СООБЩЕНИЯ ОБЪЕДИНЕННОГО ИНСТИТУТА ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

ДУБНА

С 131.1
Л-33

3019/2-76

9/VIII-76

Р5 - 9867

В.М.Лебеденко

О ГРУППАХ ЛИ С КОММУТАЦИОННЫМИ СООТНОШЕНИЯМИ ТИПА $[H_i, H_j] = r_{ij} H_i \ (i<j)$

1976

Р5 - 9867

В.М.Лебеденко

О ГРУППАХ ЛИ С КОММУТАЦИОННЫМИ СООТНОШЕНИЯМИ ТИПА $[H_i, H_j] = r_{ij} H_i$ $(i<j)$

Объединенный институт
ядерных исследований
БИБЛИОТЕКА

ОГЛАВЛЕНИЕ

I. Введение

Настоящая работа является продолжением исследования PR -групп (см. /7/). В ней мы пользуемся терминологией, в основном, общеупотребительной для алгебры и теории унитарных представлений групп (см. /3,4,5/). Исключение составляют некоторые понятия, приведенные ниже.

Как известно (см. /5/), произведением n $(n>1)$ непустых подмножеств $A_1 \cdot A_2 \cdots A_n = \prod_{i=1}^{n} A_i$ (взятых в данном порядке) группы G (полугруппы G) называется множество всех элементов G вида $g = x_1 \cdot x_2 \cdots x_n$, где $x_i \in A_i$.

В частности, может оказаться, что все A_i - подгруппы G, и что $G = A_1 \cdot A_2 \cdots A_n$.

Определение I. Группу $G = A_1 A_2 \cdots A_n$, разложимую в произведение подгрупп $A_1, \ldots A_n$, будем называть P_o - произведением подгрупп A_i, если для любого k $(1 \leq k \leq n)$

$$A_k \bigcap \Big(\prod_{\substack{1 \leq i \leq n \\ i \neq k}} A_i \Big) = E$$

(Здесь E - единичная подгруппа G, а порядок сомножителей соответствует возрастанию номеров).

Предположим, что все из указанных выше подгрупп $(n \geq 2)$ являются однопараметрическими типа R. То есть, группы $A_i \ni a_i(t_i)$ изоморфны аддитивной группе действительных чисел R $(a_i(t_i) \leftrightarrow t_i \in R$, $a_i(t_i) a_i(t_i') = a_i(t_i + t_i'))$. Тогда на множестве подгрупп $[A_i]_{i=1}^{n}$ иногда возможно ввести два отношения: „$\|$" и „$\prec$".

Определение 2. Будем считать, что $A_i \| A_j$, если $xy=yx$ для любых x, y, $x \in A_i$, $y \in A_j$.

Определение 3. Будем считать, что $A_i \prec A_j$, если для любых $a_i(t_i) \in A_i$, $a_j(t_j) \in A_j$ выполняются соотношения

$$a_i(t_i)a_j(t_j) = a_j(t_j)a_i(e^{\tau_{ij}t_j}t_i), \quad (1)$$

где $0 \neq \tau_{ij}$ – некоторая постоянная (для каждых i и j)

Замечание. Соотношения (1) эквивалентны следующим

$$a_j(t_j)a_i(t_i) = a_i(e^{-\tau_{ij}t_j}t_i)a_j(t_j). \quad (2)$$

Теперь мы можем дать определение PR-группы.

Определение 4. Группу G, разложимую в P_0 – произведение однопараметрических подгрупп A_i $(1 \leq i \leq n,\ n \geq 2)$ типа R, будем называть PR – группой (или группой типа PR), если каждая пара A_i, A_j $(i \neq j)$ связана хотя бы одним из соотношений

$$A_i \prec A_j,\ A_j \prec A_i,\ A_i \| A_j.$$

При выполнении всех этих требований (см./7/) никакая тройка A_i, A_j, A_k не связана соотношениями $A_i \prec A_j$, $A_j \prec A_k$ и никакая пара A_i, A_j не связана соотношениями $A_i \prec A_j$, $A_i \| A_j$ $(i \neq j,\ j \neq k)$. $(*)$

С другой стороны, если известно, что некоторое множество G, замкнутое относительно ассоциативного умножения (т.е. полугруппа), удовлетворяет требованиям определения 4 (при замене "группу G" на "полугруппу G") и $(*)$, то легко убедиться в том, что G – PR- группа. Для этого достаточно воспользоваться рассмотрениями доказательства теоремы из/7/ (см./4/,/5/).

Условие $(*)$ означает, например, что в направленном графе $[\,[A_i]_1^n;\ \|;\ \prec\,]$

$$(A_i \prec A_j \Longleftrightarrow A_i \longrightarrow A_j)$$

каждый путь состоит из одного ребра.

В работе/7/ нами было дано другое, но эквивалентное определение PR-группы. Там же показано, что все PR-группы являются группами Ли. Более того, если PR -группа $G = A_1 \cdots A_n$, где $A_i \ni a_i(t_i)$ $(a_i(t_i) \longleftrightarrow t_i \in R$, $a_i(t_i)a_i(t_i') = a_i(t_i+t_i'))$ – однопараметрические подгруппы типа R, удовлетворяющие требованиям определения 4, то, для любой подстановки $i_1, \ldots, i_n$, $(t_{i_1}, \ldots, t_{i_n})$ – глобальная система дифференцируемых координат группы G.

Простейшим примером неабелевой PR – группы является группа афинных движений прямой, сохраняющих ориентацию (см./8/). Она изоморфна (см./7/) группе векторов (x_0, x_1) $(x_i \in R)$ с операцией

$$(x_0, x_1)(y_0, y_1) = (x_0 + y_0,\ e^{-y_0}x_1 + y_1).$$

Эта группа является P_0 – произведением двух подгрупп $A_1 = [(0, t_1)]_{t_1 \in R}$ и $A_2 = [(t_2, 0)]_{t_2 \in R}$, причем $A_1 \prec A_2$ $(\tau_{12} = -1)$.

Некоторые подгруппы группы Пуанкаре, группа движений псевдоевклидовой плоскости – $MH(2)$ (см./1/), а также группа орисферических сдвигов пятимерного гиперболоида (см. Приложение 2) являются PR - группами. Конечно, эти уже известные группы не исчерпывают рассматриваемый нами класс. В главе П будет показано, насколько широк класс PR-групп. В частности, мы увидим, что семейство PR -групп $G_{\alpha\beta}$ $(\alpha\beta\neq 0, \alpha, \beta\in R)$, состоящих из всех матриц вида

$$\begin{pmatrix} e^{\alpha x} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\beta x} & 0 \\ y & z & 1 \end{pmatrix} \quad (x, y, z \in R),$$

содержит множество мощности континуум попарно неизоморфных групп (см. п. 2В и 2С гл. П).

Далее (п. 3 гл. П) мы покажем, что с точностью до выбора коммутаторов PR -группы могут быть охарактеризованы как все связные и односвязные группы Ли, алгебры Ли которых задаются коммутационными соотношениями типа:

$$[H_i, H_j] = P_{ij} H_i \quad (i<j).$$

В главе Ш установлено, что все PR - группы являются экспоненциальными (см. /3,12/ и гл. Ш). Как известно, для описания неприводимых унитарных представлений экспоненциальных групп применим метод орбит Кириллова (см. /3,12/ и Приложение I).

Из наших результатов вытекает простое достаточное условие применимости этого метода к исследованию конкретных групп. Настоящая статья может быть полезной в работе с PR-группами.

П. Некоторые свойства PR -групп

1. Способы записи произведения в PR - группах

В работе /7/ установлено, что если $G = A_1 \cdots A_n$ — PR - группа и подгруппы $A_i \ni a_i(t_i)$ (t_i -параметры однопараметрических подгрупп A_i, удовлетворяющих требованиям определения 4), то, для любой перестановки $i_1, \ldots, i_n$,

$$G = A_{i_1} \cdots A_{i_n}.$$

Но при некотором фиксированном порядке $(i_1, \ldots, i_n)$ следования сомножителей каждый элемент $g \in G$ имеет однозначную запись вида $g = a_{i_1}(t_{i_1}) \cdots a_{i_n}(t_{i_n})$ $(a_{i_k} \in A_{i_k})$. Каждой такой возможности соответствует свой способ записи произведения в группе G.

Нами был выбран некоторый "естественный" порядок следования сомножителей. Этот выбор основан на следующих соображениях. В соответствии с определением 4 и свойством $(*)$ для каждого $A_i \in [A_\alpha]_1^n$ должно выполняться только одно из условий:

а) существует такой элемент $A_j \in [A_\alpha]_1^n$, что $A_j \succ A_i$;

в) существует такой элемент $A_k \in [A_\alpha]_1^n$, что $A_k \prec A_i$;

с) $A_i \| A_l$ для любого $l \leq n$ $(l \neq i)$.

Отсюда вытекает, что $[A_\alpha]_1^n$ можно разбить на три непересекающихся подмножества B_1, B_2, B_3, отнеся в каждое из них все элементы $[A_\alpha]_1^n$, удовлетворяющие, соответственно, одному из требований а), в), с).

Если G - абелева группа, то $B_3 = [A_\alpha]_1^n$. Для неабелевой группы G — $B_1 \neq \varnothing \neq B_2$, а B_3 может быть и пустым.

В силу выбора подмножеств B_k: $A_i \prec A_j$ или $A_i \parallel A_j$ при $A_i \in B_1$, $A_j \in B_2$; $A_i \parallel A_j$ при $A_i, A_j \in B_k$ $(k=1,2,3)$; $A_i \parallel A_j$ при $A_i \in B_k$ $(k=1,2,3)$, $A_j \in B_3$.

Рассмотрим случай неабелевой группы G (В коммутативном случае, как легко заметить, G изоморфна аддитивной группе E_n, то есть G – векторная группа). При $B_3 = \varnothing$ установим порядок следования $A_{i_1} \cdots A_{i_n}$ так, чтобы для индексов i_k выполнялись условия:

$$A_{i_k} \in B_1 \Longleftrightarrow 1 \leq k \leq p \quad (1 \leq p < n),$$

$$A_{i_k} \in B_2 \Longleftrightarrow p+1 \leq k \leq n .$$

Если же $B_3 \neq \varnothing$, то для индексов i_k потребуем выполнения условий:

$$A_{i_k} \in B_1 \Longleftrightarrow 1 \leq k \leq q \quad (1 \leq q < n)$$

$$A_{i_k} \in B_2 \Longleftrightarrow q+1 \leq k \leq \ell \quad (q+1 \leq \ell < n)$$

$$A_{i_k} \in B_3 \Longleftrightarrow \ell+1 \leq k \leq n .$$

В обоих случаях справедливы соотношения:

$$g \times g' = a_{i_1}\left(t_{i_1} + e^{-(\tau'_{12} t_{i_2} + \dots + \tau'_{1n} t_{i_n})} t'_{i_1}\right) \times a_{i_2}\left(t_{i_2} + e^{-(\tau'_{23} t_{i_3} + \dots + \tau'_{2n} t_{i_n})} t'_{i_2}\right) \times \dots \times a_{i_{n-1}}\left(t_{i_{n-1}} + e^{-\tau'_{n-1\,n} t_{i_n}} t'_{i_{n-1}}\right) a_{i_n}\left(t_{i_n} + t'_{i_n}\right) \qquad (3)$$

(см. [7]), где $g = a_{i_1}(t_{i_1}) \cdots a_{i_n}(t_{i_n})$, $g' = a_{i_1}(t'_{i_1}) \cdots a_{i_n}(t'_{i_n})$, $\tau'_{ks} = \tau_{i_k i_s}$ (см. (I)), полагаем $\tau_{ij} = 0$, если $A_i \parallel A_j$.

При $B_3 = \varnothing$ в соответствии с нашими предположениями формула (3) принимает вид:

$$g \times g' = a_{i_1}\left(t_{i_1} + e^{-(\tau'_{1\,p+1} t_{i_{p+1}} + \dots + \tau'_{1n} t_{i_n})} t'_{i_1}\right) \times \dots \times a_{i_p}\left(t_{i_p} + e^{-(\tau'_{p\,p+1} t_{i_{p+1}} + \dots + \tau'_{pn} t_{i_n})} t'_{i_p}\right) \times a_{i_{p+1}}\left(t_{i_{p+1}} + t'_{i_{p+1}}\right) \cdots a_{i_n}\left(t_{i_n} + t'_{i_n}\right). \qquad (4)$$

Если же $B_3 \neq \varnothing$, то

$$g g' = a_{i_1}\left(t_{i_1} + e^{-(\tau'_{1\,q+1} t_{i_{q+1}} + \dots + \tau'_{1\ell} t_{i_\ell})} t'_{i_1}\right) \times \dots a_{i_q}\left(t_{i_q} + e^{-(\tau'_{q\,q+1} t_{i_{q+1}} + \dots + \tau'_{q\ell} t_{i_\ell})} t'_{i_q}\right) \times a_{i_{q+1}}\left(t_{i_{q+1}} + t'_{i_{q+1}}\right) \cdots a_{i_n}\left(t_{i_n} + t'_{i_n}\right). \qquad (5)$$

Отметим, что из наших построений вытекает следующее:

каждая строка и столбец матриц

$$\begin{pmatrix} r'_{1p+1} & \dots & r'_{1n} \\ - & - & - \\ r'_{pp+1} & \dots & r'_{pn} \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} r'_{1q+1} & \dots & r'_{1\ell} \\ - & - & - \\ r'_{qq+1} & \dots & r'_{q\ell} \end{pmatrix}$$

содержит по ненулевому элементу (возможен случай, когда все элементы отличны от нуля).

Можно рассматривать и другие порядки следования сомножителей A_1. Из них нам кажутся наиболее интересными порядки, противоположные введенным выше.

Для них легко установить, с помощью соотношений (I) (2) и метода индукции, справедливость формулы:

$$gg' = a_{i_1}(t_{i_1}+t'_{i_1}) \times a_{i_2}\left(e^{r'_{21}t'_{i_1}}t_{i_2}+t'_{i_2}\right) \times$$
$$\times\, a_{i_3}\left(e^{(r'_{31}t'_{i_1}+r'_{32}t'_{i_2})}t_{i_3}+t'_{i_3}\right)\dots$$
$$\dots a_{i_n}\left(e^{(r'_{n1}t'_{i_1}+r'_{n2}t'_{i_2}+\dots+r'_{nn-1}t'_{i_{n-1}})}t_{i_n}+t'_{i_n}\right)$$

$$\left(r'_{ks} = r_{i_k i_s}\,, \quad r'_{ks}=0 \ \text{ при } A_{i_k} \parallel A_{i_s}\right).$$

Отсюда непосредственно следуют соотношения, аналогичные (4) и (5).

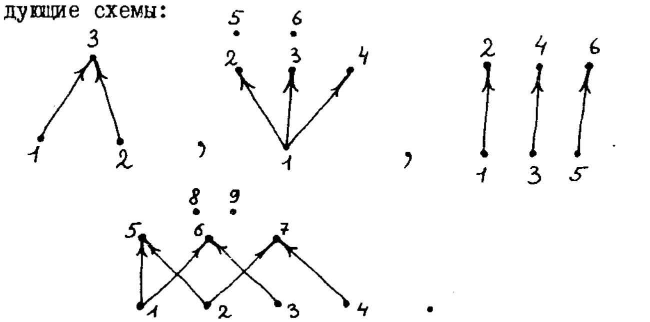
2. О классе PR - групп

В работе[7] было показано, что всякая PR - группа является разрешимой, ступени 2. Приведенные ниже результаты

можно рассматривать как некоторое описание интересующего нас класса групп.

2А. Теорема существования

Будем рассматривать множества $[A_i]_1^n$ с формальными отношениями „$\parallel$" и „$\prec$", удовлетворяющими (формально) требованиям $(*)$ и определения 4. Эти системы можно рассматривать как некоторые направленные графы. Геометрически (при $A_i \prec A_j \Leftrightarrow i \bullet\!\!\to\!\!\bullet j$) им могут соответствовать, например, следующие схемы:



В силу определения 4, каждой PR-группе соответствует некоторый граф рассматриваемого типа. Может возникнуть вопрос: любому ли такому графу соответствует PR -группа? На этот вопрос утвердительно отвечает следующая

<u>Теорема I.</u> Для любой системы $[A'_i]_1^n$ $(n \geq 2)$ с формальными отношениями „$\parallel$" и „$\prec$", удовлетворяющими (формально) требованиям $(*)$ и определения 4, существует PR -группа G, разложимая в P_0 -произведение однопараметрических подгрупп A_i (в смысле определения 4), $1 \leq i \leq n$. Причем $A_i \parallel A_j$ (в смысле определения 2) $\Longleftrightarrow A'_i \parallel A'_j$

(формально), $A_i \prec A_j$ (в смысле определения 3) $\Leftrightarrow A_i' \prec A_j'$ (формально). Константы τ_{ij} (при $A_i \prec A_j$) могут быть выбраны произвольно $(R \ni \tau_{ij} \neq 0)$.

<u>Доказательство</u>. Пусть $B=[A_i']_1^n$ - система указанного в условии типа, и в ней есть пара A_i' , A_j' , связанная отношением „$\prec$" (случай, когда все элементы B связаны отношением „$\|$" мы не рассматриваем ввиду его тривиальности). Тогда, аналогично уже проделанному в п. I для неформальных систем, ее можно переупорядочить так, чтобы выполнялись соотношения: $A'_{i_k} \| A'_{i_\ell}$ при любых $k, \ell \leq p$ и любых $k, \ell > p$ (где p , $p<n$, - некоторый номер, определяемый системой), $A'_{i_k} \prec A'_{i_\ell}$ или $A'_{i_k} \| A'_{i_\ell}$ при любых k , ℓ , $k \leq p$, $\ell > p$. Пусть $\tau_{ij}=0$ при $A_i' \| A_j'$,а для $A_i' \prec A_j'$ числа τ_{ij} , $0 \neq \tau_{ij} \in R$ произвольны. Положим $\tau'_{k\ell}=\tau_{i_k i_\ell}$. Рассмотрим группоид (см.[4]) G , состоящий из всех действительных векторов $(t_1,\dots,t_n)$, с операцией:

$$(t_1,\dots,t_n)(t_1',\dots,t_n') = (t_1 + e^{-(\tau'_{1p+1}t_{p+1}+\dots+\tau'_{1n}t_n)}t_1', \dots, t_p + e^{-(\tau'_{pp+1}t_{p+1}+\dots+\tau'_{pn}t_n)}t_p', t_{p+1}+t'_{p+1}, \dots, t_n+t_n'). \qquad (7)$$

Пусть $g=(t_1,\dots,t_n)$, $g'=(t_1',\dots,t_n')$, $g''=(t_1'',\dots,t_n'')$ — произвольные элементы G . Тогда

$$(gg')g'' = (t_1 + e^{-(\tau'_{1p+1}t_{p+1}+\dots+\tau'_{1n}t_n)}t_1', \dots, t_p + e^{-(\tau'_{pp+1}t_{p+1}+\dots+\tau'_{pn}t_n)}t_p', t_{p+1}+t'_{p+1}, \dots, t_n+t_n')\cdot(t_1'', \dots, t_n'') =$$

$$= \Big(t_1 + e^{-(\tau'_{1p+1}t_{p+1}+\dots+\tau'_{1n}t_n)}t_1' + e^{-(\tau'_{1p+1}(t_{p+1}+t'_{p+1})+\dots+\tau'_{1n}(t_n+t_n'))}t_1'', \dots, t_p + e^{-(\tau'_{pp+1}t_{p+1}+\dots+\tau'_{pn}t_n)}t_p' + e^{-(\tau'_{pp+1}(t_{p+1}+t'_{p+1})+\dots+\tau'_{pn}(t_n+t_n'))}t_p'', t_{p+1}+t'_{p+1}+t''_{p+1}, \dots, t_n+t_n'+t_n''\Big),$$

$$g(g'g'') = (t_1,\dots,t_n)\cdot(t_1' + e^{-(\tau'_{1p+1}t'_{p+1}+\dots+\tau'_{1n}t_n')}t_1'', \dots, t_p' + e^{-(\tau'_{pp+1}t'_{p+1}+\dots+\tau'_{pn}t_n')}t_p'', t'_{p+1}+t''_{p+1}, \dots, t_n'+t_n'') =$$

$$= \Big(t_1 + e^{-(\tau'_{1p+1}t_{p+1}+\dots+\tau'_{1n}t_n)}(t_1' + e^{-(\tau'_{pp+1}t'_{p+1}+\dots+\tau'_{pn}t_n')}t_1''), \dots, t_p + e^{-(\tau'_{pp+1}t_{p+1}+\dots+\tau'_{pn}t_n)}(t_p' + e^{-(\tau'_{pp+1}t'_{p+1}+\dots+\tau'_{pn}t_n')}t_p''), t_{p+1}+t'_{p+1}+t''_{p+1}, \dots, t_n+t_n'+t_n''\Big).$$

Отсюда видно, что операция в G ассоциативна. При этом очевидно, что $(0,\dots,0)$ – единица G. Легко проверить, что для произвольного элемента $(t_1,\dots,t_n)\in G$ правым и левым обратным является элемент $(t'_1,\dots,t'_n)$, где

$$t'_n=-t_n\ ,\ \dots,\ t'_{p+1}=-t_{p+1}\ ,$$
$$t'_p=-e^{(\tau'_{p\,p+1}t_{p+1}+\dots+\tau'_{pn}t_n)}t_p\ ,\ \dots,$$
$$t'_1=-e^{(\tau'_{1\,p+1}t_{p+1}+\dots+\tau'_{1n}t_n)}t_1\ .$$

Из полученного уже следует, что G –группа (см. /4,5/).

Покажем теперь, что группа G удовлетворяет остальным требованиям теоремы. Пусть A_{i_k} – множество всех элементов $(t_1,\dots,t_n)$ группы G, у которых $t_j=0$ при $j\neq k$.

В силу (7), при любых $k\leq n$, A_{i_k} – однопараметрические подгруппы G, изоморфные R и $G=A_{i_1}\cdots A_{i_n}$. Группа G является P_o – произведением подгрупп A_{i_k}, поскольку элемент A_{i_k} может равняться $(t_1,\dots,t_k,\dots,t_n)$ с $t_k=0$, тогда и только тогда, когда он равен единице. Наконец, в силу (7), установленное нами в начале доказательства соответствие между системой $[A_i^{\,\cdot}]_1^n$ и G показывает, что G –группа требуемого типа. Теорема доказана.

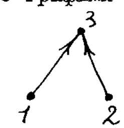
2В. <u>Одно утверждение о мощности</u>

Теперь мы можем утверждать, что существует по крайней мере счетное множество попарно неизоморфных PR –групп. На самом деле максимальная мощность такого множества – континуум. Это вытекает из следующего.

<u>Теорема 2.</u> Существует континуум попарно неизоморфных трехпараметрических PR – групп.

<u>Доказательство.</u> Рассмотрим трехпараметрические PR –группы

типа $G=A_1A_2A_3$, $A_1\prec A_3$, $A_2\prec A_3$, $A_1\parallel A_2$ (группы с графами типа:



)

Если G и G' – две группы такого типа, то можно считать, что операции в них, соответственно, задаются соотношениями:

$$(t_1,t_2,t_3)(t'_1,t'_2,t'_3)=(t_1+e^{-\tau_{13}t_3}t'_1,\ t_2+e^{-\tau_{23}t_3}t'_2,\ t_3+t'_3)\ ,$$

$$(t_1,t_2,t_3)'(t'_1,t'_2,t'_3)=(t_1+e^{-\tau'_{13}t_3}t'_1,\ t_2+e^{-\tau'_{23}t_3}t'_2,\ t_3+t'_3)',$$ где $(t_1,t_2,t_3)=a_1(t_1)a_2(t_2)a_3(t_3)\in G$, $G'\ni(t_1,t_2,t_3)'=a'_1(t_1)a'_2(t_2)a'_3(t_3)$, а τ_{ij} и τ'_{ij} – постоянные, связанные с G и G' в силу соотношений (I). Далее мы воспользуемся результатами, которые будут независимо получены в п. 3. Так как G и G' – связные и односвязные группы Ли (см. /9,14/ и п. 3В), то G изоморфна G' тогда и только тогда, когда L изоморфна L' (см. /3,14/), где L и L' – алгебры Ли групп G и G, соответственно.

В силу теоремы 4 (см. п. 3А), алгебру L $(L=\{H_1,H_2,H_3\})$ можно задать коммутационными соотношениями:

$$[H_1,H_3]=\tau_{13}H_1\ ,\ [H_2,H_3]=\tau_{23}H_2\ ,$$

$$[H_1,H_2]=0\ ,$$

а алгебру L' $(L' = \{H_1', H_2', H_3'\})$ соотношениями

$$[H_1', H_3'] = \tau_{13}' H_1', \quad [H_2', H_3'] = \tau_{23}' H_2', \quad [H_1', H_2'] = 0 .$$

изоморфизм L и L' эквивалентен существованию таких $H_i'' = \sum_{j=1}^{3} \alpha_{ij} H_j \in L \ (i=1,2,3)$, что

$$\begin{cases} [H_1'', H_3''] = \tau_{13}' H_1'' \\ [H_2'', H_3''] = \tau_{23}' H_2'' \\ [H_1'', H_2''] = 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \det(\alpha_{ij}) \neq 0 .$$

Легко проверить, что в L таких H_i'' не существует, если

$$\begin{vmatrix} \tau_{13} & \tau_{23} \\ \tau_{13}' & \tau_{23}' \end{vmatrix} \neq 0 \neq \begin{vmatrix} \tau_{13} & \tau_{23} \\ \tau_{23}' & \tau_{13}' \end{vmatrix} .$$

Пусть G - группа, указанного выше типа, задаваемая константами $\tau_{13} = 1$, $\tau_{23} = \alpha$ $(\alpha \neq 0)$.

Тогда, как уже установлено, при $\alpha \neq \beta$, $\alpha \cdot \beta \neq 1$ две такие группы G_α и G_β не изоморфны. Отсюда уже следует утверждение теоремы, поскольку, например, мощность множества $[G_\alpha \ ; \ \alpha \in (1, \infty)]$ - континуум.

Теорема доказана.

2С. <u>О линейности PR - групп</u>

Как известно, линейными называются такие группы, которые допускают точное линейное представление. Справедлива следующая

<u>Теорема 3.</u> Каждая PR -группа линейна.

<u>Доказательство.</u> Легко проверить, что множество $C_{ij}^{(\tau_{ij})}$ всех матриц вида

$$C_{ij}^{(\tau_{ij})}(t_i, t_j) = \begin{pmatrix} e^{\tau_{ij} t_j} & 0 \\ t_i & 1 \end{pmatrix},$$

где $t_i, t_j \in R \ni \tau_{ij} \equiv Const, \ \tau_{ij} \neq 0 \ (i \neq j)$, является PR -группой. Действительно, при

$$A_i' = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t_i & 1 \end{pmatrix}\right]_{t_i \in R}, \quad A_j' = \left[\begin{pmatrix} e^{\tau_{ij} t_j} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]_{t_j \in R},$$

$C_{ij}^{(\tau_{ij})} = A_j' A_i'$ и $A_i' \cap A_j' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, то есть $C_{ij}^{(\tau_{ij})}$ — P_0- произведение A_i' и A_j' (см. опр. I). Далее, видно, что $A_i' \prec A_j'$ и τ_{ij} -константа для этой пары, в смысле соотношений (I).

Пусть теперь G — некоторая PR — группа, определяемая множеством (см. п. I, гл. II),

$$[A_i]_1^n = B_1 \cup B_2 \cup B_3$$

где $B_1 \cup B_2 \neq \emptyset$ (случай $B_1 \cup B_2 = \emptyset$ очевиден). Поставим в соответствие каждой паре A_i, A_j, $A_i \in B_1$, $A_j \in B_2$, при $A_i \prec A_j$ множество матриц $C_{ij}^{(\tau_{ij})}$, где τ_{ij} константа, соответствущая A_i, A_j в силу (I)

Рассмотрим совокупность G всех блочно-диагональных матриц с некоторым фиксированным расположением указанных блоков (по одному разу каждого) $C_{ij}^{(\tau_{ij})}(t_i, t_j)$ (и диагональных элементов e^{t_i} для всех $A_i \in B_3$ при $B_3 \neq \emptyset$). Если $A(t_1, \dots, t_n)$ -матрицы такого типа, соответствующие элементам $g = a_1(t_1) \cdots a_n(t_n) \in G$, то легко проверить, что отображение $g = a_1(t_1) \cdots a_n(t_n) \to A(t_1, \dots, t_n)$ является точным представлением G. Для этого достаточно, например, установить, что умножение в G и G' можно задать одинаковыми формулами (см. п. I, гл. II).

Теорема доказана.

<u>Следствие I.</u> Группами блочно-диагональных матриц, приведенными в доказательстве теоремы 3, исчерпываются, с точностью до изоморфизма, все PR-группы.

Замечания. Можно искать и другие, более экономные представления PR -групп. Например, PR - группы с графами $A_i \prec A_{n+1}$, $A_i \| A_j$, $i,j \le n$ $(n \geq 2)$ и константами $\tau_{i\,n+1} = \alpha_i$ можно реализовать матрицами вида:

$$\begin{pmatrix} e^{\alpha_1 t_{n+1}} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & e^{\alpha_2 t_{n+1}} & 0 & \cdots & 0 \\ & & \ddots & & \vdots \\ & 0 & & e^{\alpha_n t_{n+1}} & \\ t_1 & t_2 & \cdots & t_n & 1 \end{pmatrix}$$

Теорему 3 можно было бы использовать как основание для результатов главы Ш. Но там они получены независимо.

3. PR - группы и их алгебры Ли

3А. Коммутационные соотношения в алгебрах Ли PR - групп

Теорема 4. Если PR - группа G является P_o - произведением своих однопараметрических подгрупп A_i типа R, удовлетворяющих условиям определения 4, то ее алгебру Ли L ($L = \{H_1,\dots,H_n\}$, $A_i \to H_i$) можно определить следующими соотношениями:

$$[H_i, H_j] = \tau_{ij} H_i, \qquad (8)$$

где τ_{ij} - константы из (I), при $A_i \prec A_j$, $\tau_{ij} = 0$, при $A_i \| A_j$.

Доказательство. Без нарушения общности можно считать, что G состоит из элементов

$$a_1(t_1)\cdots a_n(t_n) = (t_1,\dots,t_n)$$

и каждая подгруппа $A_k = [a_k(t_k)]_{t_k \in R}$ состоит из элементов вида $(\underbrace{0,\dots,0,t_k}_{k},0,\dots,0)$. Пусть $H_k = a_k'(0) = (\overbrace{0,\dots,0,1}^{k},0,\dots,0)$ $(k=1,\dots,n)$.

Очевидно, что при $A_i \| A_j$ будет $[H_i,H_j]=0$. Если же $A_i \prec A_j$, то коммутатор (см./3,II/)

$$[H_i,H_j] = \lim_{t\to 0^+} \frac{z(t)}{t^2},$$

где

$$z(t) = a_i(t)\,a_j(t)\,a_i^{-1}(t)\,a_j^{-1}(t).$$

Так как

$$a_j(t)a_i^{-1}(t) = a_j(t)a_i(-t) = a_i(-e^{-\tau_{ij}t}t)a_j(t)$$

(см. (2)), то $z(t) = a_i((1-e^{-\tau_{ij}t})t) = (0,\dots,(1-e^{-\tau_{ij}t})t,\dots,0)$.

Итак, $[H_i,H_j] = \tau_{ij} H_i$, поскольку

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{(1-e^{-\tau_{ij}t})t}{t^2} = \tau_{ij}.$$

Теорема доказана.

Замечание. Аналогичное утверждение справедливо и для групп вида $G \otimes T_n$, рассмотренных в работе /7/.

Перегруппировав A_i так, как это сделано в п. 1 главы П, мы придем к утверждению.

Теорема 5. Если PR- группа G является P_o - произведением однопараметрических подгрупп $A_{i_k} = [a_{i_k}(t_{i_k})]_{t_{i_k}\in R, k\le n}$, удовлетворяющих условиям (4) или (5), то алгебра Ли группы G определяется (при $A_{i_k} \to H_k$) коммутационными соотношениями типа

$$[H_i, H_j] = p_{ij} H_i \quad (i<j). \qquad (9)$$

Более детально, при условиях (4)

$$[H_K, H_S] = \begin{cases} 0, \text{ если } k,s \leqslant p \text{ или } k,s \geqslant p+1; \\ \tau'_{ks} H_K, \text{ если } k \leqslant p, s \geqslant p+1, \end{cases} \qquad (10)$$

а при условиях (5)

$$[H_K, H_S] = \begin{cases} 0, \text{ если } k,s \leqslant q \text{ или } k,s \geqslant q+1; \\ \tau'_{ks} H_K, \text{ при } k \leqslant q \text{ и } q+1 \leqslant s \leqslant \ell; \\ 0, \text{ при } k \leqslant q, \ \ell+1 \leqslant s \leqslant n \end{cases} \qquad (11)$$

где $\tau'_{ks} = \tau_{i_k i_s}$ (см. (I)), $\tau_{ij} = 0$ при $A_i \parallel A_j$.

<u>Доказательство</u>. Достаточно применить теорему 4 к рассмотрениям пункта I главы П.

3В. PR-группы и PR-алгебры Ли

<u>Лемма.</u> Всякая PR-группа G связна и односвязна.

<u>Доказательство.</u> Пусть G – PR-группа. Поскольку операцию в G можно задать с помощью соотношения типа (3), то она непрерывна в естественной топологии. Поэтому группа G (в этой топологии) гомеоморфна евклидову пространству и, следовательно, связна и односвязна (см. /9,II,I4/).

Введем некоторые дополнительные определения.

<u>Определение 5.</u> Если H_i и H_j -различные элементы базиса алгебры Ли L, то будем считать, что $H_i < H_j$ при условии (8) $(\tau_{ij} \neq 0)$, а при $[H_i, H_j] = 0$ $H_i \sim H_j$ $(\tau_{ij} = 0)$.

Пусть $[H_i]_1^n$ – базис алгебры Ли PR- группы G типа, рассмотренного в доказательстве теоремы 4. Тогда, в силу той же теоремы: каждая пара H_i, H_j $(i \neq j, i,j \leqslant n)$ удовлетворяет хотя бы одному из условий —

$$H_i < H_j, \ H_j < H_i, \ H_i \sim H_j. \qquad \binom{*}{*}$$

Из условия $(*)$ следует, что никакая тройка H_i, H_j, H_K $(i \neq j, j \neq k)$ не связана соотношениями

$$H_i < H_j, \ H_j < H_K.$$

Однако легко проверить, что для элементов базиса произвольной алгебры Ли, удовлетворяющей $\binom{*}{*}$, такие соотношения не могут иметь места. Очевидно, что и при $H_i < H_j$ не может быть $H_i \sim H_j$.

<u>Определение 6</u>. Алгебру Ли L будем называть PR - алгеброй Ли (или алгеброй Ли типа PR), если элементы H_K некоторого ее базиса связаны условиями $\binom{*}{*}$.

В соответствии с этим определением и вышесказанным алгебра Ли всякой PR -группы является PR- алгеброй Ли. Справедливо и более общее утверждение.

<u>Теорема 6.</u> PR -группы и только они являются связными и односвязными группами Ли с алгебрами Ли типа PR. При этом соответствие между такими группами и алгебрами взаимно-однозначно.

<u>Доказательство</u>. Часть утверждения нами уже доказана (см. Теорему 4 и Определение 6). Покажем, что для всякой алгебры Ли L типа PR найдется единственная, с точностью до изоморфизма, PR -группа с алгеброй Ли L. Действительно, условия $\binom{*}{*}$

формально переходят в соответствующие условия определения 4 при сопоставлении: „$\sim$" $\leftrightarrow$ „$\|$", „$<$" $\leftrightarrow$ „$\prec$" Сохраним и константы τ_{ij} из (8) и (I) без изменения (считая $\tau_{ij}=0$, при $H_i \sim H_j$, $A_i \| A_j$). В силу установленного соответствия теорем I и 4 существует PR-группа G с алгеброй Ли L.

Требование взаимной однозначности выполняется (см./3,9,I4/), поскольку всякая PR-группа связна и односвязна в силу леммы.

Теорема доказана.

Следствие 2. PR-группы и только они являются связными и односвязными группами Ли с алгебрами Ли, определяемыми (при подходящем выборе коммутаторов) соотношениями типа (9)..

II. Экспоненциальность PR-групп

PR-группы являются разрешимыми (см./7/) группами Ли. В классе разрешимых групп Ли содержатся все экспоненциальные группы. Как известно (см./3,I2/), связная и односвязная группа Ли G и соответствующая ей алгебра Ли L называются экспоненциальными, если образ L при каноническом экспоненциальном отображениии совпадает с G. Мы покажем, что все PR-группы экспоненциальны. Существуют различные критерии экспоненциальности (см., например,/I2/). Мы воспользуемся следующим утверждением, вытекающим из результатов работ/I0,I3/: для того, чтобы связная и односвязная разрешимая группа G была экспоненциальной, необходима и достаточна разрешимость

в G любого уравнения вида $x^2=g$, где $g, x \in G$.

Далее мы будем применять это утверждение.

Теорема 7. Всякая PR-группа G экспоненциальна.

Доказательство. Пусть G - произвольная группа типа PR. Тогда можно считать, что $G=A_1\cdots A_n$, где $A_i \ni a_i(t_i)$-такие её однопараметрические подгруппы, что операция в G задается с помощью соотношений типа (3) (см. п. 1 гл. II). Нам достаточно, в силу леммы и упомянутого выше утверждения, доказать, что для любого $g\in G$ уравнение $x^2=g$ разрешимо в G.

Если $x=a_1(t_1)\cdots a_n(t_n)$ $(x\neq e)$, то в силу (3),

$$x^2=a_1\left(\left(1+e^{-(\tau_{12}t_2+\dots+\tau_{1n}t_n)}\right)t_1\right)\dots a_{n-1}\left(\left(1+e^{-\tau_{n-1\,n}t_n}\right)t_{n-1}\right)a_n(2t_n).$$

Пусть теперь $g=a_1(t_1')\cdots a_n(t_n')\neq e$ (при $g=e$ имеем: $e^2=e$). Тогда разрешимость уравнения $x^2=g$ эквивалентна разрешимости системы

$$\begin{cases} 2t_n=t_n' \\ \left(1+e^{-\tau_{n-1\,n}t_n}\right)t_{n-1}=t_{n-1}' \\ \text{- - - - - -} \\ \left(1+e^{-(\tau_{12}t_2+\dots+\tau_{1n}t_n)}\right)t_1=t_1' \end{cases}$$

относительно t_k $(1\le k\le n)$. Она имеет следующее (единственное) решение :

$$t_n^*=\frac{t_n'}{2}, \quad t_{n-1}^*=\frac{t_{n-1}'}{1+e^{-\tau_{n-1\,n}t_n^*}}, \dots$$

$$\dots, t_1^*=\frac{t_1'}{1+e^{-(\tau_{12}t_2^*+\dots+\tau_{1n}t_n^*)}}.$$

Таким образом, мы показали, что группа G экспоненциальна. Теорема доказана.

Замечания. Всякая неабелева PR – группа G экспоненциальна, но никакая такая группа не является нильпотентной (см. /3,5/). Действительно, в каждой такой группе G имеют место соотношения: $[G,G]=A\neq E$, $[G,A]=A$.

Все PR-группы некомпактны. Отметим еще, что не всякая экспоненциальная группа является PR-группой. То есть в теореме 7 получены достаточные условия экспоненциальности. Из теоремы 7 вытекает, что для построения гармонического анализа на PR-группах, в частности, для описания их неприводимых унитарных представлений можно пользоваться методом орбит Кириллова (см. /3,12/). Указанный метод применим для любых экспоненциальных групп (краткое его описание дано в приложениях).

В заключение автор проносит глубокую благодарность В.Г. Кадышевскому за интерес к работе и ценные советы, М. Гавличеку, Е.А. Иванову, Г.И. Колерову, В. Ласснеру, А.В. Матвеенко, Р.М. Мир-Касимову и Н.Б. Скачкову за полезные обсуждения.

IУ. Приложения

1. Краткое описание метода орбит Кириллова

Пусть L (действительная) алгебра Ли экспоненциальной группы Ли G. Через L' обозначим пространство, сопряженное L, то есть пространство всех линейных функционалов $f(x)$ на L.

Если $H\subseteq L$ – некоторая подалгебра L, то через $\exp H$ обозначим подгруппу G, являющуюся образом H при экспоненциальном отображении (см. /3/): $L\to G$ (в частности, $G=\exp L$).

Скалярным произведением элементов $x\in L$ и $f\in L'$ назовем значение

$$f(x) \overset{\text{опр}}{=\!=} (x,f).$$

При этом x и f считаются ортогональными, если $(x,f)=0$. Подмножество $S\subseteq L$ и элемент $f\in L'$ считаются ортогональными, если $(x,f)=0$ при любом $x\in S$. Если $H\subseteq L$ – подалгебра L, то ортогональным дополнением H в L' называется множество $H^{\perp}\subseteq L'$, состоящее из всех элементов $f\in L'$, для которых $(x,f)=0$ при любом $x\in H$.

Обозначим через $\rho(\ell)$ оператор, действующий в пространстве L', с матрицей $(\exp ad\,\ell)'$ (где $ad\,\ell(x)=[\ell,x]$, а „$'$" означает транспонирование).

Орбитой $\Omega(f)$ элемента $f\in L'$ называется множество всех значений $\rho(\ell)f$ при $\ell\in L$. Подалгебра $H\subseteq L$ называется подчиненной элементу $f\in L'$, если множество $[H,H]$ ортогонально f. Пусть H подчинена f. В этом случае будем писать: $H<f$. При $H<f$ формула

$$\chi(\exp h) = \exp(i(h,f))$$

(где χ характер $\exp H$, $\exp$ в правой части – обычная экспонента, а (h,f) – скалярное произведение, введенное выше) определяет одномерное унитарное представление подгруппы $\exp H \subseteq G$. Через $ind(H,f)$ обозначим представление, индуцированное этим характером (см.[I,3]). Представление $ind(H,f)$ неприводимо тогда и только тогда, когда выполняются условия:

$$\dim H = \dim L - \frac{1}{2}\dim(\Omega(f)), \tag{I2}$$

линейное многообразие

$$f + H^{\perp} \subseteq \Omega(f) \tag{I3}$$

(здесь при $f+H^{\perp}$ подразумеваются все элементы L' вида $f+y$, $y \in H^{\perp}$) Если $H < f$, $H_1 < f_1$, то представления $ind(H,f)$ и $ind(H_1,f_1)$ эквивалентны тогда и только тогда, когда f и f_1 лежат на одной орбите, то есть $\Omega(f) = \Omega(f_1)$. И, наконец, основное, на наш взгляд:

каждое неприводимое унитарное представление группы G унитарно эквивалентно некоторому представлению $ind(H,f)$, при подходящем выборе H и f (см.[I2]).

Из сказанного выше вытекает следующий алгоритм построения всех, с точностью до эквивалентности, неприводимых унитарных представлений для групп рассматриваемого типа:

I) нахождение всех орбит в L' относительно $g(\ell)$,

2) выбор подходящего представителя f на каждой орбите Ω,

3) выбор подалгебры $H \subseteq L$, подчиненной f $(H < f)$, удовлетворяющей условиям (I2) и (I3) для каждого такого представителя f.

4) построение представлений $ind(H,f)$.

Более подробно с этим методом и методом построения гармонического анализа для экспоненциальных групп можно ознакомиться в работах[3,I2].

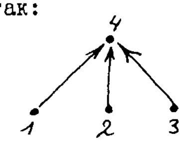
2. <u>Пример (группа орисферических сдвигов пятимерного гиперболоида)</u>

В работах[2,6] рассматривалась группа орисферических сдвигов пятимерного гиперболоида, имеющая важное значение для развития нового подхода в квантовой теории поля. Эта группа изоморфна четырехпараметрической группе Ли K, состоящей из всех действительных векторов $(x_0, \vec{X}) = (x_0, x_1, x_2, x_3)$. Операция в K задается так:

$$(x_0, \vec{X})(y_0, \vec{Y}) = (x_0 + y_0, e^{-y_0}\vec{X} + \vec{Y}). \tag{I4}$$

В работе[6] с помощью одного из традиционных методов было показано, что группа K экспоненциальна. В этом можно гораздо легче убедиться, если использовать результаты, полученные в настоящей статье.

K – типичная PR – группа. Действительно, K – P_0 – произведение четырех однопараметрических подгрупп A_i типа R, $i = 1,2,3,4$, $A_1 \ni (0,x_1,0,0)$, $A_2 \ni (0,0,x_2,0)$, $A_3 \ni (0,0,0,x_3)$, $A_4 \ni (x_0,0,0,0)$ ($e=(0,0,0,0)$ – единичный элемент, $(x_0,\vec{X}) = (x_0,\vec{O})(0,\vec{X})$). Так как $(0,\vec{X})(0,\vec{Y}) = (0,\vec{X}+\vec{Y})$, то $A_1 \| A_2$, $A_2 \| A_3$, $A_1 \| A_3$. Из соотношений (I4) следует, что $A_i \prec A_4$, $i=1,2,3$ (например, $(0,x_1,0,0)(x_0,0,0,0) = (x_0, e^{-x_0}x_1, 0, 0) = (x_0,0,0,0)(0,e^{-x_0}x_1,0,0)$, $r_{14} = -1$ см. (I)). Наглядно граф группы K выглядит так:



Из полученных соотношений вытекает, что множество $[A_i]_1^4$ удовлетворяет условиям определения 4. Поэтому $K-PR$ – группа, то есть экспоненциальная группа Ли (см. теорему 7).

В работе[6] с помощью метода орбит Кириллова найдены все, с точностью до эквивалентности, неприводимые унитарные представления группы K. Каждое такое бесконечно-мерное представление $T_c(g)$ в пространстве $L_2(-\infty,\infty)$ имеет вид:

$$T_c(g)f(y) = e^{i e^{y+x_0}(\vec{C},\vec{X})} f(y+x_0) \quad (i^2=-1),$$

где $f(y)\in L_2(-\infty,\infty)$, $c=(0,\vec{C})$, $\|\vec{C}\|=1$,

$g=(x_0,\vec{X})\in K$, $(\vec{C},\vec{X})$ – обычное скалярное произведение в E_3. Остальные представления одномерны.

Рукопись поступила в издательский отдел
II июня 1976 года

Литература

I. Н.Я. Виленкин. Специальные функции и теория представлений групп. М., Наука , 1965.

2. В.Г. Кадышевский. Квантовая теория с неевклидовым пространством относительных импульсов. Препринт ОИЯИ, Р2-5717, Дубна, 1971.

3. А.А. Кириллов. Элементы теории представлений. М., Наука, 1972.

4. А.Г. Курош. Лекции по общей алгебре. М., Физматгиз, 1962.

5. А.Г. Курош. Теория групп. М., Наука, 1967.

6. В.М. Лебеденко. Описание неприводимых унитарных представлений некомпактной группы обобщенных сдвигов пятимерного гиперболоида. Препринт ОИЯИ, Р2-6033, Дубна, 1971.

7. В.М. Лебеденко. Об одном классе групп Ли. Сообщения ОИЯИ, Р5-9384, Дубна, 1975.

8. М.А. Наймарк. Нормированные кольца. М., Мир, 1973.

9. М.А. Наймарк. Теория представлений групп. М., Наука, 1976.

10. В.П. Платонов. О некоторых классах топологических групп. Сибирский математический журнал. Том. УП, № 5, 1966 (стр. 1095-1106).

11. А.С. Понтрягин. Непрерывные группы. М., Наука, 1973.

12. L. Pukansky. On the Unitary Representations of Exponential Groups, Journal of Functional Analysis 2, 73-113 (1968).

13. С.П. Хоменко. Об извлечении корней в топологических группах. Известия Высших учебных заведений. Математика, № 9, 1975 (стр. 68-75).

14. К. Шевалле. Теория групп Ли. т.I, М., ИЛ, 1948.