ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р5-98-261

П.Е.Жидков*

О БАЗИСНОСТИ СИСТЕМ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ НЕКОТОРЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ ТИПА ШТУРМА–ЛИУВИЛЛЯ

Направлено в журнал «Математические заметки»

---

*E-mail: zhidkov@thsun1.jinr.ru

1998

1. Введение. Определения. Основные результаты

В работе рассматриваются задачи на собственные значения трех видов: каждая из них включает в себя нелинейное уравнение

$$-y'' + f(y^2)y = \lambda y, \quad y = y(x), \quad x \in (0,1) \tag{1}$$

и одно из следующих трех граничных условий

$$y(0) = y(1) = 0, \; y'(0) = p, \tag{2а}$$

$$y'(0) = y(1) = 0, \; y(0) = p, \tag{2б}$$

$$y'(0) = y'(1) = 0, \; y(0) = p. \tag{2в}$$

Здесь все величины вещественны, $\lambda \in R$– спектральный параметр, f– заданная достаточно гладкая функция, а p– произвольный положительный параметр, принимающий всюду в статье одно и то же значение. В дальнейшем предполагается, что $f(y^2)y$– – непрерывно дифференцируемая функция аргумента $y \in R$, так что для уравнения (1) выполняются обычные локальные теоремы существования, единственности и непрерывной зависимости решения задачи Коши от начальных данных и параметра λ. Если пара (λ, y), где $\lambda \in R$ и $y = y(x)$– дважды непрерывно дифференцируемая вещественная функция аргумента $x \in [0,1]$, удовлетворяет уравнению (1) и одному из граничных условий (2), то назовем λ *собственным значением*, а функцию $y(x)$– соответствующей *собственной функцией* рассматриваемой задачи (отметим, что, ввиду того, что каждое из граничных условий (2) содержит данные задачи Коши и дополнительное условие, по теореме единственности в каждом из трех случаев каждому значению параметра λ может соответствовать не более одной собственной функции). Соответственно, множество всех собственных значений любой из задач (1)-(2) назовем *спектром* этой задачи.

Ясно, что случай $p < 0$ сводится к рассматриваемому заменой $y(x) \to -y(x)$. Отметим еще, что заменой независимого переменного $t = 1 - x$ задачи на собственные значения (1)-(2) приводятся к задачам на собственные значения для уравнения (1) с граничными условиями, соответственно,

$$y(0) = y(1) = 0, \ y'(1) = -p; \qquad (2а')$$

$$y(0) = y'(1) = 0, \ y(1) = p; \qquad (2б')$$

$$y'(0) = y'(1) = 0, \ y(1) = p. \qquad (2в')$$

Для каждой из трех задач (1)-(2) в настоящей статье изучаются свойства собственных значений и собственных функций и устанавливается базисность Рисса в $L_2(0,1)$ систем собственных функций задач (1),(2б) и (1),(2в), а также базисность Рисса в $L_2(0,1)$ системы функций, получающихся из системы собственных функций задачи (1),(2а) после нормировки в $L_2(0,1)$. Отметим еще, что для задачи (1),(2б) эти вопросы рассматривались в работе [1]. Доказательство базисности Рисса системы собственных функций этой задачи из указанной работы опиралось на известную теорему Н.К. Бари (см. далее). В настоящей статье автор преследует две главные цели: во-первых, представить прямое (не опирающееся на теорему Н.К. Бари) доказательство результатов работы [1], и, во-вторых, изучить задачи (1),(2а) и (1),(2в).

Автор знает несколько работ, в которых исследовались полнота, базисность и аналогичные свойства для систем собственных функций нелинейных краевых задач, подобных рассматриваемым в настоящей работе. В монографии [2] представлен ряд интересных результатов в этой области. Главный результат статьи автора [3] состоял в доказательстве базисности системы собственных функций одной нелинейной задачи типа Штурма–Лиувилля в пространстве L_2. Идея подхода в этой работе заключалась в сведении рассматриваемой нелинейной задачи на

собственные значения к линейной задаче на собственные значения для оператора Штурма – Лиувилля с потенциалом, зависящим от спектрального параметра. Эти результаты также анонсированы (без доказательств) в [4]. К сожалению, работа [3] содержит ошибки, которые однако можно исправить. Эти исправления и дополнения к работе [3] находятся в печати. Независимое (и более короткое) доказательство результатов для нелинейной задачи на собственные значения из [3], основанное на теореме Н.К. Бари, представлено в [5]. Наконец, в работе автора [6] доказана базисность Рисса в пространстве Соболева H^s, где $s < s_0$, а s_0– отрицательная постоянная, последовательности решений первой краевой задачи на отрезке с нулевыми граничными условиями для некоторого нелинейного дифференциального уравнения второго порядка (без спектрального параметра), подобного уравнению (1).

Введем некоторые *обозначения.* Пусть $L_2(a,b)$, где $a < b$,– стандартное пространство Лебега, состоящее из вещественных функций аргумента $x \in (a,b)$, квадратично интегрируемых по интервалу (a,b), со скалярным произведением $(u,v)_{L_2(a,b)} = \int\limits_a^b u(x)v(x)dx$ и нормой $||u||_{L_2(a,b)} = (u,u)^{\frac{1}{2}}_{L_2(a,b)}$. Пусть $L_2 = L_2(0,1)$, $(\cdot,\cdot) = (\cdot,\cdot)_{L_2(0,1)}$ и $||\cdot|| = ||\cdot||_{L_2(0,1)}$. Далее, для произвольного банахова пространства B с нормой $||\cdot||_B$ через $\mathcal{L}(B;B)$ обозначим банахово пространство линейных ограниченных операторов, действующих из B в B, с нормой $||A||_{\mathcal{L}(B;B)} = \sup\limits_{u \in B:\ ||u||_B = 1} ||Au||_B$.

Для удобства читателей введем следующие принципиальные определения 1-4.

Определение 1. *Семейство функций $\{h_n\}_{n=0,1,2,\ldots} \subset$ $\subset L_2(a,b)$ называется базисом пространства $L_2(a,b)$, если для произвольной функции $h \in L_2(a,b)$ существует единствен-*

ный набор вещественных чисел $\{a_n\}_{n=0,1,2,...}$ *такой, что* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n h_n = h$ *в пространстве* $L_2(a,b)$.

В соответствии с работами [7,8] введем следующее определение.

Определение 2. *Базис* $\{h_n\}_{n=0,1,2,...}$ *пространства* $L_2(a,b)$ *называется базисом Рисса этого пространства, если для произвольной функции* $h = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n h_n \in L_2(a,b)$, *где* $a_n \in R$, $n = 0,1,2,...$, *выполнено условие* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n^2 < \infty$ *и наоборот, для любых вещественных чисел* a_n, *где* $n = 0,1,2,...$, *таких, что* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n^2 < \infty$, *ряд* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n h_n$ *сходится в пространстве* $L_2(a,b)$.

Определение 3. *Система функций* $\{h_n\}_{n=0,1,2,...} \subset L_2(a,b)$ *называется* ω*-линейно независимой в пространстве* $L_2(a,b)$, *если равенство* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n h_n = 0$, *где* a_n*– вещественные коэффициенты, возможно в пространстве* $L_2(a,b)$ *только при* $0 = a_0 = a_1 = ... = a_n = ...$

Определение 4. *Две системы функций* $\{e_n\}_{n=0,1,2,...}$ *и* $\{h_n\}_{n=0,1,2,...}$ *из пространства* $L_2(a,b)$ *называются квадратично близкими в пространстве* $L_2(a,b)$, *если* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} ||e_n - h_n||^2_{L_2(a,b)} < \infty$.

В дальнейшем о функции f предполагается следующее.

(f) *Пусть* $f(y^2)y$*– непрерывно дифференцируемая функция аргумента* $y \in R$ *и пусть* $f(r)$*– монотонно неубывающая непрерывная функция аргумента* $r \in [0,+\infty)$.

Предположение (f) справедливо, например, для $f(r) = |r|^q$, где

$q \geq 0$– постоянная. Отметим, что при $q \in (0,1]$ функция $f(r)$ не дифференцируема в точке $r = 0$; однако при тех же значениях q функция $f(y^2)y$ непрерывно дифференцируема при всех $y \in R$.

Хорошо известен результат Н.К. Бари (см. [2,7-9]), согласно которому ω-линейно независимая система функций $\{h_n\}_{n=0,1,2,...}$ из $L_2(a,b)$, квадратично близкая к базису Рисса в этом пространстве, сама является базисом Рисса в пространстве $L_2(a,b)$ (в действительности, в первых работах [7,8] этот результат был представлен в несколько более слабой форме; однако, доказательство из работы [8] полностью проходит в указанном случае). Очевидно, что любой ортонормированный базис в пространстве $L_2(a,b)$ есть базис Рисса в этом пространстве. Базисы Рисса, квадратично близкие к ортонормированным, называют также *базисами Бари*. В [7-9] также представлены некоторые важные свойства базисов Рисса и Бари. Например, в [8] доказано, что если система $\{h_n\}_{n=0,1,2,...}$ является базисом Рисса пространства $L_2(a,b)$, то существуют постоянные $0 < c < C$ такие, что

$$c\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left|\left|\sum_{n=0}^{\infty} a_n h_h\right|\right|_{L_2(a,b)} \leq C\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

для любой квадратично суммируемой последовательности вещественных чисел $\{a_n\}_{n=0,1,2,...}$.

В настоящей статье в частности устанавливаются ω-линейная независимость и квадратичная близость к ортонормированному базису в пространстве L_2 систем нормированных в L_2 собственных функций каждой из задач (1)-(2), а также оценки $\overline{c} < ||y_n|| < \overline{C}$ собственных функций y_n задач (1),(2б) и (1),(2в) с постоянными $0 < \overline{c} < \overline{C}$, не зависящими от n. Таким образом, системы собственных функций задач (1),(2б) и (1),(2в), а также система нормированных в L_2 на 1 собственных функций задачи (1),(2а), являются базисами Рисса (более того, последняя система является также базисом Бари) в пространстве L_2. Однако, как указывалось выше, в статье приводится прямое (не использующее теоремы Н.К. Бари), простое и короткое доказательство того, что эти системы являются базисами Рисса в L_2.

Первый результат работы составляет

Теорема 1. *В предположении* (f)

(а) *для любой из трех задач* (1)-(2) *существуют последовательности собственных значений* $\{\lambda_n\}_{n=0,1,2,...}$ *и соответствующих собственных функций* $\{y_n\}_{n=0,1,2,...}$ *такие, что для любого целого* $n \geq 0$ *функция* $y_n(x)$ *имеет ровно* n *корней в интервале* $(0,1)$;

(б) *для любого целого* $n \geq 0$ *любая из задач* (1)-(2) *обладает единственными собственным значением и соответствующей собственной функцией такими, что эта собственная функция имеет ровно* n *корней в интервале* $(0,1)$;

(в) *любая собственная функция любой из трех задач* (1)-(2) *как решение уравнения* (1) *имеет единственное продолжение на всю вещественную ось* $x \in R$;

(г) *для каждой из трех задач* (1)-(2) *система собственных функций* $\{y_n\}_{n=0,1,2,...}$ *из п.* (а), *продолженных на всю вещественную ось, равномерно ограничена по* $x \in R$;

(д) *для любого целого* $n \geq 0$ *корнями функции* $y_n(x)$, *продолженной на всю прямую* $x \in R$, *являются точки* $\frac{k}{n+1}$ *в случае задачи* (1),(2а) *и точки* $\frac{2k+1}{2n+1}$ *в случае задачи* (1),(2б); *в случае задачи* (1),(2в) *для любого натурального* n *корнями функции* $y_n(x)$ *являются точки* $\frac{1}{2n}+\frac{k}{n}$ (*в этом случае собственная функция* $y_0(x)$ *тождественно равна* p, *т. е. не имеет корней*) (*здесь во всех трех случаях* $k = 0, \pm 1, \pm 2, ...$);

(е) *для любой собственной функции* $y(x)$ *любой из трех задач* (1)-(2) *и для любого* $x \in R$ *выполнено* $y(\overline{x}-x) = -y(\overline{x}+x)$, *если* $y(\overline{x}) = 0$, *и* $y(\tilde{x}-x) = y(\tilde{x}+x)$, *если* $y'(\tilde{x}) = 0$;

(ж) $\lambda_0 < \lambda_1 < ... < \lambda_n < ...$ *для каждой из трех задач* (1)-(2).

Отметим, что в принципе теорема 1 известна специалистам, хотя автор и не знает публикаций, из результатов которых следовали бы в точности утверждения этой теоремы. Отметим еще, что автору неизвестны примеры нетривиальных функций f, при которых собственные функции какой-либо задач (1)-(2) выражались бы в элементарных функциях.

Основной результат работы составляет

Теорема 2. *В предположении* (f) *системы собственных функций каждой из задач* (1),(2б) *и* (1),(2в) *являются базисами Рисса в пространстве* L_2, *а система собственных функций задачи* (1),(2а) *является базисом того же пространства и становится базисом Рисса указанного пространства после нормировки на* 1 *каждой собственной функции в этом пространстве.*

Замечание 1. Из доказательства теоремы 2 (см. оценку (20)) следует, что в случае задачи (1),(2а) $||y_n|| \to 0$ при $n \to \infty$, поэтому ввиду теоремы 2 в этом случае последовательность собственных функций не является базисом Рисса в пространстве L_2.

Что касается приложений полученных результатов, то, по мнению автора, можно надеяться, что в перспективе они могут быть использованы в частности в методах Галеркина и Фурье для нелинейных дифференциальных уравнений. Кроме того, они могут найти применение в тех многочисленных областях квантовой физики, в которых возникают всевозможные разновидности нелинейного уравнения Шредингера.

Пользуясь случаем, автор выражает искреннюю благодарность чл.-корр. РАН, профессору С.И. Похожаеву за состоявшиеся несколько лет назад научные дискуссии, которые су-

щественно повлияли на возрастание интереса автора к задаче о полноте и подобных ей для систем решений нелинейных краевых задач.

2. Доказательство теоремы 1

Сначала докажем утверждения теоремы 1 для задачи (1),(2a). Рассмотрим следующую задачу Коши

$$-y'' + f(y^2)y = \lambda y, \quad y = y(x), \tag{3}$$

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = p. \tag{4}$$

Ввиду предположения (f) для нее справедливы обычные локальные теоремы существования, единственности и непрерывной зависимости решения от параметра λ. Поскольку $p > 0$, при любом $\lambda \in R$ для соответствующего решения $y(x)$ задачи (3)-(4) имеем $y'(x) > 0$ в некоторой окрестности точки $x = 0$. Далее, хорошо известно, что уравнение (3) интегрируемо в квадратурах, и, как нетрудно убедиться, если решение $y(x)$ задачи (3)-(4) определено на некотором отрезке $[0, d]$, где $d > 0$, и если $y'(x) > 0$ при $x \in [0, d)$, то функция $x(y)$, обратная к функции $y(x)$, взятой с областью определения $[0, d]$, имеет следующий вид:

$$x(y) = \int_0^y \frac{dr}{\sqrt{U(\lambda, r^2)}} \tag{5}$$

где $F(r) = \int\limits_0^r f(t)dt$, $U(\lambda, r^2) = p^2 + F(r^2) - \lambda r^2$, а $y \in [0, y(d)]$, причем $x(y(d)) = d$. Действительно, умножая уравнение (3) на $2y'(x)$ и интегрируя от 0 до x, в силу условий (4) получаем $p^2 - [y'(x)]^2 + F(y^2(x)) = \lambda y^2(x)$, откуда опять ввиду начальных условий (4) следует (5). Отметим, что при этом $x'(y_1 - 0) = +\infty$, где $y_1 = y(d)$, если $y'(d) = 0$. Кроме того, если при некотором

$\lambda > \overline{\lambda}$ функция $U(\lambda, r^2)$ положительна в полуинтервале $r \in [0, b)$, где $b > 0$, то на отрезке $[0, x(b)]$, где $x(y)$– функция из (5) (может быть, $x(b) = +\infty$), определено решение $y(x)$ задачи (3)-(4), $y(x(b)) = b$, $y'(x) > 0$ при $x \in [0, x(b))$ и функция $x(y)$ с областью определения $[0, b]$ является обратной функцией к этому решению $y(x)$ задачи (3)-(4), взятому на отрезке $[0, x(b)]$; при этом $y'_x(x(b)) = 0$, если $x(b) < +\infty$ и $x'(b - 0) = +\infty$.

Обозначим через Λ множество значений параметра λ, при каждом из которых существует $r > 0$ такое, что $U(\lambda, r^2) = 0$. Ввиду условия (f) $\inf \Lambda \geq f(0)$. Далее, ясно, что если $\overline{\lambda} \in \Lambda$, то любое $\lambda > \overline{\lambda}$ также принадлежит Λ. Поэтому либо $\Lambda = (\overline{\lambda}, +\infty)$ (случай А), либо $\Lambda = [\overline{\lambda}, +\infty)$ (случай Б) для некоторого $\overline{\lambda} \geq$ $\geq f(0)$.

Для каждого $\lambda \in \Lambda$ обозначим через $z(\lambda)$ точную нижнюю грань множества значений $r > 0$, при которых $U(\lambda, r^2) = 0$. Тогда $z(\lambda) > 0$ и $U(\lambda, z^2(\lambda)) = 0$. Далее, ясно, что $z(\lambda)$– – монотонно убывающая функция аргумента $\lambda \in \Lambda$, поэтому при

$$\lambda > \overline{\lambda} \quad [U(\lambda, r^2)]'_r \Big|_{r = z(\lambda)} = 2z(\lambda) f(z^2(\lambda)) - 2\lambda z(\lambda) <$$

$< 2z(\lambda)(f(z^2(\lambda')) - \lambda') \leq 0$ для любого $\lambda' \in (\overline{\lambda}, \lambda)$ (поскольку

$$0 \geq U'_r(\lambda', r^2)\Big|_{r = z(\lambda')} = 2z(\lambda')(f(z^2(\lambda')) - \lambda'), \text{ где } z(\lambda') > 0),$$

следовательно по теореме о неявной функции $z(\lambda)$– непрерывно дифференцируемая функция аргумента $\lambda > \overline{\lambda}$ и $z'(\lambda) < 0$ при $\lambda > \overline{\lambda}$. Кроме того, ясно, что в случае Б $\lim\limits_{\lambda \to \overline{\lambda} + 0} z(\lambda) = z(\overline{\lambda})$.

Докажем теперь, что для каждого $d > 0$ существует $\lambda > \overline{\lambda}$ такое, что

$$J(\lambda) = \int_0^{z(\lambda)} \frac{dr}{\sqrt{U(\lambda, r^2)}} = d, \tag{6}$$

где интеграл в правой части понимается как несобственный в окрестности точки $r = z(\lambda)$. Отметим, что поскольку, как указано выше, $[U(\lambda,r^2)]'_r\Big|_{r=z(\lambda)} < 0$ при $\lambda > \overline{\lambda}$, при любом $\lambda > \overline{\lambda}$ несобственный интеграл в правой части (6) сходится и $J(\lambda)$– –непрерывная функция аргумента $\lambda > \overline{\lambda}$.

Рассмотрим случай А. Тогда $\Lambda = (\overline{\lambda},+\infty)$. Ясно, что $z(\overline{\lambda}+0) = +\infty$ (иначе ввиду непрерывности функции $U(\lambda,r^2)$ аргумента (λ,r) получили бы, что $\overline{\lambda} \in \Lambda$) и что $z(+\infty) = 0$. Отсюда легко вытекает, что $\overline{\lambda} = \lim\limits_{r\to\infty} f(r^2) < +\infty$, а из этого следует, что

$$\lim_{\lambda\to\overline{\lambda}+0} J(\lambda) = +\infty \quad \text{и} \quad \lim_{\lambda\to+\infty} J(\lambda) = 0. \tag{7}$$

Поэтому в случае А существование для каждого $d > 0$ такого $\lambda > \overline{\lambda}$, что выполнено (6), вытекает из непрерывности функции $J(\lambda)$ при $\lambda > \overline{\lambda}$.

Рассмотрим случай Б. Как и в случае А, имеем $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} J(\lambda) = 0$. Поэтому ввиду непрерывности функции $J(\lambda)$ при $\lambda > \overline{\lambda}$ остается доказать, что $\lim\limits_{\lambda\to\overline{\lambda}+0} J(\lambda) = +\infty$. Из теоремы о неявной функции сразу следует, что $[U(\overline{\lambda},r^2)]'_r\Big|_{r=z(\overline{\lambda})} = 0$ (иначе по этой теореме нашлись бы значения параметра λ, меньшие $\overline{\lambda}$ и принадлежащие Λ), откуда вытекает требуемое свойство, поскольку ясно, что $\lim\limits_{\lambda\to\overline{\lambda}+0} J(\lambda) \geq J(\overline{\lambda})$ (так как $U(\overline{\lambda},r^2) > 0$ при $r \in (0,z(\overline{\lambda}))$ и ясно, что для любого $y \in (0,z(\overline{\lambda}))$ $\int\limits_0^y \frac{dr}{\sqrt{U(\lambda,r^2)}} \to \int\limits_0^y \frac{dr}{\sqrt{U(\overline{\lambda},r^2)}}$ при $\lambda \to \overline{\lambda}+0$), и, кроме того, $U(\overline{\lambda},r^2) = O((z(\overline{\lambda})-r)^2)$ при $r \to z(\overline{\lambda})-0$, поэтому $J(\overline{\lambda}) = +\infty$.

Ввиду предыдущих рассуждений доказано, что для любого $d > 0$ существует $\lambda \in R$ такое, что соответствующее решение $y(x)$ продолжаемо на отрезок $[0,d]$, $y'(x) > 0$ при $x \in [0,d)$ и $y'(d) = 0$ и что при этом $y(d) = z(\lambda)$. Докажем, что для любого $d > 0$ существует ровно одно значение $\lambda \in R$, обладающее этим свойством. Предположим противное. Пусть для некоторого $d > 0$ существует два значения $\lambda_1 < \lambda_2$ такие, что каждое из соответствующих решений $y_1(x)$ и $y_2(x)$ задачи (3)-(4) продолжаемо на отрезок $[0,d]$, $y_i'(x) > 0$ при $x \in [0,d)$ и $y_i'(d) = 0$ $(i = 1,2)$. Ввиду предыдущего $\lambda_1 > \overline{\lambda}$. Умножим уравнение (3), записанное для $y(x) = y_1(x)$, на $y_2(x)$, то же самое уравнение, записанное для $y(x) = y_2(x)$, на $y_1(x)$, вычтем эти равенства одно из другого и проинтегрируем получившееся тождество по отрезку $[0,d]$. Ввиду начальных условий (4) получаем

$$0 = \int\limits_0^d y_1(x)y_2(x)[\lambda_1 - \lambda_2 - f(y_1^2(x)) + f(y_2^2(x))]dx. \tag{8}$$

В силу (5) для обратных функций $x_1(y)$ и $x_2(y)$ соответственно к функциям $y_1(x)$ и $y_2(x)$ имеем $x_1(y) < x_2(y)$ для всех значений $y \in (0,\min\{y_1(d);y_2(d)\}]$. Поэтому $y_1(x) > y_2(x)$ для всех $x \in (0,d]$. Но следовательно, ввиду условия (f) правая часть в (8) отрицательна, т. е. получаем противоречие. Тем самым, доказано, что для любого $d > 0$ существует единственное $\lambda \in R$ такое, что для соответствующего решения $y(x)$ задачи (3)-(4) имеем $y'(x) > 0$ при $x \in [0,d)$ и $y'(d) = 0$.

Наконец, ввиду автономности уравнения (3) и его инвариантности относительно замен переменных $y(x) \to -y(x)$ и $x \to c - x$, где $c \in R$– произвольная постоянная, легко получаем, что если решение $y(x)$ задачи (3)-(4) продолжаемо на отрезок $[0,d]$, где $d > 0$, $y'(x) > 0$ при $x \in [0,d)$ и $y'(d) = 0$, то оно продолжаемо на всю вещественную прямую $x \in R$, $y(d+x) = y(d-x)$ (в частности $y(2d) = 0$) и $y(2kd+x) = -y(2kd-x)$ для всех $x \in R$ $(k = 0,\pm1,\pm2,\ldots)$ (более подробно о доказательстве этого факта см. [1]). Поскольку парами, состоящими из собственных значений и соответствующих собственных функций задачи (1),(2а), являются те и только те пары $(\lambda, y(x))$, состоящие из значений параметра $\lambda \in R$ и соответствующих решений $y(x)$ задачи (3)-(4), для которых $y(1) = 0$, все утверждения теоремы 1 для задачи (1),(2а), за исключением утверждений (г) и (ж), доказаны. Утверждение (г) следует из того, что функция $z(\lambda)$ аргумента $\lambda > \overline{\lambda}$, которая при каждом $\lambda > \overline{\lambda}$ совпадает с соответствующим значением $y(d)$, монотонно убывает. Наконец, поскольку, как доказано выше, для каждого $d > 0$ существует единственное $\lambda \in R$, причем $\lambda > \overline{\lambda}$, такое, что $y'(x) > 0$ при $x \in [0, d)$ и $y'(d) = 0$, где $y(x)$– решение задачи (3)-(4), отвечающее этому значению параметра λ, и поскольку это значение $d > 0$ непрерывно зависит от λ (так как $d = J(\lambda)$), в силу свойства (7), которое, как доказано выше, справедливо в обоих случаях А и Б, это значение $d > 0$– монотонно убывающая функция аргумента $\lambda \in (\overline{\lambda}, +\infty)$. Отсюда и из приведенных выше рассуждений сразу следует утверждение (ж) теоремы 1 для задачи (1)-(2а).

Докажем утверждения теоремы 1 для задач (1),(2б) и (1),(2в). Рассмотрим следующую задачу Коши

$$-y'' + f(y^2)y = \lambda y, \quad y = y(x), \tag{9}$$

$$y(0) = p, \quad y'(0) = 0. \tag{10}$$

Для нее ввиду условия (f) опять справедливы локальные теоремы существования, единственности и непрерывной зависимости решения от параметра λ.

Возьмем произвольное $\lambda < f(p^2)$. Тогда в силу (9) для соответствующего решения $y(x)$ задачи (9)-(10) имеем $y''(0) > 0$. Поэтому в силу уравнения (9) $y(x) > p$, $y'(x) > 0$ и $y''(x) > > 0$ в некоторой правой полуокрестности точки $x = 0$. Далее, поскольку ввиду условия (f) функция $f(r^2)$ аргумента $r > 0$ монотонно не убывает, в силу уравнения (9) $y(x) > p$, $y'(x) > 0$ и $y''(x) > 0$ для всех $x > 0$, для которых решение $y(x)$ задачи (9)-(10) определено (более подробно см. в [1]). Если $\lambda = f(p^2)$, то $y(x) \equiv p$– соответствующее решение задачи (9)-(10). Таким образом, значения $\lambda < f(p^2)$ не принадлежат спектрам задач (1),(2б) и (1),(2в), а значение $\lambda = f(p^2)$ не является точкой

спектра задачи (1),(2б), но принадлежит спектру задачи (1),(2в) с соответствующей собственной функцией $y_0(x) \equiv p$.

Пусть $\lambda > f(p^2)$. Тогда в силу уравнения (9) $y'(x) < 0$ в некоторой правой полуокрестности точки $x = 0$ (здесь $y(x)$– – решение задачи (9)-(10)). Как и ранее, функция $x(y)$, обратная к функции $y(x)$ в некоторой правой полуокрестности нуля, представима в виде

$$x(\lambda, y) = \int\limits_y^p \frac{dr}{\sqrt{V(\lambda, r^2)}} \quad (y < p), \qquad x(\lambda, p) = 0, \tag{11}$$

где $V(\lambda, r^2) = F(r^2) - \lambda r^2 - F(p^2) + \lambda p^2$, а интеграл понимается как несобственный в окрестности точки $r = p$ (здесь указана явно зависимость функции $x(\lambda, y)$ от параметра λ; кроме того, так как $\frac{d}{dr}V(\lambda, r^2) = 2f(r^2)r - 2\lambda r < 0$ при $r \in (0, p]$ и $V(\lambda, p^2) = 0$, получаем, что $V(\lambda, r^2) > 0$ при $r \in [0, p)$ и что несобственный интеграл из (11) с $y \in [0, p)$ сходится в окрестности точки $r = p$). Отсюда для любого $\lambda > f(p^2)$ легко следует, поскольку (при $\lambda > f(p^2)$) для любого $y \in [0, p]$ корректно определено выражение для $x(\lambda, y)$ из (11), что при $\lambda > f(p^2)$ соответствующее решение $y(x)$ задачи (9)-(10), монотонно убывая справа от точки $x = 0$, обращается в нуль при $x = x(\lambda, 0) > 0$, так что $y'(x) < 0$ при $x \in (0, x(\lambda, 0)]$. Как и ранее, поскольку уравнение (9) автономно и инвариантно относительно замен переменных $y(x) \to -y(x)$ и $x \to c - x$, где $c \in R$– произвольная постоянная, получаем, что при $\lambda > f(p^2)$ соответствующее решение $y(x)$ продолжаемо на всю вещественную прямую $x \in R$ и при этом $y(-x) = y(x)$, $y(x(\lambda, 0) + x) = -y(x(\lambda, 0) - x)$ и $y(2x(\lambda, 0) + x) = -y(x)$ для всех $x \in R$. Наконец, из (11) легко следует, что $x(\lambda, 0)$– непрерывно дифференцируемая функция аргумента $\lambda > f(p^2)$ и $x'_\lambda(\lambda, 0) < 0$. Из приведенных аргументов сразу вытекают все утверждения теоремы 1 для задач (1),(2б) и (1),(2в). Тем самым, теорема 1 доказана.

Замечание 2. Утверждения теоремы 1 для задачи (1),(2б) были доказаны ранее в работе [1] другими методами.

3. Доказательство теоремы 2

Сопоставим трем задачам (1)-(2) соответственно следующие три линейные задачи на собственные значения:

$$-u'' = \mu u, \quad x \in (0,1), \quad u = u(x), \quad u(0) = u(1) = 0, \qquad (12а)$$

$$-u'' = \mu u, \quad x \in (0,1), \quad u = u(x), \quad u'(0) = u(1) = 0, \qquad (12б)$$

$$-u'' = \mu u, \quad x \in (0,1), \quad u = u(x), \quad u'(0) = u'(1) = 0, \qquad (12в)$$

где все величины вещественны и $\mu \in R$– спектральный параметр. В зависимости от того, изучается ли задача (1),(2а), (1),(2б) или (1),(2в), будем брать в качестве системы $\{e_n\}_{n=0,1,2,...}$ ортонормированный базис, состоящий из нормированных в L_2 собственных функций задачи (12а), (12б) либо (12в), соответственно, более точно $e_n(x) = \sqrt{2}\sin\pi(n+1)x$ в случае, если рассматривается задача (1),(2а), $e_n(x) = \sqrt{2}\cos\frac{\pi(2n+1)x}{2}$ в случае задачи (1),(2б) (в этих двух случаях $n = 0,1,2,...$) и $e_0(x) \equiv 1$, $e_n(x) = \sqrt{2}\cos\pi nx$ $(n = 1,2,3,...)$ для задачи (1),(2в). Соответствующими собственными значениями задач (12) являются числа $\mu_n = (\pi(n+1))^2$ для задачи (12а), числа $\mu_n = \left(\frac{\pi(2n+1)}{2}\right)^2$ в случае задачи (12б) и числа $\mu_n = (\pi n)^2$ для задачи (12в) $(n = 0,1,2,...)$. Для каждой из задач (1)-(2) положим $v_n(x) = \frac{y_n(x)}{||y_n||}$.

Лемма 1. *Для каждой из задач (1)-(2) и любого целого $n \geq 0$ в пространстве L_2 имеет место разложение в ряд Фурье*

$$v_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} d_{n,k}e_k,$$

в котором вещественные коэффициенты $d_{n,k}$ таковы, что $d_{n,0} = ... = d_{n,n-1} = 0$ и $d_{n,n} > 0$.

Доказательство. Для произвольного целого $n \geq 0$ для задач (1),(2а) и (1),(2б) рассмотрим пространства $L_2(0, I_n)$, где $I_n = \frac{1}{n+1}$ в случае задачи (1),(2а) и $I_n = \frac{1}{2n+1}$ для задачи (1),(2б) (т. е. $I_n > 0$– минимальный положительный корень функции $v_n(x)$ – см. теорему 1(д)). Проверим, что в каждом из этих двух случаев функции из соответствующей системы $\{e_n\}_{n=0,1,2,...}$, обращающиеся в нуль при $x = I_n$, образуют ортогональный базис в соответствующем пространстве $L_2(0, I_n)$. Действительно, рассмотрим на отрезке $[0, I_n]$ задачу на собственные значения

$$-u'' = \mu u, \quad x \in (0, I_n), \quad u = u(x), \quad u(0) = u(I_n) = 0$$

для задачи (1),(2а), либо

$$-u'' = \mu u, \quad x \in (0, I_n), \quad u = u(x), \quad u'(0) = u(I_n) = 0$$

в случае задачи (1),(2б), где $\mu \in R$– спектральный параметр. Системы собственных функций этих задач, отвечающих различным собственным значениям, образуют ортогональные базисы в соответствующих пространствах $L_2(0, I_n)$ и, как нетрудно проверить, эти собственные функции с точностью до постоянных ненулевых множителей совпадают как раз с функциями из соответствующих систем $\{e_n\}_{n=0,1,2,...}$, равными нулю при $x = I_n$. Отметим еще, что для любого целого $n \geq 0$ минимальным целым $k \geq 0$, при котором $e_k(I_n) = 0$, является номер $k = n$. Таким образом, требуемое утверждение доказано, поэтому можно (в случае задач (1),(2а) и (1),(2б)) разложить функции v_n в ряды Фурье в соответствующих пространствах $L_2(0, I_n)$ по тем из функций из системы $\{e_k\}_{k=0,1,2,...}$, для которых $e_k(I_n) = 0$:

$$v_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} d_{n,k}e_k, \quad n = 0,1,2,..., \qquad (13)$$

где $d_{n,k} = 0$, если $e_k(I_n) \neq 0$, и ввиду предыдущего $d_{n,0} = ... = d_{n,n-1} = 0$. Кроме того, $d_{n,n} = ||e_n||^{-1}_{L_2(0,I_n)}(v_n, e_n)_{L_2(0,I_n)} > 0$, поскольку $v_n(x) > 0$ и $e_n(x) > 0$ при $x \in (0, I_n)$. Заметим еще, что в случае задачи (1),(2б) функции $v_n(x)$ и $e_k(x)$ четны относительно точки $x = 0$, поэтому разложения (13) в этом случае также справедливы в пространстве $L_2(-I_n, I_n)$. Далее, нетрудно проверить, что если $e_k(I_n) = 0$ для некоторого значения индекса k, то эта функция $e_k(x)$, продолженная для всех $x \in R$, обращается в нуль также во всех точках вещественной прямой, являющихся корнями функции $v_n(x)$. Поэтому, поскольку ясно, что любая функция $e_k(x)$ нечетна относительно любого своего корня, в силу теоремы 1(е) легко получаем, что разложения (13) функций $v_n(x)$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ имеют место также в любом пространстве $L_2(I)$, где I– интервал между двумя произвольными соседними корнями функции $v_n(x)$. Следовательно, разложения (13) справедливы также в пространстве L_2.

В случае задачи (1),(2в) совершенно аналогично получаем $v_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} d_{n,k} e_k(x)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, в пространстве L_2, где $d_{n,0} = \ldots = d_{n,n-1} = 0$ и $d_{n,n} > 0$, и, кроме того, $v_0(x) = pe_0(x)$. Таким образом, лемма 1 доказана.

Замечание 3. В [6] приведен пример разложений того же вида, что и в лемме 1, в которых матрица $D = (d_{n,k})_{n,k \geq 0}$– верхнетреугольная и с положительными элементами на главной диагонали, показывающий, что, вообще говоря, полнота (в частности, базисность) системы функций $\{v_n\}_{n=0,1,2,\ldots}$ не следует из указанных свойств матрицы D.

Лемма 2. *Существует $C > 0$ такое, что*

$$||v_n - e_n|| \leq C(n+1)^{-1}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

для каждой из задач (1)-(2).

Доказательство. Положим $t_n(x) = \frac{p}{\sqrt{2}\pi(n+1)} e_n(x)$ для задачи (1),(2а), $t_n(x) = \frac{p}{\sqrt{2}} e_n(x)$ для задачи (1),(б) (в этих двух случаях $n = 0, 1, 2, \ldots$) и $t_n(x) = \frac{p}{\sqrt{2}} e_n(x)$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, $t_0(x) = pe_0(x)$

для задачи (1),(2в). Отметим, что в силу теоремы сравнения (см. [10]) из теоремы 1(г) следует существование $C_1 > 0$ такого, что

$$|\lambda_n - \mu_n| \leq C_1 \tag{14}$$

для всех $n = 0, 1, 2, \ldots$ для каждой из трех задач (1)-(2). Поэтому и в силу теоремы 1(г) для каждой из трех задач (1)-(2) для функций $u_n(x) = y_n(x) - t_n(x)$ получаем

$$-u_n'' = W_n(x) + \mu_n u_n, \quad x \in (0, 1), \tag{15}$$

и, кроме того, в случае задач (1),(2а) и (1),(2в) в силу теоремы 1(е)

$$u_n(0) = u_n'(0) = u_n(1) = u_n'(1) = 0, \tag{16}$$

где для любой из задач (1)-(2) $W_n(x) = (\lambda_n - \mu_n) y_n(x) - f(y_n^2(x)) y_n(x)$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$– равномерно ограниченная на отрезке $[0, 1]$ последовательность непрерывных функций.

В случае задачи (1),(2а) или (1),(2в) для каждого номера n умножим равенство (15) на $2xu_n'(x)$ и проинтегрируем получающееся тождество по отрезку $[0, 1]$ с использованием интегрирования по частям. Тогда ввиду (16) и очевидного неравенства $2ab \leq a^2 + b^2$ получим

$$\mu_n ||u_n||^2 = 2 \int\limits_0^1 x W_n(x) u_n'(x) dx - \int\limits_0^1 [u_n'(x)]^2 dx \leq \int\limits_0^1 W_n^2(x) dx \tag{17}$$

$(n = 0, 1, 2, \ldots)$, откуда вытекает существование такого $C_2 > 0$, что

$$\mu_n ||u_n||^2 \leq C_2 \tag{18}$$

для всех целых $n \geq 0$. Поскольку в случае задачи (1),(2в) имеем $||t_0|| = p$, $||t_n|| = \frac{p}{\sqrt{2}}$, где $n = 1, 2, 3, \ldots$, из (18) вытекает, что $\left| \, ||y_n|| - \frac{p}{\sqrt{2}} \right| \leq C_2'(n+1)^{-1}$ для некоторого $C_2' > 0$, не зависящего от $n = 1, 2, 3, \ldots$, а отсюда и из (18) следует утверждение леммы 2 для задачи (1),(2в).

В случае задачи (1),(2а) имеем

$$||t_n|| = \frac{p}{\sqrt{2}\pi(n+1)} \quad (n = 0, 1, 2, ...), \tag{19}$$

поэтому из (18) следует существование $C_3 > 0$ такого, что

$$||y_n|| \leq C_3(n+1)^{-1} \tag{20}$$

для всех целых $n \geq 0$. Ввиду теоремы 1(г) для этой задачи (20) влечет существование $C_4 > 0$ такого, что $||W_n|| \leq C_4(n+1)^{-1}$ для всех $n = 0, 1, 2, ...$. Таким образом, в случае задачи (1),(2а) из последней оценки и (17) окончательно получаем

$$||u_n|| \leq C_5(n+1)^{-2}$$

с постоянной $C_5 > 0$, не зависящей от номера $n = 0, 1, 2, ...$. Из последней оценки вместе с (19) тем же способом, что и для задачи (1),(2в), следует утверждение леммы 2 для задачи (1),(2а).

Наконец, для задачи (1),(2б) утверждение леммы 2 доказано в работе [1]: его доказательство фактически повторяет доказательство леммы 2 в случае задачи (1),(2в), нужно лишь учесть оценку для собственных функций задачи (1),(2б)

$$|y_n'(1) - t_n'(1)| \leq C_6$$

с постоянной $C_6 > 0$, не зависящей от номера $n = 0, 1, 2, ...$ (эта оценка следует из (14), свойств функций $t_n(x)$, утверждения (д) теоремы 1 и тождеств

$$-[y_n'(x)]^2 + F(y_n^2(x)) - F(p^2) = \lambda_n y_n^2(x) - \lambda_n p^2 \quad (n = 0, 1, 2, ...),$$

которые получаются умножением уравнения (1), записанного для $y(x) = y_n(x)$, на $2y_n'(x)$ и дальнейшим интегрированием от 0 до x с учетом начальных условий $y_n(0) = p$, $y_n'(0) = 0$). Тем самым, лемма 2 доказана.

Лемма 3. *Для каждой из задач* (1)-(2) *система функций* $\{v_n\}_{n=0,1,2,...}$ *ω-линейно независима в пространстве* L_2.

Доказательство. Предположим противное: пусть

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n v_n = 0 \tag{21}$$

в пространстве L_2, где c_n– вещественные коэффициенты и $c_0 = = ... = c_{l-1} = 0$, а $c_l \neq 0$ для некоторого номера l. Умножим равенство (21) скалярно в пространстве L_2 на функцию $e_l(x)$, тогда ввиду леммы 1 $d_{l,l}c_l = 0$. Но поскольку по лемме 1 $d_{l,l} > 0$, получаем противоречие, и лемма 3 доказана.

Замечание 4. Ввиду лемм 2 и 3 из теоремы Н.К. Бари следует, что для каждой из задач (1)-(2) система функций $\{v_n\}_{n=0,1,2,...}$ есть базис Рисса в пространстве L_2 (более того, поскольку $\{e_n\}_{n=0,1,2,...}$ в каждом случае есть ортонормированный базис в пространстве L_2, в каждом случае система функций $\{v_n\}_{n=0,1,2,...}$ есть базис Бари в пространстве L_2). Однако, как указывалось во введении, далее приводится прямое доказательство этого факта, не использующее теоремы Н.К. Бари.

В дальнейшем, если противное не оговорено, все три задачи (1)-(2) рассматриваются параллельно. Возьмем произвольный номер $N \geq 0$ и обозначим через L^N замыкание в L_2 линейной оболочки функций $\{e_n\}_{n \geq N}$ и через A– линейный оператор, действующий в пространстве L_2 по правилу $Ae_n = (d_{n,n})^{-1}v_n$ $(n = 0, 1, 2, ...)$ и определенный на всевозможных конечных линейных комбинациях функций из системы $\{e_n\}_{n=0,1,2,...}$. Ввиду леммы 1 ясно, что для любого номера N подпространство L^N инвариантно для оператора A. Отметим еще, что оператор A определен на всюду плотных множествах в пространстве L_2 и в любом подпространстве L^N. Через A_N обозначим сужение оператора A на подпространство L^N $(N = 0, 1, 2, ...)$. Тогда ввиду леммы 1 $A_N = \Lambda_N + G_N$, где Λ_N– тождественный оператор в L^N и оператор G_N определен на всевозможных конечных линейных комбинациях функций из системы $\{e_n\}_{n\geq N}$, причем $G_N e_n = (d_{n,n})^{-1} \sum\limits_{k>n} d_{n,k} e_k$, так что $A_N e_n = (d_{n,n})^{-1} v_n \quad (n = N, N+1, N+2, \ldots)$. Ввиду леммы 2, неравенства $d_{n,n} > 0$ и условия $||v_n|| = 1$ (где $n = 0, 1, 2, \ldots$) существует $\overline{d} \in (0,1)$ такое, что

$$\overline{d} \leq d_{n,n} \leq 1 \tag{22}$$

для всех целых $n \geq 0$. Положим еще формально $||G_N|| = \sup\limits_{g=\sum_{n=N}^{M} c_n e_n,\ ||g||=1} ||G_N g||$, где точная верхняя грань берется по всевозможным номерам $M = N, N+1, N+2, \ldots$ и по всевозможным вещественным коэффициентам c_n.

Лемма 4. *Для каждой из трех задач* (1)-(2) $||G_N|| < \infty$ *для всех номеров* $N \geq 0$ *и* $\lim\limits_{N\to\infty} ||G_N|| = 0$.

Доказательство. Пусть $g = \sum\limits_{n=N}^{\infty} c_n e_n$, где среди вещественных коэффициентов c_n лишь конечное число отлично от нуля и $||g|| = 1$. Из леммы 2 и (22) вытекает, что $\sum\limits_{\substack{n,k=0\\ n\neq k}}^{\infty} (d_{n,n})^{-2} d_{n,k}^2 < \infty$. Поэтому

$$||G_N g||^2 = \sum_{k=N+1}^{\infty} \left[\sum_{n=N}^{k-1} c_n (d_{n,n})^{-1} d_{n,k} \right]^2 \leq$$

$$\leq \sum_{k=N+1}^{\infty} \left[\sum_{n=N}^{k-1} c_n^2 \right] \times \left[\sum_{n=N}^{k-1} (d_{n,n})^{-2} d_{n,k}^2 \right] \leq$$

$$\leq ||g||^2 \sum_{\substack{n,k=N\\ n\neq k}}^{\infty} (d_{n,n})^{-2} d_{n,k}^2 \to 0 \quad \text{при} \quad N \to \infty,$$

и лемма 4 доказана.

Фиксируем номер $N > 0$ так, что $||G_N|| < \frac{1}{2}$ (такой номер N существует ввиду леммы 4). Тогда, как хорошо известно (см. [11]), оператор G_N (а вместе с ним и A_N) однозначно продолжается на все подпространство L^N, причем для этого продолжения, которое опять обозначим через G_N, выполнено $||G_N||_{\mathcal{L}(L^N;L^N)} < \frac{1}{2}$. Ввиду последнего обстоятельства линейный оператор $\Lambda_n + G_N$ (где $G_N \in \mathcal{L}(L^N; L^N)$), который опять обозначим через A_N, принадлежит $\mathcal{L}(L^N; L^N)$ и имеет ограниченный обратный:

$$A_N^{-1} = \Lambda_N + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m (G_N)^m$$

(доказательство см. в [11]).

Следующая лемма фактически доказана в [8,9]; однако, поскольку ее доказательство просто и коротко, оно приводится в настоящей статье.

Лемма 5. *В случае каждой из трех задач* (1)-(2) *для фиксированного выше номера номера* N *система функций* $\{v_n\}_{n\geq N}$ *есть базис Рисса в* L^N.

Доказательство. Очевидно, система функций $\{e_n\}_{n\geq N}$ есть ортонормированный базис в L^N. Возьмем произвольную функцию $u \in L^N$ и пусть $v = A_N^{-1} u = \sum\limits_{n=N}^{\infty} c_n e_n$ в пространстве L^N, где c_n– вещественные коэффициенты. Имеем $u = A_N v = \sum\limits_{n=N}^{\infty} c_n A_N e_n = \sum\limits_{n=N}^{\infty} c_n (d_{n,n})^{-1} v_n$, где все ряды сходятся в L^N. Поэтому и ввиду леммы 3 система функций $\{v_n\}_{n\geq N}$ есть базис в пространстве L^N. Далее, в тех же обозначениях, поскольку ряд $\sum\limits_{n=N}^{\infty} c_n e_n$ сходится в пространстве L^N, то $\sum\limits_{n=N}^{\infty} c_n^2 < \infty$. Поэтому если $\sum\limits_{n=N}^{\infty} c_n^2 < \infty$, то ряд $\sum\limits_{n=N}^{\infty} c_n (d_{n,n})^{-1} v_n$ сходится в пространстве L^N. Наоборот, пусть ряд $\sum\limits_{n=N}^{\infty} c_n v_n$ сходится в пространстве L^N. Тогда $A_N^{-1} \sum\limits_{n=N}^{\infty} c_n v_n = \sum\limits_{n=N}^{\infty} c_n A_N^{-1} v_n = \sum\limits_{n=N}^{\infty} c_n d_{n,n} e_n$ в пространстве L^N, поэтому $\sum\limits_{n=N}^{\infty} c_n^2 d_{n,n}^2 < \infty$. Таким образом, ввиду оценок (22) лемма 5 доказана.

Лемма 6. *Для каждой из трех задач* (1)-(2) *система функций* $\{v_n\}_{n=0,1,2,...}$ *есть базис Рисса в пространстве* L_2.

Доказательство. Пусть $N > 0$– ранее фиксированный номер и $L_\perp^N$– конечномерное подпространство в L_2, натянутое на функции $e_0, ..., e_{N-1}$, а P_N– ортогональный проектор в пространстве L_2 на подпространство $L_\perp^N$. Положим $w_n = P_N v_n$, $n = \overline{0, N-1}$, тогда

$$w_n = v_n - \sum_{k=N}^{\infty} d_{n,k} e_k, \quad n = \overline{0, N-1}. \tag{23}$$

Далее, размерность подпространства $L_\perp^N$, очевидно, равна N и, ввиду разложений функций v_n из леммы 1, система функций $\{w_n\}_{n=\overline{0,N-1}}$ линейно независима в L_2, поэтому она является базисом в $L_\perp^N$. Следовательно, ввиду леммы 5 система функций $\{w_n\}_{n=\overline{0,N-1}} \cup \{v_n\}_{n \geq N}$ является базисом в пространстве L_2.

Возьмем произвольную функцию $u \in L_2$. Тогда

$$u = \sum_{n=0}^{N-1} c_n w_n + \sum_{n=N}^{\infty} c_n v_n \tag{24}$$

в пространстве L_2, где c_n– некоторые вещественные коэффициенты. Подставим выражения для функций w_n из (23) в (24), получим

$$u = \sum_{n=0}^{N-1} c_n v_n + \sum_{n=N}^{\infty} \left(c_n - \sum_{m=0}^{N-1} c_m d_{m,n} \right) e_n$$

в пространстве L_2 и, следовательно, ввиду леммы 3 система функций $\{v_n\}_{n=0,1,2,...}$ является базисом пространства L_2. Наконец, то, что эта система является базисом Рисса пространства L_2, следует из леммы 5, и лемма 6 доказана.

Поскольку для задачи (1),(2в) из оценки (18) и идущих сразу вслед за ней аргументов вытекает существование постоянных $0 < c < C$ таких, что $c \leq ||y_n|| \leq C$ для всех $n = 0, 1, 2, ...$, а для задачи (1),(2б) доказательство подобного утверждения аналогично (см. [1] либо доказательство леммы 2), утверждение теоремы 2 вытекает из леммы 6, т. е. теорема 2 доказана.

Список литературы

1. Жидков П.Е. О базисности Рисса системы собственных функций нелинейной задачи типа Штурма – Лиувилля// Направлено в "Матем. сборник".

2. Махмудов А.П. Основы нелинейного спектрального анализа. Баку: Изд-во Азербайджанского гос. ун-та им. С.М. Кирова, 1984.

3. Жидков П.Е. О полноте систем собственных функций оператора Штурма – Лиувилля с потенциалом, зависящим от спектрального параметра, и некоторой нелинейной задачи// Матем. сборник. 1997. Т. **188**. No 7. С. 123-138.

4. Zhidkov P.E. On the completeness of the system of normalized eigenfunctions of a nonlinear Schrödinger-type operator on a segment// Int. J. Modern Phys. **A**. 1997. V. **12**. No 1. P. 295-298.

5. Zhidkov P.E. Eigenfunction expansions associated with a nonlinear Schrödinger equation// Communications of the Joint Institute for Nuclear Research. E5-98-61. Dubna. 1998.

6. Zhidkov P.E. On the property of being a basis for a denumerable set of solutions of a nonlinear Schrödinger-type boundary-value problem// Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. E5-98-109. Dubna. 1998.

7. Бари Н.К. О базисах в гильбертовом пространстве// Доклады АН СССР. 1946. Т. **54**. No 5. С. 383-386.

8. Бари Н.К. Биортогональные системы и базисы в гильбертовом пространстве// Ученые записки МГУ. 1951. Т. **148**. Математика. Вып. 4. С. 69-107.

9. Гохберг И.Ц., Крейн М.Г. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов. М.: Наука, 1965.

10. Левитан Б.М., Саргсян И.С. Операторы Штурма – Лиувилля и Дирака. М.: Наука, 1988.

11. Люстерник Л.А., Соболев В.И. Элементы функционального анализа. М.: Наука, 1965.

Рукопись поступила в издательский отдел
21 сентября 1998 года.

Жидков П.Е.

P5-98-261

О базисности систем собственных функций
некоторых нелинейных задач типа Штурма–Лиувилля

Рассматривается нелинейное уравнение $-y''+f(y^2)y=\lambda y$, $y=y(x)$, $x\in(0,1)$, где f — заданная вещественная функция, а $y(x)$ — неизвестная (также вещественная) собственная функция и $\lambda\in R$ — спектральный параметр, при граничных условиях трех видов: $y(0)=y(1)=0$, $y'(0)=p$ (I); $y'(0)=y(1)=0$, $y(0)=p$ (II); $y'(0)=y'(1)=0$, $y(0)=p$ (III). Здесь $p>0$ — произвольная постоянная, фиксированная на протяжении всей работы. При некоторых предположениях о функции f для каждой из этих трех задач установлены существование и единственность последовательностей собственных значений $\{\lambda_n\}_{n=0,1,2,...}$ и соответствующих собственных функций $\{y_n\}_{n=0,1,2,...}$ таких, что для любого номера n функция $y_n(x)$ имеет ровно n корней в интервале (0,1), и доказано, что в случае граничных условий второго либо третьего вида последовательность функций $\{y_n\}_{n=0,1,2,...}$ является базисом Рисса, а в случае первых граничных условий последовательность $\{y_n\}_{n=0,1,2,...}$ является базисом, а последовательность $\{\|y_n\|^{-1}_{L_2(0,1)}y_n\}_{n=0,1,2,...}$ — базисом Рисса в пространстве $L_2(0,1)$.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики им. Н.Н.Боголюбова ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна, 1998

Перевод автора

Zhidkov P.E.

P5-98-261

On the Property of Being a Basis for Systems of Eigenfunctions
of Some Nonlinear Sturm–Liouville-Type Problems

We consider the nonlinear equation $-y''+f(y^2)y=\lambda y$, $y=y(x)$, $x\in(0,1)$ where f is a given real function, $y(x)$ is an unknown (real, too) eigenfunction and $\lambda\in R$ is the spectral parameter under boundary conditions of the following three kinds: $y(0)=y(1)=0$, $y'(0)=p$ (I); $y'(0)=y(1)=0$, $y(0)=p$ (II); $y'(0)=y'(1)=0$, $y(0)=p$ (III). Here $p>0$ is an arbitrary constant fixed throughout the paper. Under some assumptions on the function f for each of these three problems we show the existence and uniqueness of eigenvalues $\{\lambda_n\}_{n=0,1,2,...}$ and corresponding eigenfunctions $\{y_n\}_{n=0,1,2,...}$, such that for any number n the function $y_n(x)$ has precisely n roots in the interval (0,1), and prove that in the case of boundary conditions of the second or third kind the sequence of functions $\{y_n\}_{n=0,1,2,...}$ is a Riesz basis and that in the case of the first boundary conditions the sequence $\{y_n\}_{n=0,1,2,...}$ is a basis and the sequence $\{\|y_n\|^{-1}_{L_2(0,1)}y_n\}_{n=0,1,2,...}$ is a Riesz basis in the space $L_2(0,1)$.

The investigation has been performed at the Bogoliubov Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna, 1998