ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р5-99-254

Й.Джурина[1], Я.Буша[2], Э.А.Айрян[3]

КРИТЕРИИ ОСЦИЛЛЯЦИОННОСТИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПА СО СМЕШАННЫМИ АРГУМЕНТАМИ

Направлено в журнал «Дифференциальные уравнения»

---

[1]Кафедра математического анализа, естественный факультет, университет П.Й.Шафарика, 041 54, Кошице, Словакия, e-mail: dzurina@kosice.upjs.sk
[2]Кафедра математики, факультет электротехники и информатики, Технический университет, 040 01, Кошице, Словакия, e-mail: busaj@tuke.sk
[3]E-mail: ayrjan@cv.jinr.ru
Работа поддержана СГА, грант 1/4378/97 и РФФИ, грант 98-01-00190

1999

Джурина Й., Буша Я., Айрян Э.А. Р5-99-254
Критерии осцилляционности для дифференциальных уравнений второго порядка нейтрального типа со смешанными аргументами

В работе указано, что дифференциальное уравнение нейтрального типа

$$\left(x(t) + p_1 x(t - \tau_1) + p_2 x(t + \tau_2)\right)'' = q_1(t)\, x\left(\sigma_1(t)\right) + q_2(t)\, x\left(\sigma_2(t)\right)$$

с запаздывающим и опережающим аргументами будет осцилляционным при определенных условиях на коэффициенты и аргументы. Основным средством является подходящая теорема сравнения.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна, 1999

Перевод авторов

Džurina J., Buša J., Ayrjan E.A. P5-99-254
Oscillation Criteria for Second Order Neutral Differential Equations with Mixed Arguments

It has been shown that neutral differential equation

$$\left(x(t) + p_1 x(t - \tau_1) + p_2 x(t + \tau_2)\right)'' = q_1(t)\, x\left(\sigma_1(t)\right) + q_2(t)\, x\left(\sigma_2(t)\right)$$

with delayed and advanced arguments oscillates under certain conditions on coefficients and arguments. The main tool is suitable comparison theorem.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna, 1999

Введение

Целью настоящей работы является установление некоторых новых критериев осцилляционности для дифференциальных уравнений второго порядка нейтрального типа вида

$$\Big(x(t) + p_1 x(t-\tau_1) + p_2 x(t+\tau_2)\Big)'' = q_1(t) x\big(\sigma_1(t)\big) + q_2(t) x\big(\sigma_2(t)\big), \qquad (1)$$

причем предполагаются выполненными следующие условия:

(а) p_i, τ_i, $i = 1, 2$ положительные постоянные;
(б) $q_i \in C([t_0, \infty), R^+)$, $i = 1, 2$;
(в) $\sigma_i \in C([t_0, \infty), R^+)$ такие, что $\sigma_1(t) < t$, $\sigma_2(t) > t$ и $\lim\limits_{t\to\infty} \sigma_1(t) = \infty$.

Под решением уравнения (1) будем подразумевать непрерывную вещественную функцию $x(t)$, определенную на $[T_x, \infty)$ для некоторого $T_x > t_0$, такую, что выражение $x(t) + p_1 x(t-\tau_1) + p_2 x(t+\tau_2)$ является дважды непрерывно дифференцируемым, и уравнение (1) справедливо при $t \geq T_x$.

Будем говорить, что нетривиальное решение уравнения (1) является колеблющимся, если для любого $t^* > 0$ на (t^*, ∞) существует его нуль, в противном случае будем называть его неколеблющимся. Уравнение (1) будем называть осцилляционным, если все его решения колеблющиеся.

За последние годы некоторые авторы (смотри, например, [1], [4], [6]) получили достаточные условия для того, чтобы все ограниченные (неограниченные) решения уравнений нейтрального типа вида

$$\Big(x(t) + px(t \pm \tau)\Big)'' = q(t) x\big(\sigma(t)\big) \qquad (2)$$

были колеблющиеся. Мы рассматриваем более общее дифференциальное уравнение нейтрального типа (1) и приводим критерии осцилляционности для (1), применимые также для уравнения (2).

Целью настоящей работы является обоснование некоторых, легко проверяемых условий, достаточных для осцилляционности (1) и обобщающих некоторые известные критерии.

Для всех функциональных неравенств, которые используются в дальнейшем, предполагается их выполнение для всех достаточно больших значений t.

Основные результаты

В следующей теореме установим достаточные условия, при которых все решения уравнения (1) являются колеблющимися.

Теорема 1. *Предположим, что $\sigma_2(t) > t + \tau_2$ и $\sigma_1(t) < t - \tau_1$. Пусть*

$$\limsup_{t\to\infty} \int_t^{\sigma_2(t)-\tau_2} \Big(\sigma_2(t) - \tau_2 - s\Big) q_2^*(s) ds > 1 + p_1 + p_2 \tag{3}$$

и

$$\limsup_{t\to\infty} \int_{\sigma_1(t)+\tau_1}^{t} \Big(s - \sigma_1(t) - \tau_1\Big) q_1^*(s) ds > 1 + p_1 + p_2, \tag{4}$$

где $q_i^*(t) = \min\{q_i(t-\tau_i), q_i(t), q_i(t+\tau_i)\}$, $i = 1,2$. Тогда уравнение (1) — осцилляционное.

Доказательство. Допуская противное, предположим, что уравнение (1) имеет положительное решение $x(t)$. Это значит, что существует $t_0 \geq 0$ такое, что $x(t) > 0$ при $t \geq t_0$. Положим

$$z(t) = x(t) + p_1 x(t - \tau_1) + p_2 x(t + \tau_2) \tag{5}$$

и

$$y(t) = z(t) + p_1 z(t - \tau_1) + p_2 z(t + \tau_2). \tag{6}$$

Тогда $z(t) > 0$, $y(t) > 0$ и также

$$z''(t) = q_1(t)x(\sigma_1(t)) + q_2(t)x(\sigma_2(t)) > 0, \quad t \geq t_1 > t_0.$$

Поэтому $z'(t)$ сохраняет знак на $[t_2, \infty)$. Тогда

$$\begin{aligned} y''(t) &= q_1(t)x\big(\sigma_1(t)\big) + q_2(t)x\big(\sigma_2(t)\big) + \\ &\quad + p_1 q_1(t-\tau_1)x\big(\sigma_1(t)-\tau_1\big) + p_2 q_2(t+\tau_1)x\big(\sigma_2(t)-\tau_1\big) + \\ &\quad + p_1 q_1(t+\tau_2)x\big(\sigma_1(t)+\tau_2\big) p_2 q_2(t+\tau_2)x\big(\sigma_2(t)+\tau_2\big) \geq \\ &\geq q_1^*(t)z\big(\sigma_1(t)\big) + q_2^*(t)z\big(\sigma_2(t)\big) > 0. \end{aligned} \tag{7}$$

Далее рассмотрим два следующих случая.
Случай 1. Пусть $z'(t) > 0$ при $t \geq t_2$. Тогда $y'(t) > 0$ и на основании (7)

$$y''(t+\tau_2) \geq q_2^*(t+\tau_2) z\big(\sigma_2(t) + \tau_2\big).$$

Используя монотонность z, получаем

$$\begin{aligned} y\big(\sigma_2(t)\big) &= z\big(\sigma_2(t)\big) + p_1 z\big(\sigma_2(t) - \tau_1\big) + p_2 z\big(\sigma_2(t) + \tau_2\big) \leq \\ &\leq z\big(\sigma_2(t) + \tau_2\big)(1 + p_1 + p_2). \end{aligned}$$

Комбинируя последние два неравенства, приходим к

$$y''(t+\tau_2) \geq \frac{q_2^*(t+\tau_2)}{1+p_1+p_2} y\big(\sigma_2(t)\big),$$

т. е. $y(t)$ является положительным возрастающим решением дифференциального неравенства

$$y''(t) \geq \frac{q_2^*(t)}{1+p_1+p_2} y\big(\sigma_2(t) - \tau_2\big). \tag{8}$$

С другой стороны, согласно результату Чантурии и Коплатадзе [2] (смотри также Джурина [3]), условие (3) противоречит существованию положительного возрастающего решения неравенства (8).
Случай 2. Пусть $z'(t) < 0$, тогда $y'(t) < 0$ и (7) влечет за собой

$$y''(t-\tau_1) \geq q_1^*(t-\tau_1) x\big(\sigma_1(t) - \tau_1\big).$$

Тогда

$$\begin{aligned} y\big(\sigma_1(t)\big) &= z\big(\sigma_1(t)\big) + p_1 z\big(\sigma_1(t) - \tau_1\big) + p_2 z\big(\sigma_1(t) + \tau_2\big) \leq \\ &\leq z\big(\sigma_1(t) - \tau_1\big)(1 + p_1 + p_2), \end{aligned}$$

причем мы использовали факт, что $z(t)$ убывает. Следовательно,

$$y''(t-\tau_1) \geq \frac{q_1^*(t-\tau_1)}{1+p_1+p_2} y\big(\sigma_1(t)\big)$$

и $y(t)$ положительное убывающее решение дифференциального неравенства

$$y''(t) \geq \frac{q_1^*(t)}{1+p_1+p_2} y\big(\sigma_1(t) + \tau_1\big). \tag{9}$$

С другой стороны, как показано Чантурией и Коплатадзе [2] (или смотри [3]), условие (4) обеспечивает то, что (9) не имеет положительных убывающих решений. Это противоречие. Теорема доказана.

Следующий критерий осцилляционности дополняет предыдущий результат.

Теорема 2. *Пусть $\sigma_2(t) > t + \tau_2$ и $\sigma_1(t) < t - \tau_1$. Предположим, что при $i = 1,2$ существуют такие функции:*

$$a_i(t) \in C^1(t_0, \infty), \qquad a_i(t) > 0, \qquad (-1)^i a_i'(t) \leq 0; \tag{10_i}$$

$$\beta_i(t) \in C^1(t_0, \infty), \qquad (-1)^i \beta_i(t) > (-1)^i t, \qquad \beta_i'(t) > 0; \tag{11_i}$$

что

$$(-1)^i\Big(\sigma_i(t) - (-1)^i\tau_i\Big) \ge (-1)^i\beta_i\big(\beta_i(t)\big); \tag{12_i}$$

$$q_i^*(t) \ge (1 + p_1 + p_2)a_i(t)a_i\big(\beta_i(t)\big)\beta_i'. \tag{13_i}$$

Если дифференциальное неравенство первого порядка

$$v'(t) + (-1)^{i+1}a_i\big(\beta_i(t)\big)\beta_i'(t)v\big(\beta_i(t)\big) \ge 0 \tag{14_i}$$

не имеет при $i = 1$ отрицательного решения (при достаточно больших t) и при $i = 2$ не имеет положительного решения, то уравнение (1) — осцилляционное.

Доказательство. Предположим, что $x(t) > 0$ решение (1). Пусть $z(t)$ и $y(t)$ определены согласно (5) и (6) соответственно. Тогда, поступая как и при доказательстве теоремы 1, приходим к (7).

Случай 1. Пусть $z'(t) > 0$. Тогда так же, как и в случае 1 теоремы 1, находим, что $y(t)$ положительное возрастающее решение неравенства (8). Возьмем

$$b_2(t) = y'(t) + a_2(t)y\big(\beta_2(t)\big).$$

Тогда $b_2(t) > 0$ и, используя (10_2)–(13_2), получаем

$$\begin{aligned} b_2'(t) - \frac{a_2'(t)}{a_2(t)}b_2(t) - a_2(t)\beta_2'(t)b_2\big(\beta_2(t)\big) = \\ = y''(t) - \frac{a_2'(t)}{a_2(t)}y'(t) - a_2(t)a_2\big(\beta_2(t)\big)\beta_2'(t)y\Big(\beta_2\big(\beta_2(t)\big)\Big) \ge \\ \ge y''(t) - a_2(t)a_2\big(\beta_2(t)\big)\beta_2'(t)y\Big(\beta_2\big(\beta_2(t)\big)\Big) \ge \\ \ge y''(t) - \frac{q_2^*(t)}{1 + p_1 + p_2}y\big(\sigma_2(t) - \tau_2\big), \end{aligned}$$

откуда вместе с (8) вытекает

$$b_2'(t) - \frac{a_2'(t)}{a_2(t)}b_2(t) - a_2(t)\beta_2'(t)b_2\big(\beta_2(t)\big) \ge 0.$$

Положив $b_2(t) = a_2(t)v(t)$, заключаем, что $v(t)$ положительное решение (14_2). Это противоречие.

Случай 2. Допустим, что $z'(t) < 0$. Тогда $y'(t) < 0$. Следуя всем шагам случая 2 теоремы 1, находим, что $y(t)$ положительное убывающее решение неравенства (9). Возьмем

$$b_1(t) = y'(t) - a_1(t)y\big(\beta_1(t)\big).$$

Тогда $b_1(t) < 0$ и (9) вместе с (10_1)–(13_1) влекут за собой

$$\begin{aligned} b_1'(t) - \frac{a_1'(t)}{a_1(t)}b_1(t) + a_1(t)\beta_1'(t)b_1\big(\beta_1(t)\big) = \\ = y''(t) - \frac{a_1'(t)}{a_1(t)}y'(t) - a_1(t)a_1\big(\beta_1(t)\big)\beta_1'(t)y\Big(\beta_1\big(\beta_1(t)\big)\Big) \ge \\ \ge y''(t) - a_1(t)a_1\big(\beta_1(t)\big)\beta_1'(t)y\Big(\beta_1\big(\beta_1(t)\big)\Big) \ge \\ \ge y''(t) - \frac{q_1^*(t)}{1 + p_1 + p_2}y\big(\sigma_2(t) + \beta_1\big) \ge 0. \end{aligned}$$

Положив

$$b_1(t) = a_1(t)v(t),$$

видим, что $v(t)$ отрицательное решение (14_1). Это противоречие завершает доказательство.

Следствие 1. *Пусть $\sigma_2(t) > t + \tau_2$ и $\sigma_1(t) < t - \tau_1$. Предположим, что (10_i)–(13_i) имеют место при $i = 1, 2$. Если выполнено*

$$\liminf_{t\to\infty} \int\limits_{\beta_1(t)}^{t} a_1\big(\beta_1(s)\big)\beta_1'(s)ds > \frac{1}{\mathrm{e}} \tag{15}$$

и

$$\lim_{t\to\infty} \int\limits_{t}^{\beta_2(t)} a_2\big(\beta_2(s)\big)\beta_2'(s)ds > \frac{1}{\mathrm{e}}, \tag{16}$$

то все решения уравнения (1) являются колеблющимися.

Доказательство. Известно (смотри, например, [8]), что условие (15) является достаточным для того, чтобы (14_1) не имело отрицательного (при достаточно больших t) решения. С другой стороны, условие (16) достаточно для того, чтобы (14_2) не имело положительного решения.

Следствия, замечания и расширения

Мы получили различные критерии осцилляционности уравнения (1). Далее приведем некоторые следствия предыдущих результатов.

Следствие 2. *Пусть $\sigma_1 > \tau_1 > 0$, $\sigma_2 > \tau_2 > 0$ и*

$$q_i^*(t) \ge \frac{(2+\varepsilon)^2}{(\sigma_i - \tau_i)^2 e^2}(1 + p_1 + p_2) \quad \textit{для некоторого } \varepsilon > 0, \quad i = 1, 2.$$

Тогда все решения уравнения

$$\Big(x(t)+p_1x(t-\tau_1)+p_2x(t-\tau_2)\Big)''-q_1(t)x(t-\sigma_1)-q_2(t)x(t+\sigma_2)=0$$

являются колеблющимися.

Доказательство. В следствии 1 достаточно положить $a_i(t)=(2+\varepsilon)/(\sigma_i-\tau_i)^2$ и $\beta_i(t)=t+(-1)^i(\sigma_i-\tau_i)/2$, $i=1,2$.

Следствие 3. *Пусть* $\sigma_1>\tau_1>0$, $\sigma_2>\tau_2>0$ *и*

$$q_i>\frac{4}{(\sigma_i-\tau_i)^2e^2}(1+p_1+p_2),\qquad i=1,2.$$

Тогда уравнение

$$\Big(x(t)+p_1x(t-\tau_1)+p_2x(t+\tau_2)\Big)''-q_1x(t-\sigma_1)-q_2x(t+\sigma_2)=0\qquad(17)$$

осцилляционное.

Доказательство. Легко видеть, что $q_i^*(t)=q_i$. Пусть значение $\varepsilon>0$ такое, что $q_i>\big[(2+\varepsilon)/\big(e(\sigma_i-\tau_i)\big)\big]^2(1+p_1+p_2)$. Для доказательства следствия достаточно положить $a_i(t)=(2+\varepsilon)/\big(e(\sigma_i-\tau_i)\big)$ и $\beta_i(t)=t+$ $+(-1)^i(\sigma_i-\tau_i)/2$, $i=1,2$ в следствии 1.

Замечание. Для уравнения (17) мы установили тот же результат, что и Грейс в [5]. Наш подход, отличающийся от техники Грейса, может быть использован также в случае уравнения (1), которое является уравнением с непостоянными коэффициентами.

Совмещая результаты теоремы 1 и следствия 1, получаем следующие три критерия осцилляционности уравнения (1).

Теорема 4. *Предположим, что* $\sigma_1(t)<t-\tau_1$, $\sigma_2(t)>t+\tau_2$, *справедливо условие* (4) *и имеют место условия* (10_2)–(13_2). *Если выполнено условие* (16), *то уравнение* (1) — *осцилляционное.*

Теорема 5. *Предположим, что* $\sigma_1(t)<t-\tau_1$, $\sigma_2(t)>t+\tau_2$, *справедливо условие* (3) *и имеют место условия* (10_1)–(13_1). *Если выполнено условие* (15), *то уравнение* (1) — *осцилляционное.*

Следствие 4. *Пусть* $\sigma_1(t)<t-\tau_1$ *и* $\sigma_2(t)>t+\tau_2$. *Далее предположим, что*

$$q_2^*(t)>\frac{1+p_1+p_2}{t[t-\tau_2/(2\lambda_2)]},\ \lambda_2>e^{1/2},\ q_1^*(t)>\frac{1+p_1+p_2}{t^2}\ \text{и}\ \lambda_1^2-2\ln\lambda_1-2>0.$$

Тогда уравнение

$$\Big(x(t)+p_1x(t+\tau_1)+p_2x(t-\tau_2)\Big)''-q_1(t)x\big(\lambda_1^2t\big)-q_2(t)x\big(\lambda_2^2t\big)=0,\ \lambda_1<1,\ \lambda_2>1$$

осцилляционное.

Доказательство. Достаточно положить $a_2(t)=1/t$, $\beta_2(t)=\lambda_2t-\tau_2/2$ в теореме 4.

В настоящей работы мы получили некоторые новые критерия осцилляционности уравнения (1). Результаты, установленные в работе, основаны на использовании новых условий и подходов осцилляционной теории. Наши результаты применимы также для дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, причем известные критерии обоснованы новым способом.

Если либо условие (3) теоремы 1 нарушается, либо условия (10_2)–(14_2) теоремы 2 не выполняются, то тогда эти теоремы представляют критерии ограниченной осцилляционности (1), когда каждое его ограниченное решение является колеблющимся. С другой стороны, если нарушается условие (4) теоремы 1 или не выполняются условия (10_1)–(14_1) теоремы 2, то эти теоремы обеспечивают неограниченную осцилляционность (1), при которой каждое его неограниченное решение является колеблющимся. Такой же вывод правомерен для остальных теорем и следствий.

Литература

1. D.D. Bainov, D.P. Mishev, *Oscillation Theory for Neutral Differential Equations with Delay*, Adam Hilger, 1991.
2. Т.А. Чантурия, Р.Г. Коплатадзе, *Осцилляционные свойства дифференциальных уравнений с отклоняющимися аргументами*, Тифлис, Унив. Изд., Тифлис, 1977.
3. J. Dzurina, *On the second order functional differential equations with advanced and retarded arguments*, Nonl. Times Digest **1** (1994), 179–187.
4. L.H.Erbe, Q.Kong and B.G.Zhang, *Oscillation Theory for Functional Differential Equations*, Dekker, New York, 1995.
5. S. R. Grace, *Oscillation criteria for n-th order neutral functional differential equations*, J. Math. Anl. Appl. **184**, 44–55.
6. I. Győri and G. Ladas, *Theory of Delay Differential Equations with Applications*, Clarendon Press, Oxford, 1991.
7. J.Hale, *Theory of functional differential equations*, Springer-Verlag, New York, 1977.
8. G.S. Ladde, V.Lakshmikantham and B.G.Zhang, *Oscillation theory of differential equations with deviating arguments*, Dekker, New York, 1987.

Рукопись поступила в издательский отдел
21 сентября 1999 года.