



СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

P5-97-255

Н.Ф.Жихалкина¹, И.В.Кисель, М.А.Назаренко,
Р.Т.Файзуллин¹

ГРАВИТАЦИОННЫЙ МЕТОД
БЕЗУСЛОВНОЙ ГЛОБАЛЬНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

¹Омский государственный университет

1997

Введение

Обзор применения наиболее распространенных методов оптимизации (метод Ньютона, метод секущих и т. д.) содержится, например, в книге [1]. Эти методы в основном ориентированы на поиск локального минимума, что определяет зависимость результата от начального приближения. Оптимальным является такой выбор начального приближения, при котором глобальный минимум находится в области действия используемого метода. Однако это возможно далеко не всегда. Поэтому для повышения уверенности в результате зачастую необходимо применение дополнительных методов, позволяющих "вытаскивать" точку состояния алгоритма из локальных минимумов. Платой за что обычно является кардинальное усложнение структуры алгоритма и снижение устойчивости его работы. При решении практических задач размерность пространства, в котором задана целевая функция, обычно бывает настолько велика, что выбор начального приближения, достаточно близкого к оптимуму, представляет собой самостоятельную сложную задачу.

В данной работе предлагается новый метод поиска глобального минимума, который мы назвали гравитационным. Он не требует начального приближения и не зависит от направления градиента и локальных особенностей целевой функции. Приводятся и обсуждаются результаты применения метода к задаче геометрической реконструкции событий в экспериментах физики высоких энергий, а также результаты, полученные на специальных тестовых функциях: расширенная функция Розенброка, расширенная обобщенная функция Пауэлла, функция типа спиралевидного желоба, функция Вуда и дипольные решетки.

1. Задача геометрической реконструкции событий в эксперименте NEMO

Рассмотрим гравитационный метод на примере решения задачи поиска глобального минимума, возникшей при обработке данных эксперимента NEMO [2, 3] по изучению $\beta\beta 2\nu$ и $\beta\beta 0\nu$ -распадов ^{100}Mo и других ядер для определения эффективной массы майорановского нейтрино ниже 0.1 эВ.

Трековая часть детектора (рис. 1) состоит из октагональных гейгеровских ячеек, каждая из которых имеет центральную сигнальную проводочку, окруженную 8 заземленными проводочками. Ячейки имеют размер 32 мм в диаметре и 2.7 м в длину. Октагональные ячейки немного деформированы, чтобы образовать цилиндрическую геометрию, и формируют последовательность 4-2-3 слоев. Информация с ячейки позволяет определить расстояние, на котором пролетела частица от центральной проводоч-

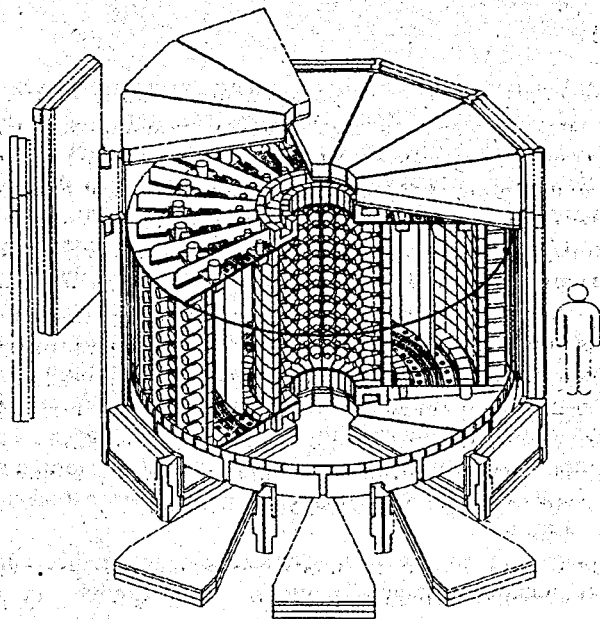


Рис. 1. Общий вид установки NEMO-3

ки, и координату вдоль проволоочки. Ожидаемое разрешение координатных измерений $\sigma_T \approx 0.5$ мм поперек проволоочки и $\sigma_L \approx 5$ мм вдоль проволоочки.

Особенностью эксперимента, существенной при геометрической реконструкции событий, является наличие низкоэнергичных электронов, так что приходится учитывать эффекты многократного рассеяния в газе и даже неупругое взаимодействие с проволоочками.

Задача глобальной оптимизации возникает при поиске следов (треков) заряженных частиц в детекторе. Рассмотрим простейшую ситуацию, когда нет магнитного поля, нет шумового срабатывания проволоочек и нет пропусков в камерах. В этом случае разумно определить трек частицы с многократным рассеянием как наиболее гладкую линию, касающуюся всех окружностей вокруг сработавших проволоочек (т.к. мы знаем только расстояние до проволоочки) и пересекающую все слои детектора (см. рис. 2). Гладкостью линии в данном случае называется сумма величин меньших углов между прямыми, содержащими образующие эту линию соседние прямолинейные отрезки.

Очевидно, что наше требование отсутствия шумовых срабатываний проволоочек мало упрощает ситуацию вследствие лево-правой неопределен-

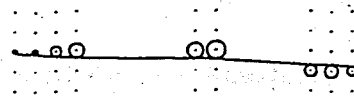


Рис. 2. Пример трека с многократным рассеянием



Рис. 3. Поиск глобального минимума стандартным методом (a) и гравитационным методом (b)

ности дрейфовых ячеек. Зная примерно направление трека, мы не знаем с какой стороны проволоочки (левой или правой) он прошел. Таким образом, имеются две возможные точки касания каждой окружности, одна из которых ложная, что в результате приводит к 100% геометрическому шуму! В этом случае задача сводится к минимизации функции, имеющей много локальных минимумов. Обычно стандартные методы минимизации [5] стартуют с точки на поверхности функции и тем или иным способом минимизируют функцию в локальной области вокруг этой точки на каждом шаге итерационной процедуры. Такая процедура имеет большую вероятность закончиться в локальном минимуме. Существуют методы, позволяющие "вытаскивать" точку состояния алгоритма из локальных минимумов, платой за что обычно является кардинальное усложнение структуры алгоритма и снижение устойчивости его работы.

В соответствии с работой [4] рассмотрим несколько иной подход к поставленной проблеме. Пусть дана одномерная функция $F(x)$, имеющая один глобальный и несколько локальных минимумов внутри фиксированного отрезка. Предлагается, используя стандартные градиентные методы, стартовать одновременно из двух точек на противоположных участках границы. Таким образом, рассматривается две "частицы", которые движутся по градиенту функции $F(x)$. В случае попадания в локальные минимумы, между "частицами" возникают силы взаимного притяжения, позволяющие преодолеть потенциальный барьер и продолжить движение в направлении градиента (рис. 3). Сила такого двухчастичного взаимодействия зависит от номера итерации и увеличивается от шага к шагу. Критерием останова является совпадение координат данных "частиц" с определенной точностью — условие глобального минимума. Этот алгоритм базируется на классической задаче математического анализа, известной как "теорема о двух милиционерах". Более подробно математические аспекты предлагае-

мого метода рассмотрены в приложении С.

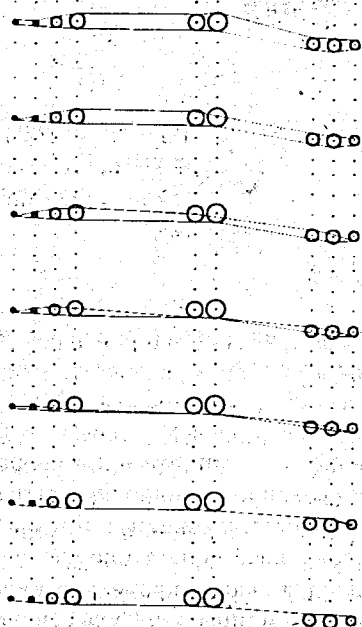


Рис. 4. Пример поиска трека с использованием гравитационного метода

Рисунок 4 демонстрирует итерационную процедуру поиска трека электрона с использованием гравитационного метода. Развитие итерационного процесса на рисунке идет сверху вниз. Начало итераций представлено на верхнем рисунке. Здесь роль “частиц” играют две линии, первоначально касающиеся окружностей сверху и снизу. Ясно, что это граничные положения, и реальный след электрона находится между ними. В процессе итераций идет сглаживание этих линий и притяжение их к краям окружностей, что является стремлением выполнить физические условия и может рассматриваться как градиентный спуск. Использование гравитационного метода (притяжение между линиями) позволяет избежать локальных минимумов и повышает эффективность поиска трека близко к 100% для многократных рассеянных треков, в то время как использование только стандартных методов дает эффективность 92–96% даже в более простых случаях прямолинейных треков. В среднем требуется 10–15 итераций для достижения глобального минимума. Аналогичные примеры поиска треков представлены также на <http://nuweb.jinr.dubna.su/LNP/NEMO/nemooiiiN.html> с ис-

пользованием языка программирования Java.

2. Гравитационный алгоритм в k -мерном пространстве

Задача безусловной оптимизации в k -мерном евклидовом пространстве R^k формулируется следующим образом:

Дано: $F : R^k \rightarrow R$

Найти: $\vec{r}^* \in R^k : F(\vec{r}^*) \leq F(\vec{r}), \forall \vec{r} \in R^k$.

Очевидно, что даже на плоскости явно не достаточно двух “частиц” для поиска глобального экстремума. Следует отметить, что функция может иметь в качестве экстремального множества желоба и т.п., что иногда также представляет интерес.

Перейдем к задаче максимизации и попытаемся снизить требование на гладкость целевой функции. Для этого используем физические аналогии, вводя силы взаимодействия между “частицами” обратно пропорционально расстоянию между ними. В основе предлагаемого метода лежат гравитационный (приложение А) и генетический (приложение В) алгоритмы. Пусть N — количество материальных “частиц” (глобул), равномерно распределенных внутри связанной замкнутой области (тора) и взаимодействующих с силой обратно пропорциональной квадрату расстояния (в нашем случае это гравитационные силы). Масса частицы зависит от ее координат и равна значению целевой функции в этой точке, т.е. масса i -й глобулы $m_i = F(\vec{r}_i)$.

Рассматривается модель гравитационного взаимодействия частиц без столкновений. Материальные точки под действием гравитационных сил стягиваются к центру масс системы, т.е. к тем подобластям, где значение функции максимально. Кроме того, по аналогии с генетическими алгоритмами [6], в которых выделяются гены с желательными мутациями, на каждом шаге по времени фиксируется положение определенного числа наиболее “тяжелых” глобул, что приводит к перемещению лишь тех глобул, масса которых сравнительно мала. В зависимости от целевой функции и от расположения оптимума внутри рассматриваемой поверхности, центр масс может не совпадать с областью концентрации наиболее тяжелых глобул, что в свою очередь приводит к удалению всех “свободных” глобул от точки экстремума. Для решения этой проблемы неподвижные глобулы наделяются фиктивной массой, в несколько раз превышающей целевую функцию.

Использование вращений системы глобул, которые можно интерпретировать как аппроксимацию генетического алгоритма или специальный вид стохастического возбуждения системы, позволяет избегать контрпримеров, возникающих в случае чистой гравитационной аналогии. В частности, при

скоплении глобул в окрестности седловой точки малые возмущения, вызванные вращением системы, позволяют улучшить точность нахождения максимума. Более подробно рассмотрим вопрос заикливания. Допустим, что траектория частицы не обязательно будет плотно покрывать тор, т.е. она может вернуться в свою первоначальную точку после конечного числа оборотов вокруг оси тора, тогда траектория будет замкнутой, а движение — периодическим. В действительности, на основании теоремы Пейксо [7], замкнутые траектории на торе менее вероятны, чем плотно покрывающие его. Таким образом, периодические движения не устойчивы относительно малых возмущений, роль которых играет генетический алгоритм.

3. Результаты тестирования алгоритма

Точность решения и скорость сходимости алгоритма зависят от числа взаимодействующих частиц и от размерности задачи. Предлагаемый алгоритм не гарантирует поиск точного глобального экстремума, но он дает хорошее начальное приближение для стандартных методов оптимизации. Также имеется возможность проследить поведение функции в окрестности экстремума.

Алгоритм успешно прошел апробацию на стандартных тестовых функциях: расширенная функция Розенброка, расширенная обобщенная функция Пауэлла, функция типа спиралевидного желоба, функция Вуда. Эти функции представляют собой подмножество тестовых задач, обычно используемых для тестирования в исследовательских проектах и для тестирования нового метода на ранней стадии разработки. Полный перечень тестовых задач для всестороннего тестирования алгоритма приводится в работе [8].

В каждом случае задается n скалярных функций от n неизвестных: $f_i(x)$, $i = 1..n$, x — n -мерный вектор. Целевая функция для безусловной минимизации

$$f(x) = \sum_{i=1}^n f_i(x)^2, \quad f(x^*) = 0.$$

В программной реализации максимизируется функция

$$F(x) = 1/(f + 1), \quad F(x^*) = 1.$$

Ниже перечисленные тестовые функции приведены в стандартной формулировке и используемая при расчетах замена координат: функция Розенброка ($x_i \rightarrow 2 \cdot x_i$), функция Пауэлла ($x_i \rightarrow x_i - 0.5$), спиралевидный желоб ($x_1 \rightarrow x_1 + 0.5$, $x_2 \rightarrow x_2 - 0.5$, $x_3 \rightarrow x_3 - 0.5$), функция Вуда ($x_i \rightarrow 2 \cdot x_i$). Таким образом, $x^* = (0.5, \dots, 0.5)$.

Внутри единичного n -мерного куба распределялось 100 частиц, взаимодействующих между собой. Получены следующие результаты.

3.1. Расширенная функция Розенброка

n — любое положительное число, кратное 2;

$$f_{2i-1}(x) = 10 \cdot (x_{2i} - x_{2i-1}^2), \quad f_{2i}(x) = 1 - x_{2i-1}, \quad i = 1..n/2.$$

Экспериментальные данные

при $n = 2$ $F_{\max} = 0.9999$, $x^* = (0.497, 0.495)$ (см. рис. 5),

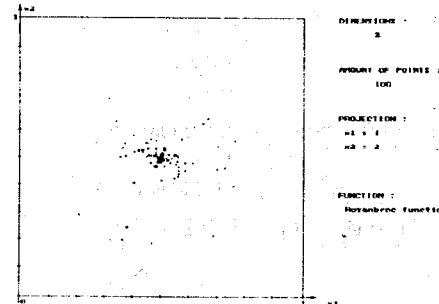


Рис. 5. Пример конечной конфигурации для функции Розенброка

при $n = 4$ $F_{\max} = 0.992$, $x^* = (0.478, 0.459; 0.473, 0.446)$.

Здесь и далее число шагов алгоритма было выбрано равным 30. Подробнее разберем случай $n = 4$. Рассмотрим сферу с центром в точке $(0.5, 0.5, 0.5, 0.5)$, радиус которой на порядок меньше расстояния от центра до точки экспериментального экстремума. Значения целевой функции на поверхности такой сферы порядка 0.91–0.97, что можно получить непосредственно, разбрасывая случайным образом точки по сфере и вычисляя значения функции. Таким образом, целевая функция имеет узкий “горб”, на котором расположена точка глобального экстремума. Аналогичные результаты верны и для остальных тестовых функций.

3.2. Расширенная обобщенная функция Пауэлла

n — любое положительное число, кратное 4, $i = 1..n/4$;

$$f_{4i-3}(x) = x_{4i-3} + 10 \cdot x_{4i-2}, \quad f_{4i-2}(x) = \sqrt{5} \cdot (x_{4i-1} - x_{4i}),$$

$$f_{4i-1}(x) = (x_{4i-2} - 2 \cdot x_{4i-1})^2, \quad f_{4i}(x) = \sqrt{10} \cdot (x_{4i-3} - x_{4i})^2.$$

Экспериментальные данные
при $n = 4$, $F_{\max} = 0.9999$, $x^* = (0.478, 0.502, 0.495, 0.495)$.

3.3. Функция типа спиралевидного желоба

$$n = 3, \quad f_3(x) = x_3,$$

$$f_1(x) = 10 \cdot (x_3 - 10 \cdot \theta(x_1, x_2)), \quad f_2(x) = 10 \cdot ((x_1^2 + x_2^2)^{1/2} - 1),$$

$$\theta(x_1, x_2) = (\pi/2) \arctan(x_2/x_1), \quad x_1 > 0,$$

$$\theta(x_1, x_2) = (\pi/2) \arctan(x_2/x_1) + 0.5, \quad x_1 < 0.$$

Экспериментальные данные
 $F_{\max} = 0.979$, $x^* = (0.501, 0.437, 0.393)$.

3.4. Функция Вуда

Эта функция считается сложной с точки зрения поиска экстремума. $n = 4$,

$$f(x) = 100 \cdot (x_1^2 - x_2)^2 + (1 - x_1)^2 + 90 \cdot (x_3^2 - x_4)^2 + (1 - x_3)^2 + 10.1 \cdot ((1 - x_2)^2 + (1 - x_4)^2) + 19.8 \cdot (1 - x_2)(1 - x_4).$$

Экспериментальные данные
 $F_{\max} = 0.994$, $x^* = (0.519, 0.538, 0.479, 0.461)$.

3.5. Дипольные решетки

Алгоритм был применен для задачи оптимизации систем дипольных решеток [9]. Эта задача возникает как составная часть проблемы наилучшего оценивания сигнала при вариации геометрии расположения измерительных приборов. Целевая функция определяется через параметры так называемой дипольной решетки — датчиков, расположенных по кругу или в ряд и характеризующимися наилучшими углами приема.

$$F = \det(H^T H) \rightarrow \max$$

$$\sin a_0 \quad \cos a_0$$

$$H = \begin{pmatrix} \cos a_1 & \sin a_1 \\ \cos a_2 & \sin a_2 \\ \dots & \dots \\ \cos a_n & \sin a_n \end{pmatrix}$$

$$\sin a_n \quad \cos a_n$$

$$a_0 = 0, \quad \pi \geq a_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, n$$

(для $n = 2$ $x_1^* = (0.33, 0.67)$, $x_2^* = (0.67, 0.33)$, $F_{\max} = 2.25$).

В двумерном случае получены результаты, совпадающие с результатами градиентных методов:

$$F_{\max}^1 = 2.24998, \quad x_1^* = (0.333, 0.665),$$

$$F_{\max}^2 = 2.24997, \quad x_2^* = (0.665, 0.337).$$

Для трехмерной задачи экстремальное множество в проекциях на оси координат представляет собой отрезки прямых линий.

Заключение

Гравитационный метод поиска глобального минимума функции одного или нескольких переменных успешно прошел апробацию на стандартных тестовых функциях: расширенная функция Розенброка, расширенная обобщенная функция Пауэлла, функция типа спиралевидного желоба, функция Вуда. Эти функции представляют собой подмножество тестовых задач, обычно используемых для тестирования в исследовательских проектах и для тестирования нового метода на ранней стадии разработки. В случае эксперимента NEMO-3 получена близкая к 100% эффективность этого метода при реконструировании треков заряженных частиц. Как показано, этот алгоритм также полезен при выявлении окрестностей экстремумов.

Анализ классической литературы по вычислительной математике позволяет утверждать, что предложенный метод является новым и имеет определенные преимущества по сравнению с другими. Метод не является сильно зависящим от направления градиента и локальных особенностей целевой функции. Применять данный метод для решения конкретной практической задачи целесообразно в совокупности с традиционными алгоритмами, используя, например, ньютоновские итерации для уточнения экстремума.

Приложение А. Гравитационное взаимодействие

Движение отдельной частицы определяется действием приложенного к ней заданного внешнего поля E [10]. Если это поле потенциально, то его можно представить с помощью скалярного потенциала Φ

$$E = -\nabla \Phi.$$

“Состояние” точечной частицы массы m определяется шестью координатами $\vec{r} = \{x, y, z\}$, $\vec{v} = \{v_x, v_y, v_z\}$, причем

$$\begin{cases} \dot{\vec{r}} = \vec{v} \\ \dot{\vec{v}} = -\frac{e}{m} \nabla \Phi(\vec{r}) \end{cases}$$

(в случае гравитационного поля $e = m$).
Согласно законам движения Ньютона

$$\begin{cases} \dot{\vec{r}}_i = \vec{v}_i \\ \dot{\vec{v}}_i = \sum_{j=1, j \neq i}^N \frac{e_i e_j}{m_i} \frac{(\vec{r}_i - \vec{r}_j)}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|^3} \\ 1 \leq i \leq N \end{cases}$$

(в случае гравитационных сил $e_i = m_i \sqrt{-G}$).

Рассмотрим простейшую разностную схему. Пусть t — постоянный шаг по времени, $a = v'$ — ускорение, тогда

$$\begin{cases} \vec{a}_i^n = -G \sum_{j=1, j \neq i}^N \frac{m_j (\vec{r}_i^n - \vec{r}_j^n)}{|\vec{r}_i^n - \vec{r}_j^n|^3} \\ \vec{r}_i^{n+1} = \vec{r}_i^n + \vec{v}_i^n t + \frac{\vec{a}_i^n t^2}{2} \\ \vec{v}_i^{n+1} = \vec{v}_i^n + \vec{a}_i^n t. \end{cases}$$

Приведенные выше формулы можно повторить для общего случая, когда размерность пространства равна k , с той лишь разницей, что модуль расстояния между двумя частицами будет возводиться в степень, равную размерности пространства.

Для данной системы уравнений чаще используется разностная схема “с перешагиванием”, так как координаты и скорости частиц можно определять только в чередующиеся моменты времени. Мы ограничимся тем, что при вычислении координат будем использовать среднее значение скорости за последние два шага по времени: $\frac{\vec{v}_i^n + \vec{v}_i^{n+1}}{2}$.

Начальные скорости частиц равны нулю, и это условие сохраняется на каждом шаге. Таким образом, скорости не накапливаются. Введенные ограничения оправданы тем, что мы не ставили перед собой задачу получить абсолютно точную модель гравитационного взаимодействия: По той же причине в формуле для вычисления ускорения модуль расстояния возводится в квадрат, и в случае многомерного пространства гравитационная постоянная $G = 1$.

Таким образом, формулы принимают вид

$$\begin{cases} \vec{a}_i^n = -G \sum_{j=1, j \neq i}^N \frac{m_j (\vec{r}_i^n - \vec{r}_j^n)}{|\vec{r}_i^n - \vec{r}_j^n|^3} \\ \vec{v}_i^{n+1} = \vec{a}_i^n t \\ \vec{r}_i^{n+1} = \vec{r}_i^n + \frac{\vec{v}_i^n + \vec{v}_i^{n+1}}{2} t + \frac{\vec{a}_i^n}{2} t^2. \end{cases}$$

Приложение В. Аппроксимация генетического алгоритма

Генетический алгоритм можно интерпретировать как некоторый “поворот” [11]. Координаты частицы в момент времени t_i вычисляются через соседние координаты в момент времени t_{i-1} . Пусть размерность пространства равна k . На каждом шаге “поворот” происходит в некоторой плоскости $Ox^i x^j$ ($i, j = 1, \dots, k, i \neq j$), где x^i, x^j выбираются случайным образом. Обозначим $x^i = x$, $x^j = y$ и рассмотрим плоскость Oxy .

По аналогии с гравитацией, формулы для вычисления координат i -й частицы имеют вид

$$\begin{cases} x_i^{n+1} = x_i^n - t^2 \sum_{j=1, j \neq i}^N \frac{m_j (y_i^n - y_j^n)}{|\vec{r}_i^n - \vec{r}_j^n|^2} \\ y_i^{n+1} = y_i^n + t^2 \sum_{j=1, j \neq i}^N \frac{m_j (x_i^n - x_j^n)}{|\vec{r}_i^n - \vec{r}_j^n|^2}, \end{cases}$$

остальные координаты на данном шаге не изменятся.

Приложение С. Математические замечания

Как уже указывалось, предложенный метод базируется на классической задаче математического анализа, известной как “теорема о двух милионерах”. В математической практике [12] широко известны численные методы, базирующиеся на теореме Больцано-Вейерштрасса, следствием из которой и является “теорема о двух милионерах”. Однако даже при выборе нескольких рабочих точек в исследуемой области во многих классических алгоритмах, по существу, присутствует только одна активная рабочая точка, а остальные являются вспомогательными. К тому же на рассматриваемые функции обычно накладываются определенные дополнительные ограничения. Примером могут служить условие Липшица [13] или условие строгой унимодальности [14] в методе ломаных [15]. Идеино похожий на предложенный алгоритм метод покрытий [16] имеет ограничение в виде постоянства константы в условии Липшица. Это же ограничение присутствует и в другой реализации метода покрытий [17, 18], которая, вообще говоря, может быть представлена в терминах предложенного в этой работе метода при специальном выборе гравитационного правила. То же самое можно сказать и о методе [19], использующем угловые коэффициенты хорд минимизируемой функции между определенными точкам, получающимися при поиске минимума.

Идея перемещающейся от одного локального минимума к другому рабочей точки алгоритма использовалась и ранее [20]; но при этом основное

внимание уделялось дифференциальным свойствам исследуемой функции. Отметим, что было проведено специальное исследование на предмет использования метода, подобного предложенному: формулировка идеи метода является очень похожей на классические работы. Результат, однако, оказался отрицательным, что позволяет говорить об уникальности предложенного алгоритма.

Не пытаясь умалить достоинства нового метода, отметим, что он не является универсальным и имеет свою область применимости: функция Морса исследуемого функционала должна обладать достаточной симметрией. Мерой симметрии может служить совокупная норма мер множеств, полученных операцией симметричной разности между ограниченными множествами, границами которых являются компоненты связности, образованные при построении функции Морса соответствующего уровня. Дабы не быть голословными, рассмотрим следующий контрпример, отражающий зависимость выполнения предположения индукции от шага индукции при использовании итераций предложенного метода.

Рассмотрим функцию одного переменного, надграфик которой ограничен контуром, напоминающим “возмущенный” контур цифры 7, повернутый на 90 градусов в положительном направлении. Таким образом, в достаточной близости, но и на достаточном удалении от левого края исследуемого отрезка расположен глобальный минимум с очень малым “бассейном” локального притяжения, где мерой этого бассейна служит мера ограниченной внутренности соответствующей компоненты связности функции Морса. Рядом же с правым краем отрезка располагается крутой скат в локальный минимум. Все численные параметры, определяющие эти расстояния, подбираются из характеристик метода. При использовании гравитационного метода правая точка очень быстро скатывается достаточно низко, чтобы перетянуть левую через бассейн локального притяжения глобального минимума — требуемое противоречие получено. Следует отметить, что функции со столь экзотическим поведением при проведении практических исследований не встречаются, что и определяет отсутствие таковых в [8].

Список литературы

- [1] Дж. Дэннис, Р. Шнабель, “Численные методы безусловной оптимизации и решения нелинейных уравнений”, М. Мир, 1988.
- [2] NEMO Collaboration, Proposal. Preprint LAL 94-29 (1994).
- [3] R. Arnold et al. (NEMO Collaboration), “Performance of a Prototype Tracking Detector for Double Beta Decay Measurements”, Nucl. Instr. and Meth. A354 (1995) 338.

- [4] I. Kisel and V. Kovalenko, “Elastic Net for Broken Multiple Scattered Tracks”, Comput. Phys. Commun. 98 (1996) 47.
- [5] W.H. Press, B.P. Flannery, S.A. Teukolsky and W.T. Vetterling, “Numerical Recipes: the Art of Scientific Computing”. Cambridge University Press, 1986.
- [6] A.D. Bethke, “Genetic Algorithms as Function Optimizers”, Ph.D. diss., Department of Computer and Communication Sciences, University of Michigan, 1980.
- [7] Р. Рихтмайер, “Принципы современной математической физики”, т. 2, М. Мир, 1984.
- [8] J.J. More, B.S. Garbow, K.E. Hillstom, “Testing unconstrained optimization software”, TOMS 7, 17-41.
- [9] Д.Н. Лавров, “Оценка волновых векторов, задача согласования и оптимизация дипольных решеток”, Вестник Омского университета, 1996, N1, стр. 27-29.
- [10] П. Поттер, “Вычислительные методы в физике”, М. Мир, 1975.
- [11] R.T. Faizullin, “An Approximations for Genetic Algorithms and Star’s Pattern”, in the Proceedings of 1st On-Line Internet Conference of Soft Computing, Nagoya, Japan 19-30 Aug 1996; <http://www.bioele.nuee.nagoya-u.ac.jp/wsc1>
- [12] Ф.П. Васильев, “Численные методы решения экстремальных задач”, М. Наука, 1988.
- [13] Ю.М. Данилин, “Оценка эффективности одного алгоритма отыскания абсолютного минимума”, Журн. выч. матем. и матем. физики, 1971, 11(4), 1026-1031.
- [14] Ф.Л. Черноусько, А.А. Меликян, “Игровые задачи управления и поиска”, М. Наука, 1978.
- [15] С.А. Пиявский, “Один алгоритм отыскания абсолютного экстремума функций”, Журн. выч. матем. и матем. физики, 1972, 12(4), 888-896.
- [16] Ю.Г. Евтушенко, “Численный метод поиска глобального экстремума функций”, Журн. выч. матем. и матем. физики, 1971, 11(6), 1390-1703.
- [17] Ю.Г. Евтушенко, В.А. Ратькин, “Метод половинных делений для глобальной оптимизации функций многих переменных”, Техническая кибернетика, 1987, 1, 119-127.

- [18] В.Н. Нефедов, "Отыскание глобального максимума функции нескольких переменных на множестве, заданном ограничениями типа неравенств", Журн. выч. матем. и матем. физики, 1987, 27(1), 35-51.
- [19] Р.Г. Стронгин, "Численные методы в многоэкстремальных задачах", М. Наука, 1979.
- [20] А.В. Вилков, Н.П. Жидков, Б.М. Щедрин, "Метод отыскания глобального минимума функции одного переменного", Журн. выч. матем. и матем. физики, 1975, 15(4), 1040-1042.

Рукопись поступила в издательский отдел
19 августа 1997 года.