ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р5-97-339

В.С.Рихвицкий

ПРИМЕР АВТОНОМНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С ОСОБЕННОСТЬЮ ТИПА ЦЕНТР

1997

Рихвицкий В.С.
Р5-97-339

Пример автономной динамической системы
с особенностью типа центр

Приведен простой пример автономной динамической системы с особенностью типа центр, в окрестности которой нет замкнутых интегральных кривых. Уравнения в полярных координатах имеют вид

$$\dot{r} = -kr^3, \qquad \dot{\varphi} = -1. \tag{1}$$

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна, 1997

Richvitsky V.S.
P5-97-339

The Example of Autonomous Dynamical System
which Critical Point Is a Center

The example of automonous dynamical system which critical point is a center has been considered. Each its neighbourhood has no closed integral curves around it. The equations are

$$\dot{r} = -kr^3, \qquad \dot{\varphi} = -1. \tag{1}$$

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna, 1997

Как показал еще А. Пуанкаре, поведение фазовых кривых в окрестности положения равновесия

$$\begin{aligned} P(x_0, y_0) &= 0 \\ Q(x_0, y_0) &= 0 \end{aligned} \tag{1}$$

на фазовой плоскости в системе общего положения

$$\begin{aligned} \dot{x} &= P(x, y) \\ \dot{y} &= Q(x, y) \end{aligned} \tag{2}$$

исчерпывается особенностями типа фокус (сходящийся или расходящийся), узел (сходящийся или расходящийся) и седло. Все более сложные случаи превращаются в указанные при общем малом изменении системы.

Особенности типа центр не входят в это перечисление. Центр обычно отличается наличием замкнутых концентрических кривых вокруг него. То, что это не обязательно, показывает приведенный в этой работе пример.

Тип особой точки определяется методом линеаризации системы (2) в окрестности точки (1)

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \frac{D(P,Q)}{D(x,y)} \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} P(x_0, y_0) \\ Q(x_0, y_0) \end{pmatrix} \tag{3}$$

и вычислением корней характеристического полинома p_{12}

$$det\left(\frac{D(P,Q)}{D(x,y)} - pE\right) = 0 \tag{4}$$

при $x = x_0$, $y = y_0$.

Перечисленные выше особенности кроме центра соответствуют случаям

$$Re(p) \neq 0$$

В силу знакоопределенности корней и непрерывности правых частей (2) поведение фазовых кривых в точках малой окрестности (0,0) не может изменить поведение линеаризованной системы (3), а значит и системы (2). Это не так, если какой-либо корень или его вещественная часть равны 0.

Рассмотрим систему (при k = 0 это известный гармонический осциллятор):

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y - kx(x^2 + y^2) \\ \dot{y} &= -x - ky(x^2 + y^2) \end{aligned} \tag{5}$$

Точка (0,0) - особая.

$$det\left(\frac{D(P,Q)}{D(x,y)} - pE\right) = det\begin{pmatrix} -3kx-p & 1-2kxy \\ -1-2kxy & -3ky-p \end{pmatrix} = \tag{6}$$
$$= det\begin{pmatrix} -p & 1 \\ -1 & -p \end{pmatrix} = p^2+1=0$$

Корни - чисто мнимые, поэтому тип точки (0,0) - центр. Преобразуем координаты в полярные

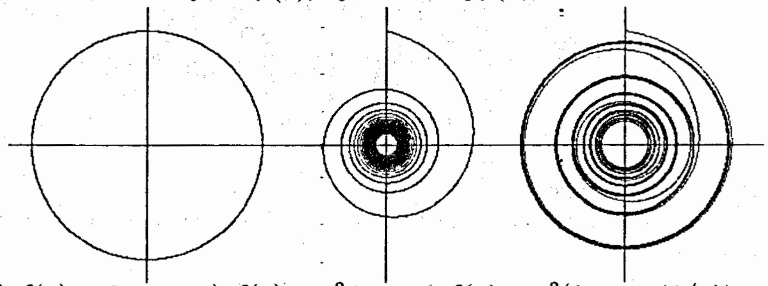
$$r^2 = x^2+y^2,\ tg(\varphi) = y/x \tag{7}$$
$$\begin{pmatrix}\dot r\\ \dot\varphi\end{pmatrix} = \frac{D(r,\varphi)}{D(x,y)}\begin{pmatrix}\dot x\\ \dot y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-kr^3\\ -1\end{pmatrix}$$

Очевидно, что при $k>0$ вокруг точки (0,0) навивается сжимающаяся спираль, которая ближе к (0,0) все более походит на окружность, т.е. сжимается очень медленно.

Таким образом, хотя тип точки (0,0) - центр, ни в какой произвольно малой ее окрестности нет замкнутых кривых или, другими словами, единственная замкнутая траектория вокруг нее имеет радиус 0.

Автор выражает благодарность Гальперину А.Г. за стимулирующий интерес и совет напечатать эту статью.

$$\dot x = y - xf(r),\quad \dot y = -x - yf(r)$$



а) $f(r)=0$ б) $f(r)=r^2$ в) $f(r)=r^2(1-cos(1/r))$

Рис1. Интегральная кривая а) гармонического осциллятора, принадлежащая семейству вложенных циклов, б) системы (5), констатирующая отсутствие предельных циклов, в) демонстрирующая бесконечную систему предельных циклов.

Список литературы

1. Арнольд В.И. Теория катастроф. М.: Изд-во МГУ, 1983.

2. Г. Корн и Т. Корн. Справочник по математике. М.: Наука, 1970.

Рукопись поступила в издательский отдел
6 ноября 1997 года.