ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

P5-99-15

И.В.Амирханов, Е.П.Жидков, С.В.Коннова

МЕТОД ФАКТОРИЗАЦИИ И ЧАСТНЫЕ РЕШЕНИЯ РЕЛЯТИВИСТСКОГО УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

Направлено в Оргкомитет Первой международной конференции «Modern Trends in Computational Physics», 15-20 июня 1998, Дубна

1999

Амирханов И.В., Жидков Е.П., Коннова С.В. P5-99-15
Метод факторизации и частные решения
релятивистского уравнения Шредингера четвертого порядка

Уравнение Шредингера в релятивистском конфигурационном пространстве для релятивистской волновой функции имеет форму линейного дифференциального уравнения бесконечного порядка. В данной работе описан конструктивный подход к решению краевой задачи, основанный на применении метода факторизации. В рамках этого подхода рассматриваются решения краевой задачи для уравнения четвертого порядка с различными потенциалами при симметричном выборе граничных условий.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант 97-01-01040.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна, 1999

Перевод авторов

Amirkhanov I.V., Zhidkov E.P., Konnova S.V. P5-99-15
The Factorization Method and Particular Solutions
of the Relativized Schroedinger Equation of Fourth Order

The Schroedinger equation in the relativistic configuration space for a relativistic wave function has the form of infinite-order linear differential equation. In this report a constraction approach to the solution of the boundary problem based on application of method of factorization is described. We have considered the 4th order differential equation for different form of the potential and boundary conditions of symmetric type.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR, and supported by the Russian Foundation for Basic Research, Project 97-01-01040.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna, 1999

Введение

Одной из актуальных задач теории элементарных частиц является построение модели для единообразного описания спектра и формфакторов взаимодействия легких и тяжелых мезонов, так называемых кваркониев, рассматриваемых как связные состояния кварка и антикварка. Тяжелые кварконии в некотором приближении успешно описываются нерелятивистской квантовой механикой – решением уравнения Шредингера на собственные значения [1]. При описании легких мезонов возникает необходимость в учитывании релятивистских эффектов.

Релятивистское обобщение потенциальной модели кваркония приводит к решению спектральной задачи для уравнения Бета - Солпитера и различных вариантов квазипотенциальных уравнений [2] -[6].

В данной работе мы рассматриваем релятивистское уравнение квазипотенциального типа для волновой функции двухчастичной системы [3]- [4]. В частности, одномерное уравнение Шредингера для радиальной волновой функции, описывающей относительное движение двух скалярных частиц с импульсом q, моментом l и равными массами m, имеет вид

$$\left[2c\sqrt{q^2+m^2c^2}-H_0-V(r)\right]\Psi_{ql}(r)=0, \tag{1}$$

$$H_0=2mc^2 ch\left(\frac{i\hbar}{mc}\cdot\frac{d}{dr}\right)+\frac{\hbar^2 l\,(l+1)}{mr\left(r+\dfrac{i\hbar}{mc}\right)}\exp\left(\frac{i\hbar}{mc}\cdot\frac{d}{dr}\right),$$

где H_0 – релятивистский гамильтониан, V – квазипотенциал, c – скорость света, Если в уравнении (1) величину c формально устремить к бесконечности, $c\to\infty$, то это уравнение переходит в нерелятивистское уравнение Шредингера.

$$\left[\frac{d^2}{dr^2}-\frac{l\,(l+1)}{r^2}-V(r)+q^2\right]\Psi_{ql}(r)=0. \tag{2}$$

В работе [7] рассматривается вопрос о регулярной сходимости решений релятивистского уравнения Шредингера (1) к решениям уравнения (2) при $\epsilon\to 0$. Если ограничиться случаем S-волны ($l=0$) и положить $\hbar=m=1$, $\epsilon=\frac{1}{c}$ и $\Psi_{q0}=\Psi$, то уравнение (1) можно переписать в более удобном для дальнейших исследований виде:

$$\left[E_\epsilon-H_\epsilon-V(r)\right]\Psi(r)=0, \tag{3}$$

$$E_\epsilon=\frac{2}{\epsilon^2}\left[\sqrt{1+\epsilon^2q^2}-1\right]=\frac{2q^2}{\sqrt{1+\epsilon^2q^2}+1}, \tag{4}$$

$$H_\epsilon = \frac{2}{\epsilon^2}\left[ch\left(i\epsilon\frac{d}{dr}\right) - 1\right]. \tag{5}$$

Удобство этих обозначений связано с важным свойством, а именно: при $\epsilon \to 0$, $E_\epsilon \to q^2$, $H_\epsilon \to \frac{d^2}{dr^2}$. Разлагая оператор $ch\left(i\epsilon\frac{d}{dr}\right)$ в ряд, можно получить следующее дифференциальное уравнение бесконечного порядка:

$$\left[E_\epsilon + \left(\frac{d^2}{dr^2} - \frac{2\epsilon^2}{4!}\frac{d^4}{dr^4} + \frac{2\epsilon^4}{6!}\frac{d^6}{dr^6} + \cdots\right) - V(r)\right]\Psi(r) = 0. \tag{6}$$

Одной из важных особенностей последнего уравнения (6) является наличие малого параметра при старшей производной, что позволяет отнести это уравнение к классу сингулярно-возмущенных дифференциальных уравнений [8]. Кроме этого, корректная постановка краевых задач для уравнения бесконечного порядка является нетривиальной математической задачей. Поэтому мы ограничимся исследованием дифференциального уравнения конечного порядка.

$$H_{2m}\Psi(r) = \left[E_\epsilon + \left(\frac{d^2}{dr^2} - \frac{2\epsilon^2}{4!}\frac{d^4}{dr^4} + \frac{2\epsilon^4}{6!}\frac{d^6}{dr^6} + \cdots \right.\right.$$
$$\left.\left. \cdots + \frac{2(-1)^{\frac{2m-2}{2}}\epsilon^{2m-2}}{m!}\cdot\frac{d^{2m}}{dr^{2m}}\right) - V(r)\right]\Psi(r) = 0 \tag{7}$$

с краевыми условиями на конечном промежутке изменения r

$$0 \le r \le a,$$

$$\Psi(0) = \Phi_0,\ \frac{d^p}{dr^p}\Psi(r)|_{r=0} = \Phi_0^{(p)},\quad p = 1,\ldots,k_1, \tag{8}$$

$$\Psi(a) = \Phi_{a0},\ \frac{d^p}{dr^p}\Psi(r)|_{r=a} = \Phi_{a0}^{(p)},\quad p = 1,\ldots,k_2, \tag{9}$$

$$k_1 + k_2 = 2m - 2.$$

В настоящей работе предлагается следующий подход к решению краевой задачи (7)-(9). С помощью факторизации уравнение (7) может быть представлено в виде

$$\hat{H}_{2m}\Psi(r) = \hat{H}_m \ldots \hat{H}_2\,\hat{H}_1\Psi(r) = 0, \tag{10}$$

где H_i – дифференциальный оператор второго порядка

$$\hat{H}_i = \frac{d^2}{dr^2} + \alpha_i^2 + y_{1i}(r)\frac{d}{dr} + y_{2i}(r), \tag{11}$$

$y_{1i}(r), y_{2i}(r)$ – неизвестные функции, α_i – постоянные. Уравнения для нахождения этих функций получаем из условия (10).

Рассмотрим теперь следующую краевую задачу для уравнения второго порядка:

$$\hat{H}_1\Psi(r) = 0, \tag{12}$$

$$\Psi(0) = \Phi_0;\ \Psi(a) = \Phi_{a0}. \tag{13}$$

Решение этой задачи является также и частным решением исходного уравнения (7), а при специальном выборе краевых условий (8)-(9), неизвестных функций y_{1i}, y_{2i} и постоянной α_1 будет решением исходной краевой задачи (7)-(9). В следующих разделах работы мы убедимся в правильности этого утверждения на примере анализа краевых задач для дифференциального уравнения $4^{ого}$ порядка при $V(r) = V_0$ – постоянной и $V(r)$ – заданной функции.

Краевая задача для уравнения $4^{ого}$порядка. $V = V_0$ - постоянная величина

Так как постоянный потенциал $V = V_0$ приводит к сдвигу собственных значений E_ϵ на величину V_0, то для простоты далее положим $V_0 = 0$ и рассмотрим уравнение (7) в случае $m = 2$ и $V = 0$.

$$\left[E_\epsilon + \frac{d^2}{dr^2} - \mu\frac{d^4}{dr^4}\right]\Psi(r) = 0, \tag{14}$$

где

$$\mu = \frac{2\epsilon^2}{4!}.$$

Общее решение уравнения (14) имеет вид

$$\Psi(r) = c_1\sin(\alpha_1 r) + c_2\cos(\alpha_1 r) + c_3 sh(\alpha_2 r) + c_4 ch(\alpha_2 r), \tag{15}$$

где

$$\begin{aligned} \alpha_1^2 &= \frac{1}{2\mu}\cdot\left[\sqrt{1 + 4\mu E_\epsilon} - 1\right], \\ \alpha_2^2 &= \frac{1}{2\mu}\cdot\left[\sqrt{1 + 4\mu E_\epsilon} + 1\right]. \end{aligned} \tag{16}$$

Заметим, что α_1 при $\mu \to 0$ стремится к q, а α_2 при $\mu \to 0$ стремится к ∞.

Пусть решение уравнения (14) удовлетворяет следующим граничным условиям:

$$\Psi(0) = 0,\quad \frac{d^2}{dr^2}\Psi(r)|_{r=0} = 0,\quad \Psi(a) = 0,\quad \frac{d^2}{dr^2}\Psi(r)|_{r=a} = 0. \tag{17}$$

Подставляя (15) в (17), можно убедиться, что $c_2 = c_3 = c_4 = 0$ и решение краевой задачи ((14), (17)) имеет вид

$$\Psi_n(r) = \sin(\alpha_{1n} r), \tag{18}$$
$$\alpha_{1n} = \left(\frac{n\pi}{a}\right) q_n^2 = \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + \frac{1}{3}\epsilon^2 \left(\frac{n\pi}{a}\right)^4.$$

При $\epsilon \to 0$ решение уравнения (18) переходит в решение нерелятивистского уравнения Шредингера (2) с граничными условиями

$$\Psi(0) = 0, \quad \Psi(a) = 0.$$

С другой стороны, уравнение (14) можно представить в следующем факторизованном виде:

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} - \alpha_2^2\right]\left[\frac{d^2}{dr^2} + \alpha_1^2\right]\Psi(r) = 0. \tag{19}$$

Рассмотрим следующую краевую задачу:

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + \alpha_1^2\right]\Psi(r) = 0, \tag{20}$$
$$\Psi(0) = 0, \quad \Psi(a) = 0. \tag{21}$$

Непосредственной подстановкой можно убедиться, что решение (18) исходной краевой задачи (14),(17) является также решением краевой задачи (20),(21) и наоборот. Следует особо отметить, что такое совпадение решений возможно только при симметричном выборе граничных условий.

В заключение этого раздела приведем одно из точных решений уравнения (3) с граничными условиями

$$\Psi(0) = 0, \quad \frac{d^{2m}}{dr^{2m}}\Psi(r)|_{r=0} = 0, \quad \Psi(a) = 0, \quad \frac{d^{2m}}{dr^{2m}}\Psi(r)|_{r=a} = 0, \quad m = 1, 2, 3\ldots \tag{22}$$

$$\Psi_n(r) = c_1 \sin(\alpha_{1n} r) \tag{23}$$

и с граничными условиями

$$\frac{d^{2m-1}}{dr^{2m-1}}\Psi(r)|_{r=0} = 0, \quad \frac{d^{2m-1}}{dr^{2m-1}}\Psi(r)|_{r=a} = 0, \quad m = 1, 2, 3\ldots$$

$$\Psi_n(r) = c_1 \cos(\alpha_{1n} r),$$

где

$$\alpha_{1n} = \left(\frac{n\pi}{a}\right) \quad q_n^2 = \frac{1}{\epsilon^2} sh^2\left(\epsilon\frac{n\pi}{a}\right).$$

Разлагая функцию $sh^2\left(\epsilon\frac{n\pi}{a}\right)$ в ряд и удерживая члены с точностью до ϵ^2, мы получим результат (18).

Краевая задача для уравнения $4^{ого}$порядка. $V(r) \neq 0$

Рассмотрим уравнение (7) в случае $m = 2$, $V(r) \neq 0$

$$\hat{H}_4\Psi(r) = \left[E_\epsilon + \frac{d^2}{dr^2} - \mu\frac{d^4}{dr^4} - V(r)\right]\Psi(r) = 0. \tag{24}$$

Будем искать решение уравнения (24), удовлетворяющее граничным условиям (17). Дифференциальный оператор $4^{ого}$ порядка $\hat{H}_4$ представим в виде произведения двух дифференциальных операторов $2^{ого}$ порядка

$$\hat{H}_4\Psi(r) = -\mu\hat{H}_2\,\hat{H}_1\Psi(r), \tag{25}$$
$$\hat{H}_1 = \frac{d^2}{dr^2} + \alpha_1^2 + y_1(r)\frac{d}{dr} + y_3(r), \tag{26}$$
$$\hat{H}_2 = \frac{d^2}{dr^2} - \alpha_2^2 + y_2(r)\frac{d}{dr} + y_4(r). \tag{27}$$

Из условия выполнения операторного равенства (25), т.е.

$$\hat{H}_4 = -\mu\hat{H}_2\,\hat{H}_1,$$

получим следующую систему уравнений на неизвестные функции y_i $(i = 1, 2, 3, 4)$:

$$\begin{cases} y_1 + y_2 = 0, \\ 2y_1' + y_3 + y_4 + y_2 y_1 = 0, \\ y_1'' - y_1\alpha_2^2 + y_2\alpha_1^2 + 2y_3' + y_2 y_1' + y_2 y_3 + y_1 y_4 = 0, \\ y_3'' + y_2 y_3' + y_4 y_3 + \alpha_1^2 y_4 - \alpha_2^2 y_3 = \dfrac{V(r)}{\mu}. \end{cases} \tag{28}$$

Из первых двух уравнений имеем

$$\begin{cases} y_2 = -y_1, \\ y_4 = y_1^2 - 2y_1' - y_3. \end{cases} \tag{29}$$

Подставляя (29) в (28), получим

$$\begin{cases} y_1'' - y_1\alpha_{12} + 2y_3' - 3y_1y_1' - 2y_1y_3 + y_1^3 = 0, \\ y_3'' - \alpha_{12}y_3 + \alpha_1^2(y_1^2 - 2y_1') - y_1y_3' - 2y_1'y_3 + y_1^2y_3 - y_3^2 = \dfrac{V(r)}{\mu}; \end{cases} \tag{30}$$

$$\alpha_{12} = \frac{\sqrt{1+4\mu E_\epsilon}}{\mu}.$$

Первое уравнение (30) перепишем в следующем виде:

$$y_3' + py_3 = Q, \tag{31}$$

где

$$Q = -\frac{1}{2}\left(y_1'' - \alpha_{12}y_1 - 3y_1y_1' + y_1^3\right), \tag{32}$$

$$p = -y_1. \tag{33}$$

Общий интеграл находим по формуле

$$y_3(r) = e^{-\int^r p\,dr'}\left[\int^r Q\,dr'\,e^{\int^{r'} p\,dt} + C\right]. \tag{34}$$

Эта формула позволяет вычислить функцию y_3, если задано y_1.

Используя уравнение (31), можно получить формулу для вычисления потенциала $V(r)$, то есть

$$V(r) = \mu\left[\left(y_1^2 - y_1' - \alpha_{12}\right)y_3 - y_3^2 + Q' + \alpha_1^2\left(y_1^2 - 2y_1'\right)\right]. \tag{35}$$

Заметим, что выражение (35) не содержит производных от функции y_3. Теперь, используя равенство (25) вместо решения краевой задачи ((24),(17)) для уравнения $4^{\text{ого}}$ порядка, будем решать более простую краевую задачу для уравнения второго порядка:

$$\hat{H}_1\Psi(r) = \left[\frac{d^2}{dr^2} + \alpha_1^2 + y_1(r)\frac{d}{dr} + y_3(r)\right]\Psi(r) = 0, \tag{36}$$

$$\Psi(0) = 0, \quad \Psi(a) = 0. \tag{37}$$

Подстановка

$$\Psi(r) = \Phi(r)e^{-\frac{1}{2}\int^r y_1(t)\,dt}$$

приводит уравнение (36) к виду

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + \alpha_1^2 + W\right]\Phi(r) = 0 \tag{38}$$

с граничными условиями

$$\Phi(0) = 0, \quad \Phi(a) = 0, \tag{39}$$

где

$$W = y_3 - \frac{y_1^2}{4} - \frac{y_1'}{2}. \tag{40}$$

Пусть решение краевой задачи (38),(39) для заданных функций y_1,y_3 существует. Тогда это решение будет решением уравнения (24) с потенциалом $V(r)$, вычисленным по формуле (35). Рассмотрим некоторые частные случаи подбора функций y_1,y_3.

1.

Пусть $y_1 = 0$, тогда

$$\begin{aligned} &y_3 = D, \\ &W = D, \\ &V = -D\sqrt{1+4\mu E_\epsilon}, \end{aligned} \tag{41}$$

D-постоянная величина. Потенциалы V, W получились постоянными величинами. Этот вариант подробно обсуждали в предыдущем разделе.

2.

Пусть $y_1 = -\nu$, $\nu > 0$, тогда

$$\begin{aligned} &y_3 = c_1 + ce^{-\nu r}, \; c_1 = \tfrac{1}{2}\left(\nu^2 - \alpha_{12}\right), \\ &W = c_1 + ce^{-\nu r} - \frac{\nu^2}{4}, \\ &V = \mu\left[2c_1\left(c_1 + ce^{-\nu r}\right) - \left(c_1 + ce^{-\nu r}\right)^2 + \alpha_1^2\nu^2\right]. \end{aligned} \tag{42}$$

3.

Пусть $y_1 = Ar$, A – постоянная величина, тогда

$$\begin{aligned} &y_3 = c_1 + c_2r^2 + ce^{-\frac{A}{2}r^2}, \\ &D_1 = -3A - \tfrac{1}{2}\alpha_{12}, \; c_2 = \frac{A^2}{2}, \\ &W = y_3 - \frac{A^2}{4}r^2 - \frac{A}{2}, \\ &V = \mu\left[\left(A^2r^2 - A - \alpha_{12}\right)y_3 - y_3^2 + \tfrac{3}{2}A^3r^2 - \left(A\alpha_{12} + 3A^2\right) + \alpha_1^2\left(A^2r^2 - 2A\right)\right]. \end{aligned} \tag{43}$$

В вариантах 2 и 3 решение краевой задачи (38),(39) для уравнения второго порядка с потенциалом $W(r)$ является решением уравнения четвертого порядка с потенциалом $V(r)$. Если вычисленные потенциалы $W(r)$, $V(r)$ удовлетворяют условию

$$\begin{aligned} |W(r)| &\leq D_1, \\ |V(r)| &\leq D_2, \end{aligned} \tag{44}$$

$D_1 < \infty$, $D_2 < \infty$ на отрезке $0 \leq r \leq a$, то краевые условия $\Psi(0)'' = \Psi(a)''$ также будут выполняться.

Список литературы

[1] А.А. Быков, И.М. Дремин, А.В. Леонидов,*УФН* **143** (1984) 3.

[2] A.A. Logunov, A.N. Tavkhelidze *Nouvo Cim.* **29** (1963) 380.

[3] V.G. Kadyshevsky, *Nucl.Phys.* **B6** (1968) 125.
V.G. Kadyshevsky, M.D. Mateev and R.M. Mir-Kasimov, *Preprint E2-4030*, JINR, Dubna, 1968.
V.G. Kadyshevsky, R.M. Mir-Kasimov and N.B. Skachkov, *Nouvo Cim.* **55A** (1968) 233.

[4] V.G. Kadyshevsky, R.M. Mir-Kasimov and N.B. Skachkov, *ЭЧАЯ.* **2** No 3 (1972) 637.

[5] F.Gross, *Phys.Rev.* **B** v.6 (1968) 125; R.H.Thompson, *Phys.Rev.* **D** v.1 (1970) 110.

[6] И.В. Амирханов, Е.В. Земляная, В.Н. Первушин, И.В. Пузынин, Т.П. Пузынина, Н.А. Сариков, Т.А. Стриж, *Математическое моделирование* Т.**6** Вып.7 (1994) 55; *там же* Т.**7** Вып.7 (1995) 34; *там же* Т.**9** Вып.10 (1995) 111.

[7] Е.П. Жидков, В.Г. Кадышевский, Ю.В. Катышев *ТМФ* **3** No 2 (1970) 191.

[8] И.В. Амирханов, Е.Р. Жидков, И.Е. Жидкова *Сообщ. ОИЯИ* 1993, P11-93-350.

Рукопись поступила в издательский отдел
29 января 1999 года.