_\upsilon(i\varkappa)$ при $\varkappa > 0$. $f_\upsilon(i\varkappa)$ определяем формулой (0.5), где $f_\upsilon(x, i\varkappa)$ получаем, решая интегральное уравнение

$$f_\upsilon(x,i\varkappa) = e^{-\varkappa} + \int_x^\infty \frac{sh\,\varkappa(t-x)}{\varkappa}\upsilon(t) f_\upsilon(t,i\varkappa)dt, \quad 0 \le x < \infty$$

методом последовательных приближений. Имея $f_\upsilon(x, i\varkappa_j)$, $j=1,\dots,N$, находим $m_j^2$ (0.6). Для определения $C_j$ (I.I7) остается подсчитать

$$f'_\upsilon(0,i\varkappa_j) = -\varkappa_j - \int_0^\infty ch\,\varkappa_j t\,\upsilon(t) f_\upsilon(t,i\varkappa_j)dt, \ (j=1,\dots,N).$$

Параметр $\alpha > 0$ выбирается экспериментально в интервале от 0.0I до 0.005, уменьшая его значения по мере уменьшения разности $\delta_{\upsilon_n}(k) - \delta_{0*}(k)$ в (2.I0).

В табл. I и 2 приведены расчеты для потенциалов, у которых отсутствуют собственные числа. В качестве искомого потенциала в табл.I взята функция $\upsilon(x) = (x-1)(x-2)\exp\{-(x/2)^2\}, (0 \le x < \infty)$.

Для начальных приближений брались функции

$V_0(x) = 0{,}75(1 - x/2.9062), (0 \le x \le 3)$; $V_0(x) \equiv 0, (3 \le x < \infty)$;

$V_0^{(1)}(x) = 0{,}3726(1 - x/5.85), (0 \le x \le 6)$; $V_0^{(1)}(x) \equiv 0, (6 \le x < \infty)$;

$V_0^{(2)}(x) = 7{,}2655(1 - x/0.3), (0 \le x \le 0.3)$; $V_0^{(2)}(x) \equiv 0, (0.3 \le x < \infty)$;

$V_0^{(3)}(x) = 0{,}069x, (0 \le x \le 5.4)$; $V_0^{(3)}(x) = 4.8436 - 0.8279x, (5.4 \le x \le 6)$

$V_0^{(3)}(x) \equiv 0, (6 \le x < \infty)$,



которые приводят к одному и тому же результату $V_{15}(x)$. Номер указывает количество итераций. В табл.2

$V(x) = 0{,}75(3x-2)(3x-4)\exp\{-(3x/4)^2\}, (0 \le x < \infty)$,

начальное приближение $V_0(x) = 4{,}3593(1-x), (0 \le x \le 1)$, $V_0(x) \equiv 0, (1 \le x < \infty)$. $\delta(k)$ – фаза, соответствующая потенциалу $V(x)$, $\delta_{12}(k)$ – фаза, соответствующая полученному потенциалу $V_{12}(x)$. В табл.3а приведены расчеты для потенциала $\upsilon(x) = (4-5x)\exp\{-x\}, (0 \le x < \infty)$, у которого есть одно собственное число $\varkappa_1$ = 0.539I, а нормировочная постоянная $C_1$ = 0.0542. $V_{13}^*$ – потенциал, соответствующий приведенной фазе (2.6), $V_{13}$ – найденный по формулам (I.I4)-(I.I6).

В табл. 3б потенциал $V(x) = 10(1 - e^{2x})/e^{1+x^2}, (0 \le x < \infty)$ имеет два собственных числа $\varkappa_1$ = 0.8056, $\varkappa_2$ = 2.38I3; нормировочные постоянные $C_1$ = I.2744, $C_2$ = 0.9840. Счет велся на ЭВМ СДС-6400.

| x | $V(x)$ | $V_{15}(x)$ | $V_0(x)$ | I | $V_0^{(1)}(x)$ | $V_0^{(2)}(x)$ | $V_0^{(3)}(x)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.00 | 2.000 | 2.615 | .750 | I | .373 | 7.266 | 0.000 |
| .15 | 1.564 | 1.928 | .711 | I | .363 | 3.633 | .010 |
| .30 | 1.164 | 1.128 | .673 | I | .353 | 0.000 | .021 |
| .45 | .810 | .783 | .634 | I | .344 | 0.000 | .031 |
| .60 | .512 | .499 | .595 | I | .334 | 0.000 | .041 |
| .75 | .272 | .262 | .556 | I | .325 | 0.000 | .052 |
| .90 | .090 | .111 | .518 | I | .315 | 0.000 | .062 |
| 1.05 | -.036 | -.044 | .479 | I | .306 | 0.000 | .072 |
| 1.20 | -.112 | -.111 | .440 | I | .296 | 0.000 | .083 |
| 1.35 | -.144 | -.140 | .402 | I | .287 | 0.000 | .093 |
| 1.50 | -.142 | -.151 | .363 | I | .277 | 0.000 | .104 |
| 1.65 | -.115 | -.108 | .324 | I | .268 | 0.000 | .114 |
| 1.80 | -.071 | -.074 | .285 | I | .258 | 0.000 | .124 |
| 1.95 | -.018 | -.021 | .247 | I | .248 | 0.000 | .135 |
| 2.10 | .037 | .041 | .208 | I | .239 | 0.000 | .145 |
| 2.25 | .088 | .082 | .169 | I | .229 | 0.000 | .155 |
| 2.40 | .133 | .136 | .131 | I | .220 | 0.000 | .166 |
| 2.55 | .168 | .171 | .092 | I | .210 | 0.000 | .176 |
| 2.70 | .192 | .191 | .053 | I | .201 | 0.000 | .186 |
| 2.85 | .206 | .207 | .015 | I | .191 | 0.000 | .197 |
| 3.00 | .211 | .206 | 0.000 | I | .182 | 0.000 | .207 |
| 3.15 | .207 | .208 | 0.000 | I | .172 | 0.000 | .217 |
| 3.30 | .196 | .200 | 0.000 | I | .162 | 0.000 | .228 |
| 3.45 | .181 | .179 | 0.000 | I | .153 | 0.000 | .238 |
| 3.60 | .163 | .166 | 0.000 | I | .143 | 0.000 | .248 |
| 3.75 | .143 | .141 | 0.000 | I | .134 | 0.000 | .259 |
| 3.90 | .123 | .120 | 0.000 | I | .124 | 0.000 | .269 |
| 4.05 | .104 | .107 | 0.000 | I | .115 | 0.000 | .279 |
| 4.20 | .086 | .083 | 0.000 | I | .105 | 0.000 | .290 |
| 4.35 | .069 | .071 | 0.000 | I | .096 | 0.000 | .300 |
| 4.50 | .055 | .057 | 0.000 | I | .086 | 0.000 | .311 |
| 4.65 | .043 | .040 | 0.000 | I | .076 | 0.000 | .321 |
| 4.80 | .034 | .036 | 0.000 | I | .067 | 0.000 | .331 |
| 4.95 | .025 | .021 | 0.000 | I | .057 | 0.000 | .342 |
| 5.10 | .019 | .011 | 0.000 | I | .048 | 0.000 | .352 |
| 5.25 | .014 | -.001 | 0.000 | I | .038 | 0.000 | .362 |
| 5.40 | .010 | -.021 | 0.000 | I | .029 | 0.000 | .373 |
| 5.55 | .007 | -.033 | 0.000 | I | .019 | 0.000 | .248 |
| 5.70 | .005 | -.051 | 0.000 | I | .010 | 0.000 | .124 |
| 5.85 | .004 | -.067 | 0.000 | I | 0.000 | 0.000 | 0.000 |

Таблица I.



| x | $V(x)$ | $V_{12}(x)$ | $V_0(x)$ | I | k | $\delta(k)$ | $\delta_{12}(k)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.0 | 6.000 | 7.215 | 4.359 | I | 0.000 | 0.0000 | 0.0000 |
| .1 | 4.691 | 4.646 | 3.923 | I | .100 | .1598 | .3191 |
| .2 | 3.491 | 3.413 | 3.487 | I | .200 | .3160 | .6311 |
| .3 | 2.431 | 2.444 | 3.052 | I | .300 | .4647 | .9283 |
| .4 | 1.535 | 1.532 | 2.616 | I | .400 | .6011 | 1.2012 |
| .5 | .815 | .822 | 2.180 | I | .500 | .7186 | 1.4364 |
| .6 | .270 | .274 | 1.744 | I | .600 | .8080 | 1.6157 |
| .7 | -.108 | -.128 | 1.308 | I | .700 | .8559 | 1.7117 |
| .8 | -.335 | -.315 | .872 | I | .800 | .8432 | 1.6863 |
| .9 | -.433 | -.436 | .436 | I | .900 | .7511 | 1.5010 |
| 1.0 | -.427 | -.455 | 0.000 | I | 1.000 | .5837 | 1.1645 |
| 1.1 | -.346 | -.325 | 0.000 | I | 1.100 | .3952 | .7869 |
| 1.2 | -.214 | -.222 | 0.000 | I | 1.200 | .2515 | .5004 |
| 1.3 | -.055 | -.056 | 0.000 | I | 1.300 | .1723 | .3434 |
| 1.4 | .110 | .101 | 0.000 | I | 1.400 | .1429 | .2855 |
| 1.5 | .264 | .270 | 0.000 | I | 1.500 | .1439 | .2878 |
| 1.6 | .398 | .396 | 0.000 | I | 1.600 | .1608 | .3214 |
| 1.7 | .503 | .502 | 0.000 | I | 1.700 | .1844 | .3682 |
| 1.8 | .577 | .577 | 0.000 | I | 1.800 | .2092 | .4175 |
| 1.9 | .619 | .613 | 0.000 | I | 1.900 | .2320 | .4631 |
| 2.0 | .632 | .633 | 0.000 | I | 2.000 | .2511 | .5015 |
| 2.1 | .621 | .617 | 0.000 | I | 2.200 | .2768 | .5534 |
| 2.2 | .589 | .587 | 0.000 | I | 2.400 | .2878 | .5752 |
| 2.3 | .544 | .541 | 0.000 | I | 2.600 | .2893 | .5776 |
| 2.4 | .489 | .496 | 0.000 | I | 2.800 | .2860 | .5713 |
| 2.5 | .429 | .439 | 0.000 | I | 3.000 | .2804 | .5606 |
| 2.6 | .369 | .362 | 0.000 | I | 3.500 | .2432 | .4856 |
| 2.7 | .311 | .308 | 0.000 | I | 4.000 | .2057 | .4104 |
| 2.8 | .257 | .254 | 0.000 | I | 4.500 | .1755 | .3502 |
| 2.9 | .208 | .211 | 0.000 | I | 5.000 | .1522 | .3039 |
| 3.0 | .166 | .172 | 0.000 | I | 5.500 | .1340 | .2670 |
| 3.1 | .130 | .132 | 0.000 | I | 6.000 | .1264 | .2521 |
| 3.2 | .101 | .104 | 0.000 | I | 6.500 | .1196 | .2386 |
| 3.3 | .076 | .074 | 0.000 | I | 7.000 | .1135 | .2269 |
| 3.4 | .057 | .057 | 0.000 | I | 7.500 | .1080 | .2159 |
| 3.5 | .042 | .042 | 0.000 | I | 8.000 | .1029 | .2055 |
| 3.6 | .031 | .032 | 0.000 | I | 8.500 | .0983 | .1963 |
| 3.7 | .022 | .030 | 0.000 | I | 9.000 | .0941 | .1878 |
| 3.8 | .015 | .019 | 0.000 | I | 9.500 | .0903 | .1803 |
| 3.9 | .011 | .016 | 0.000 | I | 10.000 | .0867 | .1734 |

Таблица 2.

| $x$ | $V(x)$ | $V_{13}(x)$ | $V^*_{13}(x)$ | $V(x)$ | $V_{11}(x)$ | $V^*_{11}(x)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.0 | 4.000 | 7.864 | 7.864 | 0.000 | -.324 | -.324 |
| .1 | 3.167 | 4.256 | 4.279 | -.806 | -1.093 | -.175 |
| .2 | 2.456 | 2.493 | 2.541 | -1.738 | -2.099 | -.188 |
| .3 | 1.852 | 1.706 | 1.785 | -2.764 | -3.272 | -.253 |
| .4 | 1.341 | 1.304 | 1.419 | -3.842 | -4.541 | -.303 |
| .5 | .910 | .897 | 1.053 | -4.923 | -5.826 | -.314 |
| .6 | .549 | .568 | .771 | -5.955 | -7.034 | -.292 |
| .7 | .248 | .246 | .501 | -6.886 | -8.043 | -.244 |
| .8 | 0.000 | -.008 | .302 | -7.668 | -8.753 | -.188 |
| .9 | -.203 | -.211 | .155 | -8.264 | -9.097 | -.136 |
| 1.0 | -.368 | -.388 | .033 | -8.647 | -9.081 | -.097 |
| 1.1 | -.499 | -.506 | -.033 | -8.803 | -8.766 | -.076 |
| 1.2 | -.602 | -.622 | -.099 | -8.736 | -8.250 | -.068 |
| 1.3 | -.681 | -.692 | -.125 | -8.461 | -7.628 | -.073 |
| 1.4 | -.740 | -.753 | -.149 | -8.003 | -6.966 | -.080 |
| 1.5 | -.781 | -.788 | -.152 | -7.400 | -6.307 | -.090 |
| 1.6 | -.808 | -.816 | -.155 | -6.692 | -5.661 | -.094 |
| 1.7 | -.822 | -.827 | -.148 | -5.922 | -5.030 | -.094 |
| 1.8 | -.826 | -.832 | -.142 | -5.129 | -4.411 | -.087 |
| 1.9 | -.923 | -.829 | -.134 | -4.349 | -3.808 | -.075 |
| 2.0 | -.812 | -.820 | -.126 | -3.611 | -3.227 | -.063 |
| 2.1 | -.796 | -.806 | -.118 | -2.937 | -2.681 | -.047 |
| 2.2 | -.776 | -.786 | -.110 | -2.340 | -2.182 | -.035 |
| 2.3 | -.752 | -.763 | -.104 | -1.827 | -1.735 | -.023 |
| 2.4 | -.726 | -.713 | -.071 | -1.397 | -1.352 | -.001 |
| 2.5 | -.698 | -.680 | -.055 | -1.047 | -1.040 | -.006 |
| 2.6 | -.668 | -.661 | -.055 | -.769 | -.770 | -.013 |
| 2.7 | -.638 | -.639 | -.056 | -.553 | -.555 | -.001 |
| 2.8 | -.608 | -.613 | -.054 | -.390 | -.403 | .001 |
| 2.9 | -.578 | -.581 | -.050 | -.270 | -.287 | .000 |
| 3.0 | -.548 | -.548 | -.044 | -.183 | -.200 | .005 |
| 3.1 | -.518 | -.514 | -.036 | -.121 | -.139 | -.003 |
| 3.2 | -.489 | -.481 | -.028 | -.079 | -.089 | -.001 |
| 3.3 | -.461 | -.449 | -.020 | -.050 | -.060 | -.003 |
| 3.4 | -.434 | -.421 | -.014 | -.031 | -.040 | -.001 |
| 3.5 | -.408 | -.397 | -.010 | -.019 | -.027 | .001 |
| 3.6 | -.383 | -.376 | -.010 | -.012 | -.020 | -.001 |
| 3.7 | -.358 | -.359 | -.014 | -.007 | -.012 | .009 |
| 3.8 | -.336 | -.343 | -.021 | -.004 | -.014 | -.002 |
| 3.9 | -.314 | -.330 | -.034 | -.002 | -.004 | -.012 |

Таблица 3а. Таблица 3б.



## ЛИТЕРАТУРА


I. Е.П.Жидков, Р.В.Малышев, Е.Х.Христов. Сообщение ОИЯИ,Р5-9063 (1975).

2. М.М.Crum, The Quarterly Journal of Mathematics, Oxford, 6, 2, 121-128 (1955).

3. М.Г.Крейн, ДАН СССР, II3, 970-973 (1957).

4. Л.Д.Фаддеев. УМН I4, № 4, 57-II9 (1959).

5. В.Ф.Короп. Сиб.матем. фурнал, т.II, № 5, 672-693(I96I).

6. В.А.Марченко. Спектральная теория операторов Штурма-Лиувилля, Киев, изд-во "Наукова думка", I972.

7. Л.В.Канторович, Г.П.Акилов. Функциональный анализ в нормированных пространствах. М., Физматгиз, I959.

8. Р.Ньютон. Теория рассеяния волн и частиц. Изд-во "Мир", Москва, I969.

9. Ф.Каладжеро. Метод фазовых функций в теории потенциального рассеяния. Изд-во "Мир", Москва, I972.

IO. А.Н.Тихонов, В.Я.Арсенин.Методы решения некоррентных задач. Из-во "Наука", Москва, I974.


Рукопись поступила в издательский отдел
2 июля I976 года.