ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р5-97-330

М.А.Назаренко

ПОЛНОЕ РЕШЕНИЕ ПРОБЛЕМЫ БРАЕССА В ПРОСТРАНСТВЕ ХАРДИ $\mathcal{H}_2$

Направлено в журнал «Фундаментальная и прикладная математика»

1997

Назаренко М.А. Р5-97-330

Полное решение проблемы Браесса в пространстве Харди $\mathcal{H}_2$

В 1976 году Браесс (D.Braess) поставил следующую задачу теории рациональных $\mathcal{L}_2$-аппроксимаций: можно ли построить функцию, которая будет иметь по крайней мере 3 различные наилучшие аппроксимации (но не 3 локально наилучшие аппроксимации)? В случае пространства Харди $\mathcal{H}_2$, $\mathcal{D} = \{|z| < 1\}$, аналитических в $\mathcal{D}$ функций с нормой типа $\mathcal{L}_2$ на границе для любых целых неотрицательных k и $n \geq 2$ доказано существование $f \in \mathcal{H}_2$, имеющих ровно n различных рациональных функций наилучшего приближения степени $(k,1)$.

Работа выполнена в Лаборатории ядерных проблем ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна, 1997

Перевод автора

Nazarenko M.A. P5-97-330

On the Complete Solution of Braess Problem in Hardy Space $\mathcal{H}_2$

At 1976 D.Braess formulated the following problem in the theory of rational $\mathcal{L}_2$-approximation: is it possible to exhibit a function which has at least 3 best approximations (not only with 3 local best approximations)? In the case of Hardy space $\mathcal{H}_2$, $\mathcal{D} = \{|z| < 1\}$, consisting of analytic in $\mathcal{D}$ functions, with the norm of $\mathcal{L}_2$-type on the boundary, for any nonnegative integer k and $n \geq 2$ the existence of $f \in \mathcal{H}_2$, which have n and only n different rational functions of the best approach of $(k,1)$ degree, is proved.

The investigation has been performed at the Laboratory of Nuclear Problems, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna, 1997

Банахово пространство Харди $\mathcal{H}_2$ образовано аналитическими в единичном круге $\mathcal{D} = \{z : |z| < 1\}$ функциями, имеющими почти всюду на границе $\partial\mathcal{D} = \{z\colon\ |z| = 1\}$ пределы по некасательным путям, и с конечной нормой $\|\cdot\|$, порожденной скалярным произведением

$$(f, h) = \frac{1}{2\pi}\int_{\partial\mathcal{D}} f(z)\cdot\overline{h(z)}\cdot|dz| = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\mathcal{D}} \frac{f(z)\cdot\overline{h(z)}}{z}dz.$$

Известно, что полиномы z^j при целых неотрицательных j образуют ортонормированный базис в пространстве $\mathcal{H}_2$, и для каждого элемента $f \in \mathcal{H}_2$ выполнено равенство

$$\|f\|^2 = \sum_{j=0}^{\infty} |\eta_j|^2,$$

где $\eta_j = (f, z^j) = \frac{f^{(j)}(0)}{j!}$ — коэффициенты степенного ряда

$$f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \eta_j\, z^j, \qquad z \in \mathcal{D}.$$

Для любого целого неотрицательного числа k полагаем

$$\mathbf{P}_k = \left\{c_0 + c_1 z + \ldots + c_k z^k\colon\ c_0, c_1, \ldots, c_k \in \mathbb{C}\right\}.$$

Основным результатом этой работы является следующая

Теорема. *Для любых целых неотрицательных k и $n \geq 2$ существует $f \in \mathcal{H}_2$, имеющая ровно n различных рациональных функций наилучшего приближения степени $(k, 1)$.*

Данное утверждение является полным решением одной проблемы теории рациональных $\mathcal{L}_2$–аппроксимаций, поставленной в 1976 году Браессом [1, Problem 3.2], которая звучит следующим образом: можно ли построить такую функцию, чтобы она имела по крайней мере 3 различные рациональные функции наилучшего приближения какой–нибудь степени? Решение проблемы Браесса было предложено Диэнером в работе [2, Theorem 3.3] в случае пространства $\mathcal{L}_2[-1, 1]$. Браессом [3] было доказано существование $f \in \mathcal{L}_p[-1, 1]$, $1 < p < \infty$, имеющих четыре различных рациональных аппроксиманта степени (n, m). В пространстве Харди $\mathcal{H}_2$ оказалось возможным указать явную конструкцию функции, полностью решающей эту проблему, а для случая $n = 4$ и конструктивно решить эту проблему [4, 5].

Опишем вкратце более или менее известные факты о рациональных аппроксимациях в метрике типа $\mathcal{L}_2$. Во–первых, рациональная функция наилучшего приближения в $\mathcal{H}_2$, разумеется, существует [6].

Во–вторых, вообще говоря, рациональная функция наилучшего приближения любой степени в метриках типа $\mathcal{L}_p$ неединственна [7]. Разными авторами строились примеры функций с двумя различными наилучшими рациональными аппроксимантами [8, 9, 10, 11], используя свойства симметрии [12, 13], отдельно отметим результат [14]; и с бесконечным числом наилучших рациональных аппроксимантов [15, 16].

В–третьих, задача нахождения рациональной функции наилучшего приближения является нормальной в пространствах с метрикой типа $\mathcal{L}_p$ как по линейной мере, так и по площади (при, возможно, некоторых ограничениях): если приближаемая функция не является рациональной степени (n, m), где n и m — натуральные числа, то наилучшее (даже локально наилучшее) рациональное приближение не может осуществляться рациональной функцией степени $(n-1, m-1)$, что в разные годы для разных пространств доказывалось в работах [13, 14, 16, 17, 18, 19, 20].

И, наконец, свойство неединственности наилучшего рационального аппроксиманта является исключительным, то есть те функции, наилучшее рациональное приближение которых осуществляется только одной рациональной функцией, образуют в исходном пространстве открытое всюду плотное множество [21]. В случае вещественного "внешнего" пространства Харди $\mathcal{H}_{2,\mathbf{R}}(\{|z| > 1\})$, приведен класс функций, имеющих каждый раз единственную рациональную функцию наилучшего приближения при совпадении степени числителя и знаменателя [22].

Доказательство теоремы. Для выбранного целого неотрицательного числа k рассмотрим функцию

$$f(z) = z^{k+1} + \frac{z^{k+n+1}}{(n+2)^2}. \tag{1}$$

Функция уклонения Ω_k [16] для выбранной аппроксимируемой f имеет следующий вид:

$$\Omega_k(c) = \inf_{P \in \mathbf{P}_k} \left\| f(z) - \frac{P(z)}{1 - \bar{c}\, z} \right\| =$$

$$= 1 + \frac{1}{(n+2)^4} - \left(1 - |c|^2\right) |c|^2 \left| 1 + \frac{c^n}{(n+2)^2} \right|^2,$$

а условие на точки $c = \tau \exp(i\varphi)$, которые могут быть полюсами рациональной функции наилучшего приближения [16, Теорема 4], примет форму

$$\left[-1 + 2\tau^2\right] + \frac{1}{(n+2)^2} \tau^n \exp\left(n\, i\, \varphi\right) \left[-(n+1) + (n+2)\tau^2\right] = 0.$$

Таким образом

$$\frac{1}{(n+2)^2} \tau^n \exp\left(i\, n\, \varphi\right) = -\frac{2\tau^2 - 1}{(n+2)\tau^2 - n - 1},$$

что дает вещественность числа $\exp(i\, n\, \varphi)$, а требование достижения минимума функции уклонения

$$\Omega_k\Big(\tau \exp\left(i\,\varphi\right)\Big) = 2 - (1 - \tau^2)\tau^2 \left| 1 + \frac{1}{(n+2)^2} \tau^n \exp\left(i\, n\, \varphi\right) \right|^2$$

в этой точке определяет знак, то есть

$$\exp\left(i\, n\, \varphi\right) = 1, \qquad \varphi = \frac{2\pi m}{n}, \quad m = 1, \ldots, n. \tag{2}$$

Следовательно, существует ровно n направлений, определяемые аргументом комплексного числа c, на которых только и могут лежать точки c, порождающие рациональные функции наилучшего приближения.

Положим $x = \tau^2 \in (0, 1)$ и рассмотрим следующую вспомогательную функцию:

$$g(\tau^2) = g(x) = [-1 + 2x] + \frac{x^{n/2}}{(n+2)^2}\Big[-(n+1) + (n+2)\,x\Big].$$

Для доказательства утверждения теоремы теперь достаточно показать, что функция g имеет ровно один корень при $x \in (0, 1)$.

Рассмотрим производную

$$2\,g'(x) = 4 + \frac{x^{(n-2)/2}}{(n+2)^2}\Big[-(n+1)n + (n+2)^2\,x\Big].$$

Так как

$$g(0) = -1 < 0, \quad g(1) = 1 + \frac{1}{(n+2)^2} > 0,$$

теперь для доказательства теоремы достаточно проверить строгую положительность производной $g'(x)$ при $x \in (0, 1)$, что очевидно. Теорема полностью доказана.

В заключение хочу выразить свою благодарность профессору В. Г. Зинову и доценту Н. С. Вячеславову за дружеские и стимулирующие дискуссии.

Литература

[1] Braess D., On rational $\mathcal{L}_2$–approximation // J. Approxim. Theory. 1976. V. **18**(2). P. 136–151.

[2] Diener I., On nonuniqueness in nonlinear $\mathcal{L}_p$–approximation // J. Approxim. Theory. 1987. V. **51**(1). P. 54–67.

[3] Braess D., On nonuniqueness in rational $\mathcal{L}_p$–approximation // J. Approxim. Theory. 1987. V. **51**(1). P. 68–70.

[4] Назаренко М. А., О функциях из пространства Харди $\mathcal{H}_2$, имеющих несколько различных рациональных функций наилучшего приближения // Препринт ОИЯИ, Р5-95-507, Дубна, 1995.

[5] Назаренко М. А., О конструктивном решении проблемы Браесса // Современные проблемы теории функций и их приложения. Тезисы докладов 8-ой Саратовской зимней школы. 30 января — 6 февраля 1996 года. Издательство Саратовского университета, 1996.

[6] Уолш Дж., *Интерполяция и аппроксимация рациональными функциями в комплексной области.* М.: ИЛ, 1961.

[7] Ефимов Н. В. и Стечкин С. Б., Аппроксимативная компактность и чебышевские множества // Докл. АН СССР 1961. **140**. 522–524.

[8] Speiss J., Eindeutigleitssätze bei der nichtlinearen Approximation in strikt–konvexen Räumen. Dissertation, Hamburg, 1969.

[9] Lamprecht G., Zur Mehrdeutigkeit bei der Approximation in der L_p–Norm mit Hilfe rationaler Functionen // Computing 1970. **5**. 349–355.

[10] Dunham C. B., Best mean rational approximation // Computing 1972. **9**. 87–93

[11] Akhlaghi M. and Wolfe J. M., Functions with many best L_2–approximations // J. Approximation Theory 1981. **33**. 111–118.

[12] Meinardus G., Invariantz bei linearen Approximationen // Arch. Rational Mech. Anal. 1963. **14**. 301–303.

[13] Ruckebush G., Sur l'approximation rationalle des filtres // Rapport No. 35, C. M. A. Ecole Polytechnique, 1978.

[14] CHENEY E. W. and GOLDSTEIN A. A., Mean–square approximation by generalized rational functions // Math. Z. 1967. **95**. 232–241.

[15] DELLA DORA J., *Contribution à l'approximation de fonctions de la variable complexe au sens de Hermite–Padé et de Hardy.* Thèse d'état Université Scientifique et Médicale de Grenoble, 1980.

[16] НАЗАРЕНКО М. А., Некоторые свойства рациональных аппроксимаций степени $(k, 1)$ в пространстве Харди $\mathcal{H}_2$ // Препринт ОИЯИ, Р5-94-292, Дубна, 1994.

[17] ЛЕВИН А. Л., Приближение рациональными функциями в комплексной плоскости // Матем. заметки 1971. **9**. 121–130.

[18] МАХМУДОВ Х. М., О наилучших рациональных приближениях функций комплексного переменного, суммируемых по площади // Матем. заметки 1989. **45**. 89–94.

[19] ВЯЧЕСЛАВОВ Н. С. и РАМАЗАНОВ А. К., О степени рациональных функций наилучшего приближения в $L_p(\mathbf{R}^m)$ // Матем. заметки 1993. **53**. 37–45.

[20] ВЯЧЕСЛАВОВ Н. С. и РАМАЗАНОВ А. К., Интерполяционные свойства рациональных функций наилучшего приближения в среднем квадратическом на окружности и в круге // Матем. заметки 1995. **57**. 228–239.

[21] WOLFE J. M., On the unicity of nonlinear approximation in smooth spaces // J. Approximation Theory 1974. **12**. 165–181.

[22] BARATCHART L. and WIELONSKY F., Rational approximation in the real Hardy space $\mathcal{H}_2$ and Stieltjes integrals: A uniqueness theorem // Constr. Approximation 1993. **9**. 1–21.

Рукопись поступила в издательский отдел
31 октября 1997 года.