ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р5-99-314

В.В.Пупышев*

ЛОЖНЫЕ СЛАГАЕМЫЕ В ЗАДАЧЕ ТРЕХ ЧАСТИЦ

Направлено в журнал «Теоретическая и математическая физика»

*E-mail: pupyshev@thsun1.jinr.ru

1999

1. ВВЕДЕНИЕ

Понятие о полном наборе сохраняющихся квантовых чисел является одним из основных понятий квантовой механики [1]. Полный набор состоит из физических величин, обладающих следующими свойствами. Во-первых, эти величины измеримы одновременно. Во-вторых, если они одновременно имеют определенные значения в некотором состоянии, то любая другая физическая величина, не являющаяся их функцией, не может иметь определенного значения в этом же состоянии. Полное описание состояния невозможно без знания полного набора его квантовых чисел. Поэтому построение такого набора является одной из основных задач теоретической квантовой механики.

В настоящей работе мы исследуем задачу такого рода для системы трех бесспиновых частиц с произвольными массами m_1, m_2, m_3 и центральными парными взаимодействиями V_k, где $k = 1, 2, 3$ – номер пары частиц с номерами i и j. Мы докажем, что полный набор сохраняющихся квантовых чисел любого состояния такой системы содержит особое квантовое число $p_u = 1$, если каждое $(k = 1, 2, 3)$ взаимодействие – сумма

$$V_k = V_k^u + V_k^s \tag{1}$$

слагаемых двух разных типов, а именно таких, что сумма слагаемых первого типа по всем парам частиц тождественно не равна нулю, а сумма слагаемых второго типа по всем парам частиц тождественно равна нулю:

$$\sum_{k=1}^{3} V_k^u \neq 0\,; \quad \sum_{k=1}^{3} V_k^s \equiv 0\,. \tag{2}$$

Пусть H_0 и E – свободный гамильтониан и полная энергия рассматриваемой трехчастичной системы с взаимодействиями, обладающими свойствами (1) и (2). Тогда полное взаимодействие $V = V_1 + V_2 + V_3$ сводится к сумме слагаемых первого типа, $V = V_1^u + V_2^u + V_3^u$, и поэтому слагаемые второго типа отсутствуют в уравнении Шредингера:

$$(H_0 - E)\,\Psi = -V\,\Psi = -\Big(\sum_{k=1}^{3} V_k^u\Big)\,\Psi\,. \tag{3}$$

Любое решение Ψ этого уравнения содержит информацию о слагаемых V_k^u и не содержит никакой информации о слагаемых V_k^s. Поэтому слагаемые V_k^u и V_k^s будем называть физическими и, соответственно, ложными слагаемыми взаимодействия V_k. Ниже мы дадим более корректное определение и покажем, что слагаемые, являющиеся ложными для одного класса функций, могут оказаться физическими для другого класса функций и наоборот.

Исследование ложных слагаемых представляется особо интересным в связи с выводами работы [2]. В ней на примере системы нескольких тождественных бозонов в основном состоянии было впервые показано, что ложные слагаемые потенциалов необходимо исключать, чтобы правильно решить уравнения фаддеевского типа для двухчастичных амплитуд, описывающих лишь двухчастичные корреляции. Как отмечалось в этой же работе, при решении уравнений Фаддеева [3] такое исключение никогда не делалось. Мы докажем, что для исключения всех ложных слагаемых из уравнений Фаддеева достаточно включить новое квантовое число $p_u = 1$ в полный набор известных сохраняющихся квантовых чисел.

В теории Фаддеева [3] искомое решение Ψ уравнения Шредингера (3) представляется суммой

$$\Psi = \sum_{k=1}^{3} \Psi_k \,, \tag{4}$$

а фаддеевские компоненты Ψ_1, Ψ_2, Ψ_3 подчиняются системе трех зацепляющихся дифференциальных уравнений. В случае (1), (2) эти уравнения имеют следующий вид

$$(H_0 - E)\,\Psi_i = -V_i\,\Psi = -(V_i^u + V_i^s)\sum_{k=1}^{3}\Psi_k\,, \quad i = 1,2,3, \tag{5}$$

и, в отличие от уравнения Шредингера (3), содержат физические слагаемые взаимодействий наряду с ложными. В связи с этим возникают два вопроса, не исследованных в теории Фаддеева, а именно: эквивалентно ли уравнение Шредингера (3) системе уравнений Фаддеева (5), когда взаимодействия имеют ложные слагаемые, и как эти слагаемые влияют на строение волновой функции и ее фаддеевских компонент? Мы ответим и на эти вопросы.

Для начала напомним некоторые понятия теории Фаддеева [3] и метода гипергармоник [4, 5].

Пусть $(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i)$ – три $(i = 1,2,3)$ набора стандартных приведенных векторов Якоби в шестимерном координатном пространстве $\mathcal{R}^6 = \mathcal{R}^3_x \oplus \mathcal{R}^3_y$ трех рассматриваемых частиц [3]. Каждой $(i = 1,2,3)$ паре $(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i)$ известным способом [6] сопоставляется шестимерный вектор $\mathbf{r}_i \equiv (\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i) \in \mathcal{R}^6$ с обычными гиперсферическими координатами (r, Ω_i). Здесь: $r \equiv (x_i^2 + y_i^2)^{1/2}$ – гиперрадиус, а $\Omega_i \equiv (\hat{x}_i, \hat{y}_i, \varphi_i)$ – совокупность пяти гиперсферических углов, таких, что $\hat{q}$ – пара сферических углов трехмерного вектора $\mathbf{q} = \mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i$, а $\varphi_i \equiv \mathrm{arctg}\,(y_i/x_i)$.

В случае центральных парных взаимодействий сохраняется полная энергия E, квадрат $\ell(\ell+1)$ полного углового момента $(\mathbf{l} \equiv \mathbf{l}_{x_i} + \mathbf{l}_{y_i})$, его третья проекция m и четность σ по отношению к инверсии $\mathbf{r}_i \to -\mathbf{r}_i$.

Обычное ограничение, накладываемое на гладкость искомых решений уравнений Шредингера или Фаддеева, – непрерывность всех производных второго порядка во всем пространстве $\mathcal{R}^6$.

Пусть $\mathcal{A}^\epsilon$ – класс функций, обладающих указанной гладкостью и заданным набором $\varepsilon \equiv (E, \ell, m, \sigma)$ сохраняющихся квантовых чисел. В A^ϵ полный и ортонормированный на единичной сфере $\mathcal{S}^5$ в $\mathcal{R}^6$ угловой базис [6] образуют вполне определенные трехчастичные гипергармоники [5]:

$$\begin{aligned} Y^{\ell m}_{Lab}(\Omega_i) &\equiv N_{Lab}\,(\sin\varphi_i)^a\,(\cos\varphi_i)^b\,P_n^{(a+1/2,\,b+1/2)}(\cos 2\varphi_i)\;\mathcal{Y}^{\ell m}_{ab}(\hat{y}_i, \hat{x}_i)\,, \\ L &= a + b + 2n,\ n = 0, 1 \ldots,\ \mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{l},\ (-1)^{a+b} = \sigma\,. \end{aligned} \tag{6}$$

Гипергамоники аргументов Ω_k и Ω_i связаны унитарным преобразованием сохраняющим все квантовые числа набора ε:

$$Y^{\ell m}_{Lcd}(\Omega_k(\Omega_i; \gamma_{ki})) = \sum_{cd} \langle\, ab|K(\gamma_{ki})|cd\rangle_{L\ell}\, Y^{\ell m}_{Lab}(\Omega_i)\,. \tag{7}$$

Здесь и всюду далее индексы a и b пробегают все допустимые при заданных L, ℓ и σ значения, а матричные элементы,

$$\langle ab|K(\gamma_{ki})|cd\rangle_{L\ell} \equiv \langle Y^{\ell m}_{Lab}(\Omega_i)|Y^{\ell m}_{Lcd}(\Omega_k)\rangle \equiv \int_{\mathcal{S}^5} d\Omega_i\, \left(Y^{\ell m}_{Lab}(\Omega_i)\right)^*\, Y^{\ell m}_{Lcd}(\Omega_k)\,, \tag{8}$$

оператора кинематического преобразования $K(\gamma_{ki})$ [7, 8] (коэффициенты Рейнала-Реваи [9]) параметрически зависят от кинематического угла [5]

$$\gamma_{ki} \equiv g_{ki}\,\mathrm{arctg}\,\left(m_j(m_1 + m_2 + m_3)/m_k m_i\right)^{1/2}\,. \tag{9}$$

По определению кинематических углов, если $(k, i) = (1,2), (3,1), (2,3)$, то

$$g_{ki} = -g_{ik} = 1\,, \quad 0 < \gamma_{ki} < \pi/2\,, \quad \sum_{(k,i)} \gamma_{ki} = \pi\,. \tag{10}$$

2. ЛОЖНЫЕ СЛАГАЕМЫЕ ПАРНЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ

Прежде всего дадим корректное определение ложных слагаемых произвольных парных взаимодействий. Для этого укажем, в каком смысле следует понимать соотношения (2).

Все физические свойства квантового состояния рассматриваемой трехчастичной системы не зависят от математического формализма, используемого для их описания, в частности от того, в каком из трех координатных представлений $\langle \mathbf{r}_i|, i = 1,2,3$, записывается волновая функция Ψ этого состояния и уравнение Шредингера (3), которому она подчинена. Поэтому понятие физических V_k^u и ложных V_k^s слагаемых взаимодействия V_k не должно зависеть от выбора координатного представления, в котором записываются соотношения (2). Далее, в квантовой механике [1] взаимодействие V_k, а значит и компоненты V_k^u и V_k^s его разбиения (1), всегда понимаются как операторы. В математике любой оператор всегда определяется в некотором пространстве или же классе функций. Всем упомянутым выше принципам удовлетворяет следующее определение физических и ложных слагаемых парных взаимодействий.

Для рассматриваемого класса функций операторы V_k^u и V_k^s будем называть физическими и ложными слагаемыми взаимодействия V_k, если соотношения (2) *выполняются в любом из трех координатных представлений $\langle \mathbf{r}_i|, i = 1,2,3$, и для любой функции Ψ этого класса:*

$$\langle \mathbf{r}_i| \sum_{k=1}^{3} V_k^u(\mathbf{r}_k)|\,\Psi(\mathbf{r}_i)\,\rangle \neq 0\,, \quad i = 1,2,3\,, \tag{11}$$

$$\langle \mathbf{r}_i| \sum_{k=1}^{3} V_k^s(\mathbf{r}_k)|\,\Psi(\mathbf{r}_i)\,\rangle \equiv 0\,, \quad i = 1,2,3. \tag{12}$$

Выведем достаточные условия существования ложных слагаемых центральных взаимодействий для функций класса $\mathcal{A}^\epsilon$. Парные взаимодействия представим операторными рядами по их собственным угловым базисам (6):

$$V_k(x_k) = \sum_{LL'} \sum_{ab} |Y_{Lab}^{\ell m}(\Omega_k)\,\rangle\; V_{kab}^{LL'}(r)\;\langle\, Y_{L'ab}^{\ell m}(\Omega_k)|\,, \quad k = 1,2,3. \tag{13}$$

Использовав эти ряды и применив соотношения (7) – (9), получаем операторное разложение полного взаимодействия в представлении $\langle \mathbf{r}_i|$:

$$V(\mathbf{r}_i) = \sum_{L}\sum_{ab}\,\sum_{L'}\sum_{a'b'} |Y_{Lab}^{\ell m}(\Omega_i)\rangle\, {}^{i}V_{aba'b'}^{LL'}(r)\,\langle Y_{a'b'}^{\ell m}(\Omega_i)|\,, \tag{14}$$

$$\begin{aligned} {}^{i}V_{aba'b'}^{LL'}(r) = \delta_{aa'}\delta_{bb'}\,V_{iab}^{LL'}(r) \;\; &+ \;\; \sum_{k\neq i}\sum_{cd}\langle ab|K(\gamma_{ki})|cd\rangle_{L\ell}\; \times \\ &\times \;\; V_{kcd}^{LL'}(r)\;\langle cd|K(\gamma_{ik})|a'b'\rangle_{L'\ell}\,, \end{aligned} \tag{15}$$

где индексы a,b,c,d и a',b' принимают все допустимые при данных L,ℓ,σ и L' значения. Те значения L, при которых ${}^{i}V_{aba'b'}^{LL'}(r) = 0$ для всех возможных $i = 1,2,3$;

a,b,a',b',L' и r, объединим в некоторое множество $\mathcal{E}$. Если оно окажется не пустым ($\mathcal{E} \neq \emptyset$), то подсуммы рядов (13) с $L \notin \mathcal{E}$ и $L \in \mathcal{E}$ будут, в силу полноты базиса (6) и определений (11) и (12), физическими и, соответственно, ложными слагаемыми для функций класса $\mathcal{A}^\epsilon$:

$$V_k^u(\mathbf{r}_k) = \sum_{L\notin\mathcal{E}} V_k^{Lu}(\mathbf{r}_k),\; V_k^{Lu}(\mathbf{r}_k) \equiv \sum_{L'}\sum_{ab} |Y_{Lab}^{\ell m}(\Omega_k)\rangle V_{kab}^{LL'}(r)\langle\, Y_{L'ab}^{\ell m}(\Omega_k)|, \tag{16}$$

$$V_k^s(\mathbf{r}_k) = \sum_{L\in\mathcal{E}} V_k^{Ls}(\mathbf{r}_k),\; V_k^{Ls}(\mathbf{r}_k) \equiv \sum_{L'}\sum_{ab} |Y_{Lab}^{\ell m}(\Omega_k)\rangle V_{kab}^{LL'}(r)\langle\, Y_{L'ab}^{\ell m}(\Omega_k)|. \tag{17}$$

Действительно, по определению множества $\mathcal{E}$, сумма трех операторов V_k^u отображает хотя бы одну базисную гипергармонику (6) в ненулевую, а сумма трех операторов V_k^s отображает любую базисную гипергармонику в тождественный нуль, независимо от номера $i = 1,2,3$ набора Ω_i гиперуглов, в котором эта гипергармоника записана. В силу полноты базиса гипергармоник для любой функции Ψ класса $\mathcal{A}^\epsilon$ и во всех трех координатных представлениях выполняются соотношения (11) и (12).

Итак, если $\mathcal{E} \neq \emptyset$, то ложные слагаемые существуют и верны представления (16) и (17).

Теперь докажем обратное утверждение: если ложные слагаемые существуют, то имеется непустое множество $\mathcal{E}$ значений гипермомента, такое, что верны представления (17).

Физические (если таковые имеются) и ложные слагаемые каждого взаимодействия V_k представим операторными рядами типа (13) по его собственному базису (6). Используя эти ряды и формулы (7) и (8), вычислим матричные элементы сумм (2) физических и ложных слагаемых в базисе (6), записанном в каждом из трех координатных представлениях. В результате для каждой допустимой четверки фиксированных значений L, L' и a', b' получим систему равенств (15), в которой $i = 1,2,3$, индексы a,b принимают все возможные при данных L,ℓ,σ значения, а функция ${}^{i}V_{aba'b'}^{LL'}(r)$ отлична от нуля хотя бы при некоторых L', a', b' и r или тождественно равна нулю при любых L', a', b' и r, соответственно, для физических и ложных слагаемых. Те значения L, при которых ${}^{i}V_{aba'b'}^{LL'} \equiv 0$ при всех i, a, b, и r, объединим в некоторое множество $\mathcal{E}$. Используя его, получаем соотношения (16) и (17).

Итак, если ложные слагаемые существуют, то они представимы в виде сумм (17), где $\mathcal{E} \neq \emptyset$.

Опишем другой способ построения множества $\mathcal{E}$.

По определению (8) $\langle ab|K(\gamma_{ii})|a'b'\rangle_{L\ell} = \delta_{aa'}\delta_{bb'}$. Поэтому в обозначениях

$$X^{LL'}_{kcda'b'}(r) \equiv V^{LL'}_{kcd}(r)\,\langle cd|K(\gamma_{ki})|a'b'\rangle_{L'\ell} \tag{18}$$

для каждого L система однородных уравнений (15) с любыми фиксированными L', a', b' и любыми возможными i, a, b принимает вид

$$X^{LL'}_{iaba'b'}(r) + \sum_{k\neq i}\sum_{cd}\,\langle ab|K(\gamma_{ki})|cd\rangle_{L\ell} X^{LL'}_{kcda'b'}(r) = 0\,. \tag{19}$$

Матрица $\mathbf{M}^L$ полученной системы уравнений (19) имеет конечную размерность, равную утроенному числу гипергармоник (6) с данными квантовыми числами L, ℓ, m, σ. Согласно критерию разрешимости однородной системы линейных уравнений с конечной матрицей [10], система уравнений (19) имеет нетривиальные решения тогда и только тогда, когда ее матрица вырождена ($\det \mathbf{M}^L = 0$). Следовательно, множество $\mathcal{E}$ состоит их тех значений L, при которых рассматриваемая система уравнений (19) имеет вырожденную матрицу, а матричные элементы $V^{LL'}_{kab}$ парных взаимодействий таковы, что подобные им функции (18) удовлетворяют этой системе при всех L', a', b' и r.

Просуммируем доказанные утверждения в виде следующего критерия.

Теорема 1. *Для класса функций $\mathcal{A}^\varepsilon$ ложные слагаемые парных центральных взаимодействий существуют тогда и только тогда, когда $\mathcal{E} \neq \emptyset$. Множество $\mathcal{E}$ состоит из тех значений L, при которых функции $V^{LL'}_{iab}(r)$ или подобные им функции $X^{LL'}_{iaba'b'}(r)$ с любыми возможными индексами i, a, b удовлетворяют соответствующей однородной системе уравнений* (15) *или* (19) *при всех L', a', b', r. Ложные слагаемые представимы рядами* (17).

Поясним следующие утверждения: ложные и физические слагаемые могут быть частными и общими, а само понятие "ложные (физические) слагаемые" является относительным.

Пусть $\mathcal{A}^{L\varepsilon}$ – класс функций, обладающих дополнительным к набору ε сохраняющимся квантовым числом L. В таком классе полный базис на $\mathcal{S}^5$ образует набор гипергармоник (6) с фиксированным индексом L. Дословно повторив вывод и анализ систем уравнений (15) и (19) в таком базисе, можно убедиться в справедливости следующих утверждений.

Во-первых, множество $\mathcal{E}$ для класса $\mathcal{A}^{L\varepsilon}$ либо пустое, либо состоит из одного элемента L. Поэтому для такого класса либо $V_k = V^{Lu}_k$, либо $V_k = V^{Ls}_k$, где $k = 1, 2, 3$,

а V^{Lu}_k и V^{Ls} определены формулами (16) и (17), в которых $L' = L$. Во-вторых, если оператор V^{Lu} – физическое слагаемое для класса $\mathcal{A}^{L\varepsilon}$, то этот же оператор – ложное слагаемое для другого ($L' \neq L$) класса $\mathcal{A}^{L'\varepsilon}$. В-третьих, имеет место следующий критерий.

Теорема 2. *Для класса функций $\mathcal{A}^{L\varepsilon}$ ложные слагаемые парных центральных взаимодействий существуют тогда и только тогда, когда матрица $\mathbf{M}^L$ системы уравнений* (19) *с таким же значением гипермомента вырождена, а совокупность функций* (18) *является одним из нетривиальных решений этой системы при $L' = L$ и любых a', b' и r.*

Для класса $\mathcal{A}^\varepsilon$ каждый оператор V^{Lu} или V^{Ls} логично называть частным физическим или ложным слагаемым взаимодействия V_k, а для сумм (16) или (17) таких операторов представляется разумным использовать термин общее физическое или общее ложное слагаемое того же взаимодействия V_k.

Пусть $\mathcal{A}$ – класс функций, не обладающих определенными значениями ℓ, m, σ. В этом классе полный базис на $\mathcal{S}^5$ образуют гипергармоники (6) со всеми возможными индексами $\ell = 0, 1, \ldots$; $m = -\ell, -\ell+1, \ldots, \ell$ и L, a, b. Дословно повторив вывод систем уравнений (15) и (19) в таком базисе, нетрудно прийти к следующим выводам.

Во-первых, множество $\mathcal{E}$ для класса $\mathcal{A}$ состоит из тех значений гипермомента L, при которых однородные системы уравнений (15) или (19) удовлетворяются при любом мультииндексе ε, т.е. при всех возможных ℓ, m, σ. Во-вторых, для класса $\mathcal{A}$ физические и ложные слагаемые каждого ($k = 1, 2, 3$) взаимодействия V_k представимы в виде сумм

$$V^u_k(\mathbf{r}_k) = \sum_{\ell m\sigma}\sum_{L\notin\mathcal{E}}\sum_{L'ab} |Y^{\ell m}_{Lab}(\Omega_k)\rangle\, V^{LL'}_{kab}(r)\,\langle Y^{\ell m}_{L'ab}(\Omega_k)|\,, \tag{20}$$

$$V^s_k(\mathbf{r}_k) = \sum_{\ell m\sigma}\sum_{L\in\mathcal{E}}\sum_{L'ab} |Y^{\ell m}_{Lab}(\Omega_k)\rangle\, V^{LL'}_{kab}(r)\,\langle Y^{\ell m}_{L'ab}(\Omega_k)|\,. \tag{21}$$

По построению множество $\mathcal{E}$ для класса $\mathcal{A}$ является подмножеством множества $\mathcal{E}$ для любого класса $\mathcal{A}^\varepsilon$. Поэтому ложные слагаемые (21) для класса $\mathcal{A}$ являются частными ложными слагаемыми для любого класса $\mathcal{A}^\varepsilon$, но физические слагаемые (20) для класса $\mathcal{A}$, вообще говоря, являются суперпозициями физических и ложных слагаемых для любого класса $\mathcal{A}^\varepsilon$.

Пусть $\mathcal{E}(\mathcal{B})$ – множество $\mathcal{E}$ для класса $\mathcal{B} = \mathcal{A}^{L\varepsilon}, \mathcal{A}^\varepsilon, \mathcal{A}$, тогда в силу определений рассмотренных классов и множеств $\mathcal{E}(\mathcal{B})$

$$\mathcal{A}^\varepsilon = \cup_L\, \mathcal{A}^{L\varepsilon} \Longrightarrow \mathcal{E}(\mathcal{A}^\varepsilon) \neq \cup_L\, \mathcal{E}(\mathcal{A}^{L\varepsilon}),\ \mathcal{A} = \cup_\varepsilon\, \mathcal{A}^\varepsilon \Longrightarrow \mathcal{E}(\mathcal{A}) = \cap_\varepsilon\, \mathcal{E}(\mathcal{A}^\varepsilon)\,.$$

Опишем более простой, чем упомянутый выше, способ построения ложных для класса $\mathcal{A}$ слагаемых центральных парных взаимодействий. Начнем с вывода достаточных условий существования таких слагаемых. Парные взаимодействия представим функциональными рядами по их собственным полным на $\mathcal{S}^5$ базисам потенциальных гипергармоник [4, 11]:

$$V_k(x_k) = \sum_{L=0,2,\dots} V_k^L(r)\, Y^{00}_{L00}(\Omega_k)\,, \quad k = 1,2,3. \tag{22}$$

Используя эти представления и правила (7), (8), получим функциональное разложение полного взаимодействия в выбранном координатном представлении $\langle \mathbf{r}_i|$:

$$V(\mathbf{r}_i) = \sum_{L=0,2,\dots} \sum_{a=0}^{L/2} {}^iV_a^L(r)\, Y^{00}_{Laa}(\Omega_i)\,, \tag{23}$$

$${}^iV_a^L(r) \equiv V_i^L(r)\delta_{a0} + \sum_{k\neq i} \langle aa|K(\gamma_{ki})|00\rangle_{L0}\, V_k^L(r)\,. \tag{24}$$

Функции Y^{00}_{Laa} линейно независимы по обоим индексам L и a. Поэтому в любом из трех ($i = 1,2,3$) координатных представлений ряд (23) не содержит потенциальных мультиполей V_1^L, V_2^L, V_3^L с некоторым фиксированным L тогда и только тогда, когда все мультиполи (24) этого ряда с индексами $i = 1,2,3$ и $a = 0,\dots,L/2$ тождественно равны нулю. Это условие равносильно следующей конечной ($a = 0,\dots,L/2$) цепочке не зацепляющихся систем из трех ($i = 1,2,3$) тождеств по аргументу r:

$$\mathbf{N}^{La}\,\mathbf{V}^L(r) = 0\,, \quad a = 0,\dots,L/2\,, \quad \forall r \geq 0\,. \tag{25}$$

Здесь $\mathbf{V}^L$ – столбец $(V_1^L, V_2^L, V_3^L)^T$, а $\mathbf{N}^{La}$ – матрица с элементами

$$N^{La}_{ii} \equiv \delta_{a0}, \quad N^{La}_{ki} \equiv \langle aa|K(\gamma_{ki})|00\rangle_{L0}, \quad k \neq i = 1,2,3. \tag{26}$$

Если найдется хотя бы одно значение индекса a, при котором матрица $\mathbf{N}^{La}$ не вырождена, то всей цепочке тождеств (25) будут удовлетворять только тривиальные мультиполи ($V_i^L \equiv 0, i = 1,2,3$).

Исследуем условия, при которых матрица $\mathbf{N}^{La}$ вырождена. Заменив матричные элементы (26) по известным формулам [8, 12]

$$\begin{aligned}\langle aa|K(\gamma_{ki})|00\rangle_{L0} &= (-1)^a \langle aa|K(\gamma_{ik})|00\rangle_{L0} = \\ &= C_{La}\,(\sin 2\gamma_{ki})^a\, P^{(a+1/2,\,a+1/2)}_{L/2-a}(\cos 2\gamma_{ki})\,, \\ C_{La} &\equiv N_{Laa}/2^a N_{L00}\, P^{(1/2,\,1/2)}_{L/2}(-1)\,,\end{aligned} \tag{27}$$

и положив по определению $(k,i) \equiv (1,2),(2,3),(3,1)$, выведем равенство

$$\begin{aligned}\det \mathbf{N}^{La} &= \delta_{a0} - \delta_{a0}\, C^2_{L0} \sum_{(k,i)} \left(P^{(1/2,\,1/2)}_{L/2}(\cos 2\gamma_{ki}) \right)^2 + \\ &+ \ (1+(-1)^a)\, C^3_{La} \prod_{(k,i)} (\sin 2\gamma_{ki})^a\, P^{(a+1/2,\,a+1/2)}_{L/2-a}(\cos 2\gamma_{ki})\,.\end{aligned} \tag{28}$$

Как следует из этого равенства, матрица $\mathbf{N}^{00}$ и все матрицы $\mathbf{N}^{La}$ с нечетными a вырождены при любых допустимых значениях (10) кинематических углов (9), матрицы $\mathbf{N}^{La}$ с $L \neq 0$ и четными a могут быть вырожденными только при определенных значениях кинематических углов, причем матрицы $\mathbf{N}^{La}$ с четными $a > 0$ вырождены тогда и только тогда, когда хотя бы один из трех кинематических углов является нулем функции $P^{(a+1/2,\,a+1/2)}_{L/2-a}(\cos 2\gamma)$. Далее, если $L = 4p$, где p – некоторое натуральное число, то при $a = L/2 = 2p$, согласно формуле (28),

$$\det \mathbf{N}^{4p,2p} = 2\, C^3_{4p,2p} \prod_{(k,i)} (\,\sin 2\gamma_{ki}\,)^{2p}\,.$$

Следовательно, при любых допустимых значениях (10) кинематических углов матрица $\mathbf{N}^{4p,2p}$ не вырождена.

Итак, вся цепочка тождеств (25) может выполняться, если $L = 0$ или, если L четное, но не кратное четырем, число.

Пусть $\mathcal{E}$ – множество значений индекса L, для которых справедливы цепочки тождеств (25). Тогда для класса $\mathcal{A}$ подсуммы

$$V_k^u(\mathbf{r}_k) = \sum_{L\notin\mathcal{E}} V_k^L(r)\, Y^{00}_{L00}(\Omega_k)\,, \tag{29}$$

$$V_k^s(\mathbf{r}_k) = \sum_{L\in\mathcal{E}} V_k^L\, Y^{00}_{L00}(\Omega_k) \tag{30}$$

рядов (22) будут физическими и ложными слагаемыми парных взаимодействий.

Действительно, по построению множества $\mathcal{E}$ подсумма ряда (23) для полного взаимодействия по индексу $L \in \mathcal{E}$ действует на произвольную функцию Ψ класса $\mathcal{A}$ как оператор умножения на тождественный нуль, а оставшаяся подсумма этого же ряда по индексу $L \notin \mathcal{E}$ равносильна оператору умножения на функцию, тождественно не равную нулю. Следовательно, все тождества (11) и (12), в которых V_k^u и V_k^s – операторы умножения (29) и (30), выполняются, а полное взаимодействие V вырождается в сумму физических слагаемых: при любом $i = 1,2,3$ и для любой нетривиальной функции Ψ класса $\mathcal{A}$

$$V(\mathbf{r}_i) = \sum_{k=1}^{3} V_k^u(\mathbf{r}_k(\mathbf{r}_i)) = \sum_{L\notin\mathcal{E}} \sum_{a=0}^{L/2} V_a^L(r)\, Y^{00}_{Laa}(\Omega_i)\,, \quad V(\mathbf{r}_i)\,\Psi(\mathbf{r}_i) \neq 0\,.$$

Итак, если $\mathcal{E} \neq \emptyset$, то для класса $\mathcal{A}$ ложные слагаемые парных взаимодействий существуют.

Докажем обратное утверждение: если ложные слагаемые существуют, то $\mathcal{E} \neq \emptyset$ и верны представления (29) и (30).

Пусть ложные слагаемые существуют, тогда они ряды типа

$$V^s(\mathbf{r}_k) = \sum_{L\in\mathcal{F}} V_k^L(r)\, Y_{L00}^{00}(\Omega_k), \tag{31}$$

где $\mathcal{F}$ некоторое не пустое множество, и для любой функции $\Psi \in \mathcal{A}$ тождества (12) равносильны тождествам

$$\sum_{k=1}^{3} V_k^s(\mathbf{r}_k(\mathbf{r}_i)) \equiv 0\,, \quad \forall \mathbf{r}_i, \quad i = 1,2,3. \tag{32}$$

Подставим ряды (31) в тождества (32). Спроектировав полученные соотношения на базис гипергармоник (6), для каждого $L \in \mathcal{F}$ получим цепочку ($a = 0, ..., L/2$) выполняющихся тождеств (25). Следовательно, $\mathcal{F} \equiv \mathcal{E}$, и верно представление (30). Из этого представления и равенства $V_k^u = V_k - V_k^s$, следует представление (29).

Сформулируем доказанный выше критерий.

Теорема 3. *Для класса функций $\mathcal{A}$ ложные слагаемые парных центральных взаимодействий существуют тогда и только тогда, когда $\mathcal{E} \neq \emptyset$.* Множество $\mathcal{E}$ *состоит из тех значений L, при которых потенциальные мультиполи V_k^L парных взаимодействий* (22) *подчиняются цепочке тождеств* (25). *Если $L \in \mathcal{E}$, то или $L = 0$, или же* $L/2$ нечетное число.

3. УРАВНЕНИЕ ШРЕДИНГЕРА

Анализ уравнения Шредингера (3) и его общего решения $\Psi \in \mathcal{A}^\epsilon$ в случае $\mathcal{E} \neq \emptyset$ начнем с определения проекционных операторов.

Единичный на $\mathcal{S}^5$ оператор I представим в виде суммы $I = P_u + P_s$ двух ортогональных проекторов

$$P_u \equiv \sum_{L\notin\mathcal{E}} \sum_{ab} |Y_{Lab}^{\ell m}(\Omega_i)\,\rangle\,\langle\, Y_{Lab}^{\ell m}(\Omega_i)|\,, \;\; P_s \equiv \sum_{L\in\mathcal{E}} \sum_{ab} |Y_{Lab}^{\ell m}(\Omega_i)\,\rangle\,\langle\, Y_{Lab}^{\ell m}(\Omega_i)|\,. \tag{33}$$

Так как преобразование (7) унитарно и сохраняет гипермомент, то представления (33) инвариантны относительно выбора индекса $i = 1,2,3$. Поэтому ряды (16) и (17) можно записать в более компактной форме:

$$V_k^u = P_u V_k\,, \quad V_k^s = P_s V_k\,, \quad k = 1,2,3, \tag{34}$$

где проекторы понимаются, как суммы (33), записанные в том же координатном представлении $\langle \mathbf{r}_k|$, что и взаимодействие V_k. Из соотношений (2) и (34) следует цепочка равенств

$$\sum_{k=1}^{3} V_k^s = \sum_{k=1}^{3} P_s V_k = P_s V \equiv 0\,, \tag{35}$$

справедливая в любом из трех координатных представлениях, благодаря упомянутой выше инвариантности проекторов. Так как V и P_s эрмитовские операторы, то из тождества $P_s V \equiv 0$ следует, что $V P_s \equiv 0$. Значит, $[P_s, V]_- = 0$, а так как $P_u = I - P_s$, то $[P_u, V]_- = 0$. Следовательно, оба проектора P_s и P_u коммутируют с полным гамильтонианом $H \equiv H_0 - V$. Поэтому собственные числа p_u оператора P_u являются сохраняющимися квантовыми числами. Любая функция U из подпространства $\mathcal{U}^\epsilon \equiv P_u \mathcal{A}^\epsilon$ является собственной для оператора P_u и отвечает его собственному значению $p_u = 1$. Любая функция S из ортогонального дополнения $\mathcal{S}^\epsilon \equiv P_s \mathcal{A}^\epsilon$ подпространства $\mathcal{U}^\epsilon$ до пространства $\mathcal{A}^\epsilon$ принадлежит ядру оператора P_u, т.е. отвечает собственному значению $p_u = 0$.

Поясним в каком смысле пространства $\mathcal{U}^\epsilon$ и $\mathcal{S}^\epsilon$ ортогональны. По определению (33) проекторов P_u и P_s полный на $\mathcal{S}^5$ базис пространства $\mathcal{U}^\epsilon$ или $\mathcal{S}^\epsilon$ образуют гипергармоники (6) с $L \notin \mathcal{E}$ или с $L \in \mathcal{E}$. Поэтому эти пространства ортогональны друг другу, вообще говоря, только относительно интегрирования на сфере S^5, но по любой из трех ($i = 1,2,3$) совокупностей гиперуглов Ω_i.

В уравнение Шредингера (3) подставим искомое в классе $\mathcal{A}^\epsilon$ решение Ψ в виде суммы $\Psi = U + S$ его ортогональных проекций $U \equiv P_u \Psi$ и $S \equiv P_s \Psi$ на подпространства $\mathcal{U}^\epsilon$ и $\mathcal{S}^\epsilon$. Используя равенства (33) – (35), спроектируем полученное уравнение на эти подпространства. Таким образом, в подпространстве $\mathcal{S}^\epsilon$ получим тождество $S \equiv 0$, а в подпространстве $\mathcal{U}^\epsilon$ – уравнение

$$(\,H_0 - E\,)\,U = -\,(\,P_u V\,)\;U\,. \tag{36}$$

В силу тождества $S \equiv 0$ спектр (Ψ, E) исходного уравнения Шредингера (3) совпадает ($\Psi \equiv U$) со спектром (U, E) уравнения (36).

Просуммируем результаты исследований уравнения Шредингера в виде следующего утверждения.

Теорема 4. *Если в функциональном пространстве $\mathcal{A}^\epsilon$ выполняются условия* (11) и (12), *то любое нетривиальное решение Ψ уравнения Шредингера* (3) *принадлежит* *инвариантному подпространству* $\mathcal{U}^\varepsilon$ *оператора* P_u. *Условие* (12) *равносильно закону сохранения квантового числа* $p_u = 1$ *и определяет множество* $\mathcal{E}$ *посредством однородных уравнений* (15) *или* (19).

4. УРАВНЕНИЯ ФАДДЕЕВА

Анализ системы уравнений Фаддеева (5) и ее общего решения (Ψ_1, Ψ_2, Ψ_3), принадлежащего классу $\mathcal{A}^\varepsilon$ в случае $\mathcal{E} \neq \emptyset$, начнем с исследования характерных свойств проекций U_k и S_k компонент такого решения на подпространства $\mathcal{U}^\varepsilon$ и $\mathcal{S}^\varepsilon$.

По определению проекторов (33) имеем

$$\Psi_k = U_k + S_k\,, \quad U_k \equiv P_u \Psi_k\,, \quad S_k \equiv P_s \Psi_k \quad k = 1,2,3. \tag{37}$$

Напомним, что в теории Фаддеева каждая компонента Ψ_i и уравнение системы (5), содержащее эту компоненту в своей левой части, записывается в их собственном представлении $\langle \mathbf{r}_i|$.

Докажем, что, если все три проекции U_1, U_2, U_3 тождественно не равны нулю, то их сумма обладает аналогичным свойством в смысле

$$\langle \mathbf{r}_i| \sum_{k=1}^{3} U_k(\mathbf{r}_k)\,\rangle \neq 0\,, \quad i = 1,2,3. \tag{38}$$

Предположим противное: пусть в пространстве $\mathcal{R}^6$ верны три тождества

$$\langle \mathbf{r}_i| \sum_{k=1}^{3} U_k(\mathbf{r}_k)\,\rangle \equiv 0\,, \quad i = 1,2,3.$$

Заменим в этих тождествах все слагаемые рядами

$$U_k(\mathbf{r}_k) = \sum_{L \notin \mathcal{E}} \sum_{ab} U_{kLab}(r)\ Y^{\ell m}_{Lab}(\Omega_k) \tag{39}$$

по их собственным полным угловым базисам пространства $\mathcal{U}^\varepsilon$. Спроектировав полученные тождества на такие базисы по правилам (7) и (8), для каждого фиксированного $L \notin \mathcal{E}$ имеем однородную систему тождеств по переменной r:

$$U_{iLab}(r) + \sum_{k\neq i} \sum_{cd} \langle ab|K(\gamma_{ki})|cd\rangle_{L\ell}\, U_{kLcd}(r) \equiv 0\,, \tag{40}$$

где $i = 1,2,3$, а индексы a,b и c,d пробегают все допустимые при данных L, ℓ и σ значения. Матрица системы (40) совпадает с матрицей $\mathbf{M}^L$ системы (19), отвечающей тому же значению L. По определению множества $\mathcal{E}$ такая матрица не вырождена. По альтернативе Фредгольма [10] рассматриваемая однородная система (40)

с невырожденной матрицей либо несовместна, либо имеет лишь тривиальное решение. Полученное противоречие означает, что одновременно нетривиальные слагаемые U_1, U_2, U_3 фаддеевских компонент (37) всегда обладают свойством (38).

Аналогичным образом можно доказать и более общее утверждение: сумма трех любых одновременно нетривиальных функции, записанных в их собственных координатных представлениях и принадлежащих подпространству $\mathcal{U}^\varepsilon$, тождественно не равна нулю.

Теперь докажем, что слагаемые S_1, S_2, S_3 фаддеевских компонент (37) всегда удовлетворяют во всем пространстве $\mathcal{R}^6$ трем тождествам

$$\langle \mathbf{r}_i| \sum_{k=1}^{3} S_k(\mathbf{r}_k)\,\rangle \equiv 0\,, \quad i = 1,2,3. \tag{41}$$

В уравнениях (5) заменим все искомые функции суммами (37). Спроектировав полученные уравнения с помощью равенств (33) – (35) на подпространство $\mathcal{S}^\varepsilon$, выводим следующие уравнения:

$$(\,H_0 - E\,)\, S_i = -P_s V_i \sum_{k=1}^{3} (\,U_k + S_k\,)\,, \quad i = 1,2,3. \tag{42}$$

Опишем решения соответствующих однородных уравнений

$$(\,H_0 - E\,)\, \tilde{S}_i = 0\,, \quad i = 1,2,3. \tag{43}$$

Как известно [5, 6], при $E < 0$ в классе $\mathcal{A}^\varepsilon$ имеются только тривиальные решения, если же $E > 0$, то любое решение – ряд

$$\tilde{S}_i(\mathbf{r}_i) = \sum_{L\in\mathcal{E}} C^L \sum_{ab} D^L_{iab}\, J_{L+2}(r\sqrt{E})\, Y^{\ell m}_{Lab}(\Omega_i)\,, \quad i = 1,2,3, \tag{44}$$

содержащий регулярные функции Бесселя J_ν, произвольные константы C^L и некоторые коэффициенты D^L_{iab}. Следовательно, при $E < 0$ во всем координатном пространстве $\mathcal{R}^6$ выполняются тождества

$$\langle \mathbf{r}_i| \sum_{k=1}^{3} \tilde{S}_k(\mathbf{r}_k)\rangle \equiv 0\,, \quad i = 1,2,3. \tag{45}$$

Докажем эти тождества в случае $E > 0$. Для этого заменим функции $\tilde{S}_1, \tilde{S}_2, \tilde{S}_3$ соответствующими суммами (44). Применив правила (7)и (8), спроектируем полученные соотношения на их собственные угловые базисы пространства $\mathcal{S}^\varepsilon$. Тогда для каждого $L \in \mathcal{E}$ приходим к конечной и, по предположению, однородной системе уравнений

$$D^L_{iab} + \sum_{k\neq i} \sum_{cd} \langle ab|K(\gamma_{ki})|cd\rangle_{L\ell}\, D^L_{kcd} = 0\,, \tag{46}$$

где $i = 1,2,3$, а индексы a, b, c, d принимают все возможные при данных L, ℓ и σ значения. Матрица этой системы совпадает с вырожденной по определению множества $\mathcal{E}$ матрицей $\mathbf{M}^L$ системы уравнений (19), отвечающей тому же значению индекса L. Следовательно, если наше предположение о справедливости соотношений (45) верно, то существуют коэффициенты D^L_{iab}, одновременно не равные нулю. В противном случае, когда правая часть хотя бы одного уравнения системы (46) отлична от нуля, коэффициенты D^L_{iab} не существуют, т.е. представление (44) не имеет места. Таким образом, получено противоречие, означающее справедливость тождеств (45).

В силу равенств (43) и (45) функции (44) с коэффициентами D^L_{iab}, подчиненными уравнениям (46), удовлетворяют уравнениям Фаддеева (5) при $E > 0$ и любых взаимодействиях. Однако эти функции, благодаря тождествам (45), отвечают тривиальному решению уравнения Шредингера:

$$\Psi = \tilde{\Psi} \equiv \sum_{k=1}^{3} \tilde{S}_k \equiv 0 .$$

Нетривиальное решение системы уравнений Фаддеева, отвечающее тривиальному решению соответствующего уравнения Шредингера, принято называть ложным решением. Ссылки на работы, посвященные проблеме ложных решений, даны в обзоре [8]. Критерий существования таких решений в классе $\mathcal{A}^\varepsilon$ доказан в работе [13].

Как было показано, общее решение (S_1, S_2, S_3) системы уравнений (42),

$$S_i = -(H_0 - E)^{-1} P_s V_i \sum_{k=1}^{3} U_k + \tilde{S}_i , \quad i = 1,2,3, \tag{47}$$

содержит ложное решение $(\tilde{S}_1, \tilde{S}_2, \tilde{S}_3)$, заданное формулами (44) и (46). Суммируя три равенства (47), записанные в их собственных координатных представлениях, и, учитывая формулы (35) и (45), завершаем доказательство тождеств (41).

Используя представления (37) и тождества (47), спроектируем уравнения (5) на подпространство $\mathcal{U}^\varepsilon$. Тогда получим систему уравнений

$$(H_0 - E)\, U_i = -P_u V_i \Psi = -P_u V_i \sum_{k=1}^{3} U_k , \quad i = 1,2,3, \tag{48}$$

не содержащую ни ложных слагаемых парных взаимодействий, ни проекций фаддеевских компонент (37) на подпространство $\mathcal{S}^\varepsilon$. Все решения (U_1, U_2, U_3) этой системы принадлежат пространству $\mathcal{U}^\varepsilon$ и поэтому обладают дополнительным к набору ε квантовым числом $p_u = 1$. В силу соотношений (37), (38) и (41) каждому нетривиальному

решению (U_1, U_2, U_3) отвечает нетривиальное решение (4) уравнения Шредингера (3)

$$\Psi = \sum_{k=1}^{3} U_k , \tag{49}$$

не содержащее проекций S_k, $k = 1,2,3$. По этой причине слагаемые U_k и S_k фаддеевской компоненты Ψ_k, т.е. каждой суммы (37), называем далее ее физическим и, соответственно, ложным слагаемым.

Для полноты рассмотрим особый случай, когда $\mathcal{E} \neq \emptyset$, но $U_1, U_2, U_3 \equiv 0$. В этом случае по формулам (37) и (47) получаем $\Psi_k = S_k = \tilde{S}_k$, $k = 1,2,3$. Поэтому исходные (стандартные) уравнения Фаддеева (5) имеют только ложные решения (44), (46), а соответствующая им волновая функция (49) является тривиальной. Модифицированные уравнения Фаддеева (48) по их построению не имеют ложных решений.

Как было показано, ложные слагаемые парных взаимодействий порождают ложные и, вообще говоря, нетривиальные слагаемые (47) фаддеевских компонент (37). Приведем схему доказательства обратного утверждения: если фаддеевские компоненты имеют ложные слагаемые, то и парные взаимодействия содержат ложные слагаемые.

Пусть верны представления (37) и тождества (38) и (41). Спроектируем эти тождества на полный угловой базис (6) пространства $\mathcal{A}^\varepsilon$. Применив альтернативу Фредгольма, докажем что существует некоторое множество $\mathcal{E}$ таких значений L, что цепочки полученных неоднородных или однородных систем уравнений для гиперсферических компонент U_{kLab} или S_{kLab} слагаемых U_k или S_k, $k = 1,2,3$, имеют нетривиальные решения, если $L \notin \mathcal{E}$ или, соответственно, если $L \in \mathcal{E}$. Введем проекторы (33). Подействуем проектором P_s на уравнения (5). Учтем тождества (38) и (41). Таким образом получим три выполняющихся равенства (47). Суммируя их и введя обозначения $V^s_k \equiv P_s V_k$, $k = 1,2,3$, приходим к тождествам (12), означающим, что ложные слагаемые парных взаимодействий существуют. Чтобы описать множество $\mathcal{E}$ и тем самым завершить доказательство, применим теорему 1.

Теперь можно сформулировать доказанный критерий.

Теорема 5. *В классе функций $\mathcal{A}^\varepsilon$ фаддеевские компоненты, подчиненные стандартным уравнениям Фаддеева* (5) *с центральными парными взаимодействиями, имеют ложные слагаемые тогда и только тогда, когда для этого класса существуют ложные слагаемые таких взаимодействий.*

Обсудим формулировки (3), (5) и (48) задачи трех частиц с точки зрения закона сохранения квантового числа $p_u = 1$.

Согласно представлению (37), решения стандартных уравнений Фаддеева (5), вообще говоря, не обладают квантовым числом $p_u = 1$, действительно $P_u\Psi_k = U_k \neq \Psi_k$, $k = 1,2,3$. Однако, этим числом обладают физические слагаемые (U_1, U_2, U_3) таких решений и их сумма (49), т.е. волновая функция Ψ, удовлетворяющая уравнению Шредингера (3). Физические слагаемые U_1, U_2, U_3 подчинены модифицированным уравнениям Фаддеева (48). Эти уравнения, как и уравнение Шредингера (3), содержат лишь физические слагаемые парных взаимодействий. Поэтому эквивалентность модифицированных уравнений Фаддеева и уравнения Шредингера не вызывает сомнений. В силу этой эквивалентности и представления (49) исходная система уравнений Фаддеева (5) также эквивалентна уравнению Шредингера (3), несмотря на то, что эта система содержит ложные слагаемые и взаимодействий, и фаддеевских компонент. Следовательно, исключение ложных слагаемых из стандартных уравнений Фаддеева не является необходимым, но, как будет пояснено ниже, представляется разумным для экономизации алгоритмов численного решения этих уравнений методом гипергармоник.

Как было показано, для исключения всех ложных слагаемых V_k^s и S_k, $k = 1,2,3$, из стандартных уравнений Фаддеева (5) следует учесть закон сохранения квантового числа $p_u = 1$. Это можно сделать следующим образом. Сначала необходимо построить проектор P_u, предложенным в разделе 2 способом. Затем потребовать, чтобы искомые фаддеевские компоненты обладали квантовым числом $p_u = 1$ в дополнение к набору ε сохраняющихся квантовых чисел, т.е. положить $P_u\Psi_k = \Psi_k = U_k$, $k = 1,2,3$. В результате получатся уравнения Фаддеева (48) в пространстве $\mathcal{U}^\varepsilon$. Полный базис этого пространства на сфере $\mathcal{S}^5$ образуют не все гипергармоники (6), а лишь те, у которых $L \notin \mathcal{E}$. Именно такие гипергармоники и следует использовать для аппроксимации искомых решений (U_1, U_2, U_3) конечными суммами их разложений (39).

Отметим, что в частном случае, а именно для основного состояния системы трех тождественных бозонов с осцилляторными потенциалами, ложные слагаемые фаддеевских компонент впервые исследовались в работе [14]. Проблемы, порождаемые ложными слагаемыми при численном решении уравнений Фаддеева для систем трех тождественных бозонов с S-волновыми запирающими потенциалами, обсуждались в обзоре [8].

5. ПРИМЕРЫ И ЗАМЕЧАНИЯ

В качестве примера рассмотрим случай подобных центральных взаимодействий

$$V_k(x_k) = c_k\, F(x_k)\,, \quad k = 1,2,3, \tag{50}$$

где c_k и F – некоторые ненулевые коэффициенты и функция. Условия (25), определяющие частные ложные слагаемые (L фиксировано) таких взаимодействий для класса функций $\mathcal{A}$, сводятся к совокупности условий для столбца $\mathbf{C}$:

$$\mathbf{N}^{La}\mathbf{C} = 0\,, \quad \mathbf{C} \equiv (c_1, c_2, c_3)^T\,, \quad a = 0, 1, ..., L/2. \tag{51}$$

Пусть $L = 0$. Тогда индекс a принимает только одно значение $a = 0$. Согласно формулам (27) все элементы (26) матрицы $\mathbf{N}^{00}$ равны единице не зависимо от значений кинематических углов, и рассматриваемая система условий (51) вырождается в требование

$$c_1 + c_2 + c_3 = 0\,. \tag{52}$$

Если оно выполняется, то, согласно определению (30), слагаемые

$$\begin{aligned} V_k^{Ls}(\mathbf{r}_k) &= c_k\, Y_{L00}^{00}(\Omega_k)\, F^L(r) = (\delta_{L0} + L\delta_{L2})\, \pi^{-3/2} F^L(r)\cos L\varphi_k, \\ F^L(r) &\equiv (4-L)\pi^{-1/2}\int_0^{\pi/2} d\varphi\, \left(\sin(L+2)\varphi\right)^2\, F(r\cos\varphi), \end{aligned} \tag{53}$$

подобных парных взаимодействий (50) будут частными ложными слагаемыми с $L = 0$ для класса функций $\mathcal{A}$.

Заметим, что для любой системы трех тождественных частиц парные взаимодействия подобны, причем $c_1 = c_2 = c_3$, и поэтому условия (52) не выполняются.

Пусть $L = 2$, тогда имеется две ($a = 0, 1$) системы условий (51). В силу соотношений (10) и (26) – (28)

$$N_{ki}^{2a} = \delta_{ki}\,(-1)^a\cos((2-a)\gamma_{ki} - a\pi/2),\ \det\mathbf{N}^{2a} = 0,\ a = 0,1; k,i = 1,2,3.$$

Поэтому оба ($a = 0, 1$) исследуемые матричные условия (51) сводятся к одной и той же совокупности двух условий:

$$c_1\, \sin 2\gamma_{12} = c_3\, \sin 2\gamma_{23}\,, \quad c_2\, \sin 2\gamma_{12} = c_3\, \sin 2\gamma_{31}\,. \tag{54}$$

Если коэффициенты c_1, c_2, c_3 подчиняются этим условиям, то взаимодействия (50) имеют частные ($L = 2$) ложные для класса функций $\mathcal{A}$ слагаемые, заданные формулами (53) с $L = 2$.

Заметим, что условия (52) и (54) несовместны. Поэтому множество $\mathcal{E}$ для класса $\mathcal{A}$ не может одновременно содержать элементы $L = 0$ и $L = 2$.

Стоит также отметить, что условия (54) выполняются для любой системы трех тождественных частиц, когда $c_1 = c_2 = c_3$ и $\gamma_{12}, \gamma_{31}, \gamma_{23} = \pi/3$. Следовательно, полный набор сохраняющихся квантовых чисел любого состояния произвольной системы трех тождественных частиц с центральными парными взаимодействиями содержит число $p_u = 1$.

Пусть взаимодействия (50) – кулоновские:

$$F(x_k) = 1/x_k\,, \quad c_k = \hbar^{-1}\sqrt{2\mu_{ij}}\, Z_i Z_j e^2\,, \quad k = 1,2,3,$$

где μ_{ij} – приведенная масса, а $Z_i e$ и $Z_j e$ – заряды частиц с номерами i и j. Тогда достаточные условия (52) и (54) существования частных ложных слагаемых с $L = 0$ или $L = 2$ сводятся к соответствующим условиям

$$Z_1 Z_2 \sqrt{\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}} + Z_2 Z_3 \sqrt{\frac{m_2 m_3}{m_2 + m_3}} + Z_1 Z_3 \sqrt{\frac{m_1 m_3}{m_1 + m_3}} = 0\,, \tag{55}$$

$$(Z_1\,\delta_{i2} + Z_2\,\delta_{i1})\left(\frac{m_i + m_3}{m_1 + m_2}\right)^{3/2} = Z_3\left(\frac{m_3}{m_1\delta_{i2} + m_2\delta_{i1}}\right)^{1/2}, \quad i = 1,2, \tag{56}$$

а формулы (53), описывающие такие слагаемые, принимают вид

$$V_k^{Ls}(\mathbf{r}_k) = Z_i Z_j \sqrt{2\mu_{ij}}\left(1 - \frac{L}{10}\right)\frac{16}{3\pi^2 r}\cos L\varphi_k\,, \quad k = 1,2,3\,, \quad L = 0,2.$$

Если $Z_1, Z_2, -Z_3 = \pm n$, $n = 1,2,\ldots$, то соотношение (55) выполняется для частиц с массами $m_1 = m_2 = 7m_3$. С относительной точностью 10^{-3} такие массы имеют системы, в которых одна частица – антипротон (протон) ($m_3 \approx 1,007$ аем), а двумя другими частицами являются положительно (отрицательно) заряженные ионы атома ^7Li ($m_1 = m_2 \approx 7,02$ аем [15]).

В случае $Z_1, Z_2/2, Z_3 = 1$, оба ($i = 1,2$) условия (56) выполняются, если $m_1, m_3 = 1$ аем, $m_2 \approx 4,09777$ аем или же при $m_1, m_3 = 2$ аем, $m_2 \approx 8,19548$ аем. Близкие к указанным значениям масс имеет системы из двух протонов ($m_1 = m_3$) и двухзарядного иона $^4H^{++}$ ($m_2 \approx 4,0026$ аем) или, соответственно, система из двух дейтронов ($m_1 = m_3 \approx 2,0141$ аем) и двухзарядного иона $^8Be^{++}$ ($m_2 \approx 8,005$ аем [15]).

Чтобы пояснить прикладное значение полученных результатов, обсудим проблему выбора реалистического набора парных взаимодействий из двух разных наборов $A = (V_1, V_2, V_3)$ и $\tilde{A} = (\tilde{V}_1, \tilde{V}_2, \tilde{V}_3)$, одинаково хорошо описывающих все имеющиеся

данные по рассеянию и спектрам в каждой паре некоторых частиц a, b, c. Из таких фазовоэквивалентных наборов принято считать реалистическим тот, используя который удается лучше описать всю имеющуюся совокупность данных о свойствах трехчастичной системы abc. Если оба набора A и $\tilde{A}$ не имеют ложных слагаемых, то упомянутый общепринятый рецепт представляется непротиворечивым.

Пусть набор A имеет ложные слагаемые, а набор $\tilde{A}$ не обладает таковыми. Если для вычислений по уравнениям Шредингера или Фаддеева используется набор $\tilde{A}$, то исследуемые свойства системы abc определяются всеми взаимодействиями $\tilde{V}_1, \tilde{V}_2, \tilde{V}_3$. Если же для аналогичных вычислений используется набор A, то свойства той же системы abc определяются не всеми взаимодействиями V_1, V_2, V_3, а лишь их физическими слагаемыми V_1^u, V_2^u, V_3^u. В рассмотренном случае общепринятый рецепт выбора реалистического набора оказывается некорректным по двум причинам. Во-первых, если взаимодействия в системе abc описываются набором ($\tilde{A}$) A, то все ее состояния (не)обладают квантовым числом $p_u = 1$. Во-вторых, набору $\tilde{A}$ сопоставляется не набор A, а набор $A^u \equiv (V_1^u, V_2^u, V_3^u)$.

Следовательно, для корректного выбора реалистического набора из наборов A и $\tilde{A}$ сравнительным анализом трехчастичных данных необходимо, чтобы оба набора либо не имели ложных слагаемых, либо имели ложные слагаемые, определенные одним и тем же множеством $\mathcal{E}$.

Проблема выбора реалистических парных взаимодействий часто возникает в ядерной физике низких энергий. В пределе низких энергий хорошим приближением считается замена сильных взаимодействий их S-волновыми компонентами. Для класса функций $\mathcal{A}^\epsilon$ такие компоненты – суммы (13), в которых $a = \ell$ и $b = 0$. Поэтому условия, определяющие ложные слагаемые S-волновых взаимодействий – однородные уравнения (15), в которых $V_{iab}^{LL'} \equiv 0$ при всех $\mathbf{r}_i$, $i = 1,2,3$ и $a \neq \ell, b \neq 0$.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основные теоретические результаты настоящей работы сформулированы в виде теорем 1 – 5. Примеры использования этих результатов и их прикладное значение обсуждены в предыдущем разделе. Как следует из этого обсуждения, проблема ложных слагаемых в задаче трех частиц представляется достаточно важной и интересной для дальнейшего исследования.

Литература

1. *Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц.* Квантовая механика. М: Наука, 1974.
2. *M. Fabre de la Ripelle, S.Y. Larsen.* Few-Body Systems. 1992. V.13. P.199.
3. *С.П. Меркурьев, Л.Д. Фаддеев.* Квантовая теория рассеяния для систем нескольких частиц. М.: Наука, 1985.
4. *M. Fabre de la Ripelle.* Models and Methods in Few-Body Physics, Lecture Notes in Physics, V.273. Berlin–Heidelberg–NewYork: Springer, 1986.
5. *Р.И. Джибути, Н.Б. Крупенникова.* Метод гиперсферических функций в квантовой механике нескольких тел. Тбилиси: Мецниереба, 1984.
6. *Н.Я. Виленкин.* Специальные функции и теория представления групп. М.: Наука, 1965.
7. *В.В. Пупышев.* ЯФ. 1999. Т.62. С.1955.
8. *В.В. Пупышев.* ЭЧАЯ. 1999. Т.30. С.1562.
9. *J. Raynal, J. Revai.* Nuovo Cimento. 1970. V.A68. P.612.
10. *P. Lankaster.* Theory of Matrices. New York–London: Academic Press, 1969.
11. *В.Д. Эфрос.* ЯФ. 1972. Т.15. С.226.
12. *Я.А. Смородинский, В.Д. Эфрос.* ЯФ. 1973. Т.17. С.210.
13. *В.В. Пупышев.* ТМФ. 1996. Т.107. С.501.
14. *J.L. Friar, B.F. Gibson, G.L. Payne.* Phys. Rev. 1980. V.C22, P.284.
15. *О.Ф. Немец, Ю.В. Гофман.* Справочник по ядерной физике. Киев: Наукова думка, 1975.

Рукопись поступила в издательский отдел
3 декабря 1999 года.

Пупышев В.В. Р5-99-314

Ложные слагаемые в задаче трех частиц

Метод гипергармоник применяется для построения разбиений центральных парных взаимодействий и фаддеевских компонент волновой функции трехчастичной системы на физические и ложные слагаемые. Сумма физических слагаемых взаимодействий, или фаддеевских компонент, по всем парам частиц отлична от нуля, в то время как суммы ложных слагаемых и взаимодействий и фаддеевских компонент по всем парам частиц тождественно равны нулю. Доказан критерий существования ложных слагаемых. Показано, что достаточное условие этого критерия эквивалентно закону сохранения некоторого квантового числа.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики им. Н.Н.Боголюбова ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна, 1999

Pupyshev V.V. P5-99-314

Spurious Terms in Three-Body Problem

The method of hyperharmonics is applied to construct the splitting of central pair interactions and the Faddeev components of the three-body wave function into physical and spurious terms. The sum of physical terms of the interactions or Faddeev components over all pairs of particles is not equal to zero, while the sums of spurious terms of the interactions and the Faddeev components over all pairs of particles are identical with zero. The existence criterion for spurious terms is proved. It is shown that a sufficient condition of this criterion is equivalent to the conservation law for a quantum number.

The investigation has been performed at the Bogoliubov Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna, 1999