

ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

99-312

P5-99-312

П.Г.Акишин

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ОБЪЕМНЫХ
И ГРАНИЧНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ
ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ МАГНИТНЫХ СИСТЕМ,
СОДЕРЖАЩИХ СВЕРХПРОВОДЯЩИЕ ЭКРАНЫ

Направлено в «Журнал вычислительной математики
и математической физики»

1999

В данной работе рассматриваются вопросы, связанные с использованием метода объемных и граничных интегральных уравнений для моделирования магнитных систем, содержащих сверхпроводящие экраны. Подобная проблема возникла в рамках проектных работ по созданию дипольного магнита для эксперимента ALICE (CERN, Женева). Сверхпроводящий экран размещается вдоль оси магнита и используется для экранирования пучка от магнитного поля диполя. Он состоит из нескольких коаксиальных слоев тонкой фольги, охлажденных до температуры, близкой к абсолютному нулю. При этом на поверхности сверхпроводника возникают токи возбуждения, взаимодействующие с внешним полем таким образом, чтобы блокировать проникновение поля внутрь сверхпроводника. В свою очередь индуцированные токи оказывают влияние на распределение намагнитченности в теле магнита. В итоге мы имеем самосогласованную трехмерную нелинейную задачу, для описания которой предлагается использовать интегральную формулировку проблемы магнитостатики.

1. Математическая формулировка проблемы

Рассмотрим задачу нахождения распределения магнитного поля, создаваемого стационарными токами в магнитных системах с изотропным ферромагнитным материалом.

Пусть $\vec{B}(\vec{a})$, $\vec{H}(\vec{a})$, $\vec{M}(\vec{a})$ есть индукция, напряженность и намагнитченность магнитного поля в т. \vec{a} . В отсутствие поверхностных токов и токов, протекающих по ферромагнетике, величины \vec{B} , \vec{H} удовлетворяют уравнениям Максвелла:

$$\begin{aligned} \text{Rot}_{\vec{a}}(\vec{H}(\vec{a})) &= \vec{J}^S(\vec{a}), \\ \text{div}_{\vec{a}}(\vec{B}(\vec{a})) &= 0, \\ \lim_{|\vec{a}| \rightarrow \infty} |\vec{B}(\vec{a})| &= 0, \end{aligned} \quad (1.1)$$

где \vec{J}^S – вектор объемной плотности тока (отличен от нуля только в токовых обмотках). Величины \vec{B} , \vec{H} , \vec{M} связаны следующими нелинейными соотношениями

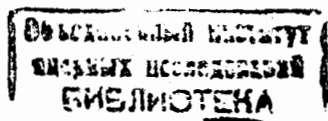
$$\vec{H}(\vec{a}) = \frac{\vec{B}(\vec{a})}{\mu(|\vec{B}(\vec{a})|)}, \quad \vec{M}(\vec{a}) = \frac{\vec{B}(\vec{a})}{\mu_0} - H(\vec{a}), \quad (1.2)$$

где μ_0 – абсолютная магнитная проницаемость вакуума, $\mu(x)$ – магнитная проницаемость (вне железа тождественно равная единице, а внутри железа есть нелинейная функция, характеризующая связь между \vec{H} и \vec{B} для данного типа ферромагнетика). На границе раздела сред с различными магнитными характеристиками выполняются условия непрерывности нормальной и тангенциальной составляющих векторов \vec{B} и \vec{H} , соответственно:

$$(\vec{n}, (\vec{B}_2 - \vec{B}_1)) = 0, \quad [\vec{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1)] = \vec{0}, \quad (1.3)$$

где \vec{n} – единичный вектор нормали к поверхности раздела сред.

Уравнения (1.1)–(1.3) неудобны для непосредственного нахождения вектор-функций $\vec{H}(\vec{a})$, $\vec{B}(\vec{a})$. Существует большое число постановок, вытекающих из уравнений Максвелла. Обзор различных методов и алгоритмов решения задачи магнитостатики, а также существующих программных комплексов расчета двумерных и трехмерных магнитных систем приводится в обзоре в работе [1] и цитируемой в нем литературе. В данной работе используется интегральная постановка задачи магнитостатики.



Представим напряженность \vec{H} в виде суммы двух составляющих

$$\vec{H}(\vec{a}) = \vec{H}^S(\vec{a}) + \vec{H}^m(\vec{a}), \quad (1.4)$$

где $\vec{H}^S(\vec{a})$ есть поле, создаваемое токовыми обмотками, а $\vec{H}^m(\vec{a})$ есть добавочное поле от ферромагнетика. По закону Био-Саварра $\vec{H}^S(\vec{a})$ есть

$$\vec{H}^S(\vec{a}) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega_S} \left[\nabla_{\vec{a}} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{a}|} \times \vec{J}^S(\vec{a}) \right] dv_{\vec{x}}, \quad (1.5)$$

где Ω_S - объем, занимаемый токовыми обмотками. Из (1.2) следует, что

$$\text{Rot}(\vec{H}^m(\vec{a})) = \vec{0}.$$

Таким образом, $\vec{H}^m(\vec{a})$ есть градиент некоторой функции ϕ , и имеет место равенство

$$\vec{H}(\vec{a}) = \vec{H}^S(\vec{a}) + \nabla\phi. \quad (1.6)$$

Функцию ϕ будем называть редуцированным скалярным потенциалом. Из (1.3) получаем непрерывность ϕ на границе раздела сред и уравнения для скачка нормальной производной.

Пусть Ω есть область в R^3 , заполненная ферромагнетиком. Тогда потенциал $\phi(\vec{x})$, удовлетворяет следующим уравнениям:

$$\Delta\phi(\vec{x}) + \text{div}(\vec{M}(\vec{x})) = 0, \quad \vec{x} \in \text{Int}G, \quad (1.7)$$

$$\Delta\phi(\vec{x}) \equiv 0, \quad \vec{x} \in R^3 \setminus \Omega. \quad (1.8)$$

Нормальная производная $\phi(\vec{x})$ на границе области $D\Omega$ терпит разрыв

$$\frac{\partial\phi(\vec{x})}{\partial n_{\vec{x}}^-} - \frac{\partial\phi(\vec{x})}{\partial n_{\vec{x}}^+} = (\vec{M}(\vec{x}), \vec{n}(\vec{x})), \quad (1.9)$$

где $\frac{\partial\phi(\vec{x})}{\partial n_{\vec{x}}^-}$ есть предел нормальной производной $\phi(\vec{x})$ при стремлении точки наблюдения к границе снаружи области G , а $\frac{\partial\phi(\vec{x})}{\partial n_{\vec{x}}^+}$ - предел нормальной производной при стремлении точки наблюдения к граничной точке изнутри области Ω . На поведение потенциала $\phi(\vec{x})$ и его производных на бесконечности накладываются следующие условия:

$$\lim_{|\vec{x}| \rightarrow \infty} |\phi(\vec{x})| = 0, \quad \lim_{|\vec{x}| \rightarrow \infty} |\nabla\phi(\vec{x})| = 0. \quad (1.10)$$

Решение ϕ системы уравнений (1.7)-(1.10) допускает явное представление:

$$\phi(\vec{a}) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} \left(\vec{M}(\vec{x}), \nabla_{\vec{a}} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{a}|} \right) dv_{\vec{x}}. \quad (1.11)$$

Подставляя ϕ из (1.11) в (1.6), получаем интегральную постановку задачи магнитостатики:

$$\vec{H}(\vec{a}) = \vec{H}^S(\vec{a}) + \frac{1}{4\pi} \nabla_{\vec{a}} \int_{\Omega} \left(\vec{M}(\vec{x}), \nabla_{\vec{a}} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{a}|} \right) dv_{\vec{x}}, \quad (1.12)$$

где \vec{H} и \vec{M} удовлетворяют нелинейным соотношениям (1.2).

Рассмотрим ситуацию, когда в магнитное поле вносится сверхпроводник. Пусть $\{G_i, i = 1, M\}$ есть односвязные области сверхпроводника. Поверхностные токи воз-

буждения \vec{J}^E на границах G_i можно рассматривать как дополнительные источники тока. Тогда поле $H^S(\vec{a})$ в (1.12) имеет следующий вид:

$$\vec{H}^S(\vec{a}) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega_S} \left[\nabla_{\vec{a}} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{a}|} \times \vec{J}^S(\vec{a}) \right] dv_{\vec{x}} + \sum_{i=1}^M \frac{1}{4\pi} \oint_{DG_i} \left[\nabla_{\vec{a}} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{a}|} \times \vec{J}^E(\vec{a}) \right] ds_{\vec{x}}. \quad (1.13)$$

Пусть $\vec{B}(\vec{a})$ есть индукция суммарного магнитного поля в точке \vec{a} на границе сверхпроводника. Из условия стационарности токов возбуждения следует, что сила Лоренца $\vec{F}(\vec{a})$, действующая на токовый элемент $\vec{J}^E(\vec{a})$, должна быть коллинеарна вектору внешней нормали $\vec{n}(\vec{a})$ к поверхности сверхпроводника:

$$[\vec{F}(\vec{a}) \times \vec{n}(\vec{a})] = [[\vec{B}(\vec{a}) \times \vec{J}^E(\vec{a})] \times \vec{n}(\vec{a})] = \vec{0}. \quad (1.14)$$

Из условий, что поверхностный ток возбуждения $\vec{J}^E(\vec{a})$ удовлетворяет следующим уравнениям:

$$\text{div}_{\vec{a}}(\vec{J}^E(\vec{a})) = 0, \quad (\vec{J}^E(\vec{a}), \vec{n}(\vec{a})) = 0, \quad (1.15)$$

следует представление:

$$\vec{J}^E(\vec{a}) = [\vec{n}(\vec{a}) \times \nabla_{\vec{a}} f(\vec{a})], \quad (1.16)$$

где $f(\vec{a})$ есть некая скалярная функция, определенная на границе сверхпроводника. Отсюда, учитывая (1.14), получаем:

$$\vec{J}^E(\vec{a})(\vec{n}(\vec{a}), \vec{B}(\vec{a})) = \vec{0}. \quad (1.17)$$

Предполагая, что $\vec{J}^E(\vec{a}) \neq \vec{0}$, получаем:

$$(\vec{n}(\vec{a}), \vec{B}(\vec{a})) = 0. \quad (1.18)$$

Условие (1.18) фактически означает непроникновение поля в сверхпроводник.

Рассмотрим интегралы, стоящие в правой части (1.13). Имеем

$$\begin{aligned} & \oint_{DG_i} \left[\nabla_{\vec{a}} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{a}|} \times \vec{J}^E(\vec{x}) \right] ds_{\vec{x}} = \oint_{DG_i} \left[\nabla_{\vec{a}} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{a}|} \times [\vec{n}(\vec{x}) \times \nabla_{\vec{x}} f(\vec{x})] \right] ds_{\vec{x}} = \\ & = \text{Rot}_{\vec{a}} \oint_{DG_i} \frac{[d\vec{S}_{\vec{x}} \times \nabla_{\vec{x}} f(\vec{x})]}{|\vec{x} - \vec{a}|} = \text{Rot}_{\vec{a}} \oint_{DG_i} \left[d\vec{S}_{\vec{x}} \times \nabla_{\vec{x}} \frac{f(\vec{x})}{|\vec{x} - \vec{a}|} \right] - \text{Rot}_{\vec{a}} \oint_{DG_i} \left[d\vec{S}_{\vec{x}} \times \nabla_{\vec{x}} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{a}|} \right] f(\vec{x}). \end{aligned}$$

Пусть $\hat{f}(\vec{x})$ есть некое продолжение функции $f(\vec{x})$ с границы DG_i внутрь области G_i . Например, функция $\hat{f}(\vec{x})$ может удовлетворять уравнению Лапласа $\Delta\hat{f}(\vec{x}) = 0$ на G_i с условиями Дирихле $\hat{f}(\vec{x}) = f(\vec{x})$ на DG_i . Получаем

$$\oint_{DG_i} \left[d\vec{S}_{\vec{x}} \times \nabla_{\vec{x}} \frac{f(\vec{x})}{|\vec{x} - \vec{a}|} \right] = \oint_{DG_i} \left[d\vec{S}_{\vec{x}} \times \nabla_{\vec{x}} \frac{\hat{f}(\vec{x})}{|\vec{x} - \vec{a}|} \right] = \int_{G_i} \text{Rot}_{\vec{x}} \left[\nabla_{\vec{x}} \frac{\hat{f}(\vec{x})}{|\vec{x} - \vec{a}|} \right] dv_{\vec{x}} = 0.$$

Отсюда получаем следующее выражение для H^S из (1.13):

$$\vec{H}^S(\vec{a}) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega_S} \left[\nabla_{\vec{a}} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{a}|} \times \vec{J}(\vec{x}) \right] dv_{\vec{x}} - \sum_{i=1}^M \frac{1}{4\pi} \text{Rot}_{\vec{a}} \oint_{DG_i} \left[d\vec{S}_{\vec{x}} \times \nabla_{\vec{x}} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{a}|} \right] f(\vec{x}). \quad (1.19)$$

Из (1.16) следует, что функция $f(\vec{x})$ определяется с точностью до константы.

Таким образом, мы получили самосогласованную систему нелинейных объемных и граничных интегральных уравнений (1.2), (1.12), (1.18), (1.19) для нахождения векторов $\vec{B}, \vec{H}, \vec{M}$ и скалярной функции $f(\vec{x})$, определенной на границе сверхпроводника.

2. Дискретизация возникающих уравнений

Для дискретизации нелинейных объемных и граничных интегральных уравнений предлагается использовать метод коллокации. Следуя [2],[3], разобьем область Ω , заполненную ферромагнетиком, на подмножества $\{\Omega_l\}$:

$$\Omega = \bigcup_{l=1}^N \Omega_l.$$

Мера пересечения Ω_l с Ω_m равна нулю при $l \neq m$. В каждом Ω_l в качестве точки наблюдения \vec{a}_l выберем центр масс Ω_l :

$$\vec{a}_l = \frac{\int_{\Omega_l} \vec{x} dv_{\vec{x}}}{\int_{\Omega_l} dv_{\vec{x}}}.$$

Приближим намагниченность $\vec{M}(\vec{x})$ в каждом элементе Ω_l постоянным вектором \vec{M}_l . Для дискретизации интегралов по поверхности сверхпроводника мы должны разбить $\{DG_i\}$ на элементы. Учитывая, что поверхность сверхпроводника образуется вращением некоторой двумерной области вокруг оси (обозначим ее Ox), приближим каждую из областей $\{G_i\}$ многогранной областью $\hat{G}_i = \bigcup_{k=1}^L G_i^k$. Пусть угол $\phi_0 = \frac{2\pi}{L}$. Определим матрицу поворота U на угол ϕ_0 вокруг оси Ox :

$$[U] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi_0 & -\sin \phi_0 \\ 0 & \sin \phi_0 & \cos \phi_0 \end{pmatrix}.$$

Тогда область G_i^{k+1} получается из G_i^k поворотом вокруг оси Ox на угол ϕ_0 : $G_i^{k+1} = [U]G_i^k$ ($k = \overline{1, L-1}$). Для G_i^1 имеем из $G_i^1 = [U]G_i^L$.

Разобьем границу каждой из областей G_i^1 на элементы. Пусть $\{S_j^1, j = \overline{1, J}\}$ есть суммарное множество элементов. Обозначим $\{\vec{n}_j^1\}$ внешние нормали к $\{S_j^1\}$. Пусть $\{\vec{b}_j^1\}$ есть центры масс $\{S_j^1\}$. Аналогично разобьем границу областей G_i^k ($k = \overline{2, L}$), причем $\vec{n}_j^k = [U]\vec{n}_j^{k-1}$ и $\vec{b}_j^k = [U]\vec{b}_j^{k-1}$. Пусть $\{f_j^k\}$ есть приближения для $f(\vec{x})$ на $\{S_j^k\}$. Тогда дискретизованная система уравнения (1.12) имеет следующий вид:

$$\vec{H}_l = \vec{H}_1^S(\vec{a}_l) + \vec{H}_2^S(\vec{a}_l) + \sum_{j=1}^N \frac{\nabla \vec{a}}{4\pi} \left(\int_{\Omega_j} \left(\vec{M}_j, \nabla_a \frac{1}{|\vec{x} - \vec{a}|} \right) dv_{\vec{x}} \right) \Big|_{\vec{a}=\vec{a}_l}, \quad (2.1)$$

$$\vec{H}_1^S(\vec{a}_l) = \text{Rot}_{\vec{a}} \left(\frac{1}{4\pi} \int_{\Omega_S} \frac{\vec{J}(\vec{x})}{|\vec{x} - \vec{a}|} dv_{\vec{x}} \right) \Big|_{\vec{a}=\vec{a}_l}, \quad (2.2)$$

$$\vec{H}_2^S(\vec{a}_l) = -\text{Rot}_{\vec{a}} \left(\sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^L \frac{1}{4\pi} \oint_{S_j^k} \left[\vec{n}_j^k \times \nabla_{\vec{x}} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{a}|} \right] f_j^k ds_{\vec{x}} \right) \Big|_{\vec{a}=\vec{a}_l}, \quad (2.3)$$

$l = \overline{1, N}.$

Векторы \vec{H}_l и \vec{M}_l удовлетворяют нелинейным соотношениям (1.2). Уравнение (1.18) аппроксимируется следующими уравнениями:

$$(\vec{n}_{j_1}^{k_1}, \vec{B}_{j_1}^{k_1}) = 0, \quad (2.4)$$

$$\vec{B}_{j_1}^{k_1} = \vec{H}_1^S(\vec{b}_{j_1}^{k_1}) + \vec{H}_2^S(\vec{b}_{j_1}^{k_1}) + \sum_{j=1}^N \frac{\nabla \vec{a}}{4\pi} \left(\int_{\Omega_j} \left(\vec{M}_j, \nabla_a \frac{1}{|\vec{x} - \vec{a}|} \right) dv_{\vec{x}} \right) \Big|_{\vec{a}=\vec{b}_{j_1}^{k_1}}, \quad (2.5)$$

$$\vec{H}_1^S(\vec{b}_{j_1}^{k_1}) = \text{Rot}_{\vec{a}} \left(\frac{1}{4\pi} \int_{\Omega_S} \frac{\vec{J}(\vec{x})}{|\vec{x} - \vec{a}|} dv_{\vec{x}} \right) \Big|_{\vec{a}=\vec{b}_{j_1}^{k_1}}. \quad (2.6)$$

$$\vec{H}_2^S(\vec{b}_{j_1}^{k_1}) = -\sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^L \frac{1}{4\pi} \text{Rot}_{\vec{a}} \left(\oint_{S_j^k} \left[\vec{n}_j^k \times \nabla_{\vec{x}} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{a}|} \right] f_j^k ds_{\vec{x}} \right) \Big|_{\vec{a}=\vec{b}_{j_1}^{k_1}}. \quad (2.7)$$

$$j_1 = \overline{1, J}, \quad k_1 = \overline{1, L}.$$

Интегрируя по граничному элементу S_j^k , имеем:

$$\frac{1}{4\pi} \text{Rot}_{\vec{a}} \left(\oint_{S_j^k} \left[\vec{n}_j^k \times \nabla_{\vec{x}} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{a}|} \right] f_j^k ds_{\vec{x}} \right) \Big|_{\vec{a}=\vec{b}_{j_1}^{k_1}} = \frac{1}{4\pi} \text{Rot}_{\vec{a}} \left(\oint_{DS_j^k} \frac{f_j^k d\vec{x}}{|\vec{x} - \vec{a}|} \right) \Big|_{\vec{a}=\vec{b}_{j_1}^{k_1}}. \quad (2.8)$$

Отсюда мы получаем, что из каждого элемента S_j^k на его границу индуцируется постоянный ток с плотностью f_j^k .

3. Метод решения дискретизованных уравнений

Введем следующие обозначения. Пусть

$$\hat{B} = (\vec{B}_1, \vec{B}_2, \dots, \vec{B}_N)^T,$$

$$\hat{M}(\hat{B}) = (\vec{M}(\vec{B}_1), \vec{M}(\vec{B}_2), \dots, \vec{M}(\vec{B}_N))^T,$$

$$\hat{H}_1^S = (\vec{H}_1^S(\vec{a}_1), \vec{H}_1^S(\vec{a}_2), \dots, \vec{H}_1^S(\vec{a}_N))^T,$$

$$\hat{H}_2^S = (\vec{H}_2^S(\vec{a}_1), \vec{H}_2^S(\vec{a}_2), \dots, \vec{H}_2^S(\vec{a}_N))^T.$$

Определим матрицу $[A]$ следующим образом:

$$[A] = \begin{pmatrix} [A_{11}] & \dots & [A_{1N}] \\ \dots & \dots & \dots \\ [A_{N1}] & \dots & [A_{NN}] \end{pmatrix},$$

где $[A_{ij}]$ - матрица размерности $[3 \times 3]$, такая, что для любого постоянного вектора \vec{M} справедливо соотношение

$$[A_{ij}]\vec{M} = \frac{\nabla_a}{4\pi} \left[\int_{\Omega_j} \left(\vec{M}, \nabla_a \frac{1}{|\vec{x} - \vec{a}|} \right) dv_{\vec{x}} \right] \Big|_{\vec{a}=\vec{a}_i}.$$

Учитывая (1.2), систему (2.1) можно записать в виде

$$\hat{B} = \mu_0(\hat{H}_1^S + \hat{H}_2^S) + ([A] + [E]) \hat{M}(\hat{B}), \quad (3.1)$$

где $[E]$ – единичная матрица размерности $[3N \times 3N]$. Пусть $\{\vec{f}_i\}$ и \hat{F} есть следующие векторы:

$$\vec{f}_i = (f_1^i, f_2^i, \dots, f_j^i)^T, \quad i = \overline{1, L},$$

$$\hat{F} = (\vec{f}_1, \vec{f}_2, \dots, \vec{f}_L)^T$$

Имеем

$$\hat{H}_2^S = [D]\hat{F}, \quad (3.2)$$

где матрица $[D]$ есть прямоугольная матрица размерности $[3N \times LJ]$ вида

$$[D] = \begin{pmatrix} [D_{1,1}^1] & \dots & [D_{1,L}^1] \\ \dots & \dots & \dots \\ [D_{N,1}^1] & \dots & [D_{N,L}^1] \end{pmatrix}.$$

Каждая из матриц $[D_{i,j}^1]$ удовлетворяет условию

$$[D_{i,k}^1]\vec{f}_k = -Rot_{\vec{a}} \left(\sum_{j=1}^J \frac{1}{4\pi} \oint_{S_j^k} \left[\vec{n}_j^k \times \nabla_{\vec{x}} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{a}|} \right] f_j^k ds_{\vec{x}} \right) \Big|_{\vec{a}=\vec{a}_i}. \quad (3.3)$$

Из (3.1)-(3.3) получаем

$$\hat{B} = \mu_0 \hat{H}_1^S + \mu_0 [D]\hat{F} + ([A] + [E]) \hat{M}(\hat{B}), \quad (3.4)$$

Аналогично, уравнения (2.4)-(2.7) можно записать в виде

$$[C]\hat{F} + [R]\hat{M}(\hat{B}) + \hat{H}_3^S = \vec{0}, \quad (3.5)$$

где матрица $[C]$ есть квадратная матрица размерности $[LJ \times LJ]$:

$$[C] = \begin{pmatrix} [C_{1,1}^1] & \dots & [C_{1,L}^1] \\ \dots & \dots & \dots \\ [C_{L,1}^1] & \dots & [C_{L,L}^1] \end{pmatrix}. \quad (3.6)$$

Каждая из матриц $[C_{i,j}^1]$ есть матрица размерности $[J \times J]$:

$$[C_{i,j}^1] = \begin{pmatrix} c_{1,1}^{i,j} & \dots & c_{1,J}^{i,j} \\ \dots & \dots & \dots \\ c_{J,1}^{i,j} & \dots & c_{J,J}^{i,j} \end{pmatrix}, \quad (3.7)$$

где $c_{i_1, j_1}^{i,j}$ равно

$$c_{i_1, j_1}^{i,j} = \left(\vec{n}_{i_1}^i, Rot_{\vec{a}} \oint_{S_{j_1}^j} \left[\vec{n}_{j_1}^j \times \nabla_{\vec{x}} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{a}|} \right] ds_{\vec{x}} \right) \Big|_{\vec{a}=\vec{a}_{i_1}}. \quad (3.8)$$

Матрица $[R]$ в (3.5) есть матрица размерности $[LJ \times 3N]$. Ее коэффициенты $\{r_{i,j}\}$ соответствуют различным интегралам I :

$$I = \left(\vec{n}_{j_1}^{k_1}, \frac{\nabla_{\vec{a}}}{4\pi} \left(\int_{\Omega_i} \left(\vec{M}_i, \nabla_{\vec{a}} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{a}|} \right) dv_{\vec{x}} \right) \right) \Big|_{\vec{a}=\vec{a}_{j_1}^{k_1}}.$$

Вектор \hat{H}_3^S в (3.5) есть вектор размерности LJ , компоненты которого соответствуют различным скалярным произведениям вида

$$\left(\vec{n}_{j_1}^{k_1}, Rot_{\vec{a}} \left(\frac{1}{4\pi} \int_{\Omega_s} \frac{\vec{J}(\vec{x})}{|\vec{x} - \vec{a}|} dv_{\vec{x}} \right) \right) \Big|_{\vec{a}=\vec{a}_{j_1}^{k_1}}.$$

Как отмечалось ранее, функция $f(\vec{x})$ на границе каждой односвязной области G_i определяется с точностью до константы. Данное свойство сохраняется и для дискретизованных уравнений. Это означает, что матрица $[C]$ из (3.5) имеет M собственных векторов $\{\hat{u}_j\}$ с собственным значением, равным нулю. С другой стороны, для каждой G_i имеет место следующее равенство:

$$\oint_{DG_i} \left(d\vec{S}_{\vec{a}}, \left(\frac{1}{4\pi} \int_{\Omega_s} \left[\nabla_{\vec{a}} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{a}|} \times \vec{J}^S(\vec{a}) \right] dv_{\vec{x}} \right) \right) +$$

$$+ \oint_{DG_i} \left(d\vec{S}_{\vec{a}}, \frac{\nabla_{\vec{a}}}{4\pi} \int_{\Omega} \left(\vec{M}(\vec{x}), \nabla_{\vec{a}} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{a}|} \right) dv_{\vec{x}} \right) = 0.$$

Но это свойство непрерывных уравнений, в общем случае, при дискретизации сохраняется только приближенно. Возникает вопрос о разрешимости уравнения (3.5), поскольку матрица $[C]^T$ имеет также M собственных векторов $\{\hat{v}_j\}$ с собственным значением, равным нулю, и векторы $\{\hat{v}_j\}$ могут быть неортогональны $([R]\hat{M}(\hat{B}) + \hat{H}_3^S)$. Чтобы избежать этих трудностей, мы используем следующий прием. Пусть $\{\vec{u}_j, \vec{v}_j, j = \overline{1, M_0}\}$ есть собственные векторы с нулевым собственным значением матриц $[C]$ и $[C]^T$, соответственно. Потребуем выполнения следующих дополнительных условий:

$$(\hat{F}, \hat{u}_j) = 0, \quad (\hat{v}_j, ([R]\hat{M}(\hat{B}) + \hat{H}_3^S)) = 0, \quad j = \overline{1, M_0}. \quad (3.9)$$

Пусть $[P_1], [P_2]$ есть проекторы на подпространства, получаемые линейной комбинацией векторов $\{\vec{u}_j, j = \overline{1, M_0}\}$ и $\{\vec{v}_j, j = \overline{1, M_0}\}$, соответственно. Вместо системы (3.5) мы потребуем выполнения следующих условий:

$$[C]\hat{F} + ([E] - [P_2])([R]\hat{M}(\hat{B}) + \hat{H}_3^S) = \vec{0}, \quad (3.10)$$

$$[P_1]\hat{F} = \vec{0}. \quad (3.11)$$

Для решения системы уравнений (3.4), (3.10), (3.11) применяется следующий итерационный процесс:

$$\hat{B}^{k+1} = \mu_0 \hat{H}_1^S + \mu_0 [D]\hat{F}^k + ([A] + [E]) \hat{M}(\hat{B}^{k+1}), \quad (3.12)$$

$$[C]\hat{F}^{k+1} + ([E] - [P_2])([R]\hat{M}(\hat{B}^{k+1}) + \hat{H}_3^S) = \vec{0}, \quad (3.13)$$

$$[P_1]\hat{F}^{k+1} = \vec{0}. \quad (3.14)$$

$$\hat{F}^0 = \vec{0}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (3.15)$$

Для решения системы нелинейных уравнений (3.12) относительно \hat{B}^{k+1} при фиксированном значении k используется внутренний итерационный процесс из [2]:

$$\hat{B}_{j+1}^{k+1} = \mu_0 \hat{H}_1^S + \mu_0 [D] \hat{F}^k + ([A] + [E]) \hat{M}(\hat{B}_j^{k+1}), \quad j = 0, 1, 2, \dots \quad (3.16)$$

$$\hat{B}_0^{k+1} = \bar{B}^k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad \hat{B}_0^0 = \bar{b}. \quad (3.17)$$

Для реализации итерационного процесса (3.12)-(3.15) нам необходимо знать систему векторов $\{\bar{u}_j\}$ и $\{\bar{v}_j\}$. Если векторы $\{\bar{u}_j\}$ можно выписать аналитически, то нахождение векторов $\{\bar{v}_j\}$, учитывая очень большую размерность матрицы $[C]$, является достаточно сложной проблемой. По этой же причине вызывает трудности решение систем линейных уравнений (3.13) относительно \hat{F}^{k+1} . Преодолеть эти сложности позволяет учет специфики решаемой задачи [3]. Из процедуры построения областей G_i^k вытекает, что матрица $[C]$ из (3.10) имеет блочно-циркулянтную структуру. Действительно, из равенств $\bar{n}_{i1}^i = [U]^i \bar{n}_{i1}^1$, $\bar{b}_{i1}^i = [U]^i \bar{b}_{i1}^1$ и уравнений (2.8), (3.8) имеем:

$$c_{i1,j1}^{i,j} = \left([U]^{(i-j)} \bar{n}_{i1}^1, \oint_{DS_{j1}^1} \left[d\bar{x} \times \frac{\bar{x} - [U]^{(i-j)} \bar{a}}{|\bar{x} - [U]^{(i-j)} \bar{a}|^3} \right] ds_{\bar{x}} \right) \Big|_{\bar{a}=\bar{b}_{i1}^1}$$

Отсюда получаем, что матрицы $[C_{i,j}^1]$ из (3.6) зависят только от разности $(i-j)$. Таким образом, как для решения систем линейных уравнений (3.13), так и для нахождения системы векторов $\{\bar{v}_j\}$ мы можем использовать быстрые алгоритмы, разработанные для блочно-циркулянтных матриц [4].

4. Численные результаты

На основе подхода, изложенного в предыдущих разделах, был создан комплекс программ расчета трехмерных магнитных систем, содержащих сверхпроводящие экраны. Данный комплекс использовался для моделирования магнитной системы, состоящей из дипольного магнита и экрана. Общий вид магнита с экраном дан на рис.1. Ядро магнита при моделировании разбивалось на 2352 элемента ($N=2352$). Сверхпроводящий экран состоял из четырех слоев фольги ($M=4$). Граница каждого слоя разбивалась на 147×64 элемента ($J=588, L=64$), что соответствует матрице $[C]$ размерности $[37662 \times 37662]$.

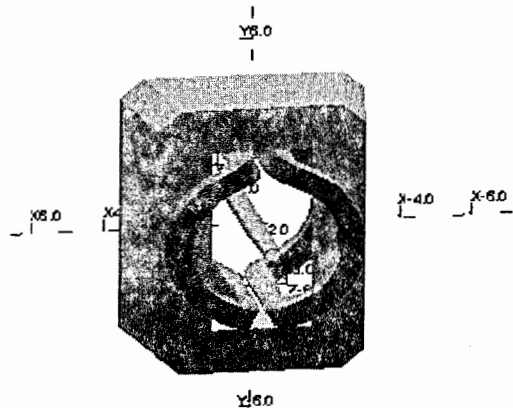


Рис. 1

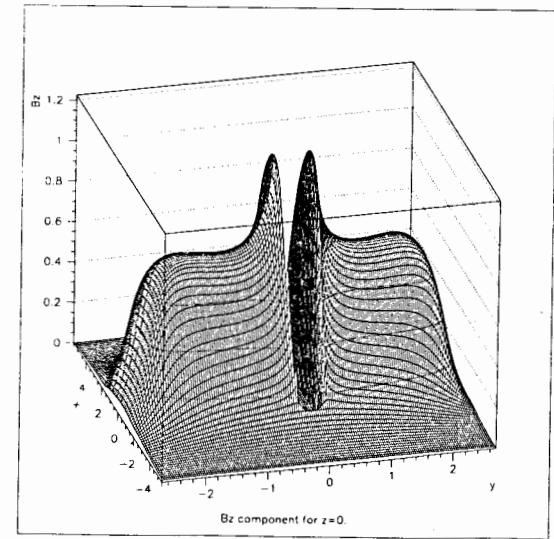


Рис. 2

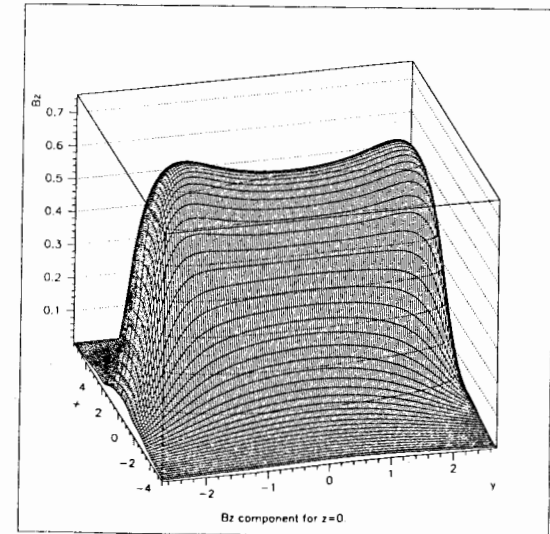


Рис. 3

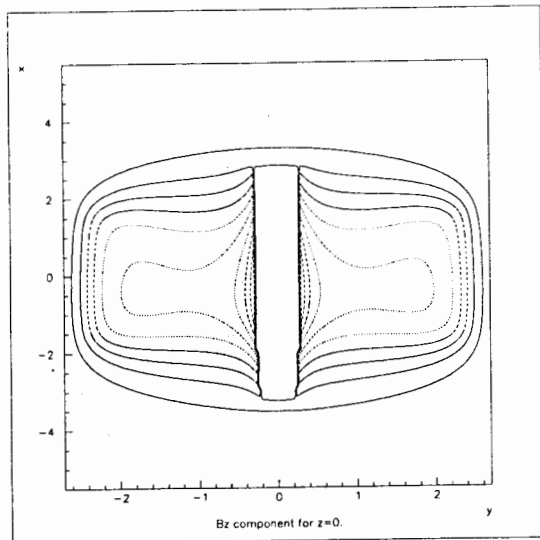


Рис. 4

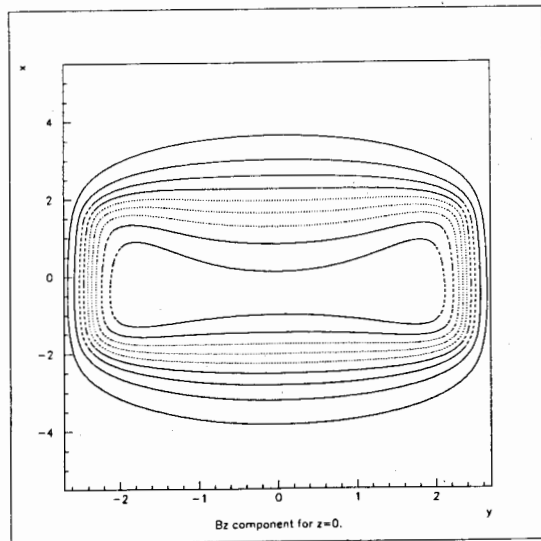


Рис. 5

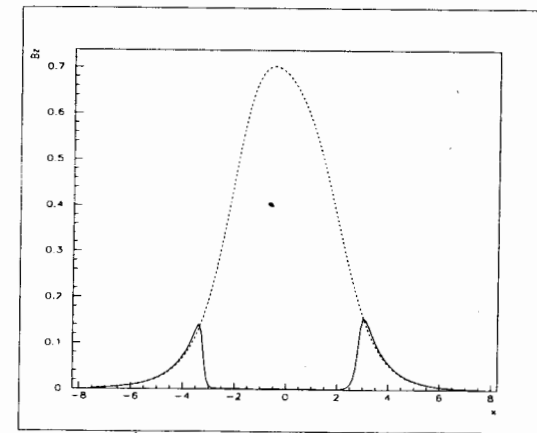


Рис. 6

Расчеты проводились на PC - PENTIUM (100Мгц) с оперативной памятью 32Мб. Для рассматриваемой конфигурации магнитной системы оказалось достаточно трех шагов итерационного процесса (3.12)-(3.15). Для решения нелинейной задачи (3.12) на первом шаге внешнего итерационного процесса потребовалось 132 внутренние итерации (3.16),(3.17), на втором и третьем 22 и 2 соответственно. Относительная ошибка ϵ

$$\epsilon = \frac{|\hat{B}^{k+1} - \mu_0 \hat{H}_y^s - \mu_0 [D] \hat{F}^k - ([A] + [E]) \hat{M}(\hat{B}^{k+1})|}{|\hat{B}^{k+1}|}$$

при этом составляла 0.001. Суммарное счетное время составило около 60 часов.

На рис.2-3 даны распределения основной компоненты поля в медианной плоскости магнита с экраном (рис.2) и без экрана (рис.3). На рис. 4,5 приведены соответствующие распределения линий уровня основной компоненты поля с экраном (рис.4) и без экрана (рис.5). На рис.6 дано распределение основной компоненты поля вдоль оси магнита. Сплошная и пунктирная линии соответствуют расчетам магнитной системы без экрана и с экраном.

В заключение автор выражает благодарность А.С. Водопьянову, Е.П.Жидкову и И.В.Пузынину за поддержку данных исследований; Г.И.Косенко и А.М.Червякову за стимулирующие дискуссии, касающиеся корректности математического описания изучаемых физических процессов; Ю.А.Шишову и Г.С.Шабратовой за полезные обсуждения полученных результатов.

Литература

1. Айрян Э.А., Жидков Е.П., Федоров А.В. и др. Численные алгоритмы расчета магнитных систем в ускорителях заряженных частиц. // ЭЧАЯ. - 1990. - N21, в.1., с.231-307.
2. Акишин П.Г., Жидков Е.П., Кравцов В.Д. Об одном параллельном алгоритме решения трехмерных интегральных уравнений магнитостатики. Математическое моделирование. т.1, N7,1989, с.100-107.

3. Акишин П.Г. Об одном методе расчета магнитных полей в системах с осесимметричной конфигурацией ферромагнетика. ЖВМ и МФ, 1989, т.29, с.1168-1174.
4. Воеводин В.В., Тыртышников Е.Е., Вычислительные процессы с теплицевыми матрицами. М.: Наука, 1987.

Рукопись поступила в издательский отдел
2 декабря 1999 года.

Акишин П.Г. P5-99-312
Применение метода объемных и граничных интегральных уравнений для моделирования магнитных систем, содержащих сверхпроводящие экраны

Рассматривается проблема моделирования магнитных систем, содержащих сверхпроводящие экраны. Сформулированы нелинейные объемные и граничные интегральные уравнения, позволяющие описать распределение намагниченности в нелинейной среде и поверхностные токи на границе сверхпроводника. Предложены методы дискретизации непрерывных уравнений, а также итерационные методы решения возникающих нелинейных систем. Приводятся результаты моделирования магнитной системы эксперимента ALICE (CERN, Женева).

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна, 1999

Akishin P.G. P5-99-312
The Application of Volume and Boundary Integral Equations Method for Modeling the Magnetic Systems Containing Superconducting Screens

The problem of modeling the magnetic systems containing superconducting screens is considered. The nonlinear volume and boundary integral equations are proposed for description of distribution of magnetization and surface currents. The digitization of continuous equations and iterative methods for solving nonlinear problem are suggested. The numerical results of modeling CERN experiment ALICE magnetic system are given.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna, 1999