ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р5-96-52

П.Е.Жидков*

О ЗАДАЧЕ НА СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ ДЛЯ ОПЕРАТОРА ШТУРМА—ЛИУВИЛЛЯ С ПОТЕНЦИАЛОМ, ЗАВИСЯЩИМ ОТ СПЕКТРАЛЬНОГО ПАРАМЕТРА

Направлено в журнал «Дифференциальные уравнения»

*E-mail address: zhidkov@thsun1.jinr.dubna.su

1996

1 Введение

В связи с различными задачами физики возникает задача на собственные значения для дифференциальных уравнений с нелинейным вхождением спектрального параметра (см., например, [1-3]). Как правило, кроме естественной задачи нахождения спектра и соответствующих собственных функций требуется изучить обычный для спектральной теории вопрос о возможности разложения произвольной функции из некоторого функционального пространства (обычно из L_2) в сходящийся ряд по этим функциям. В работе [3] для конкретной физической задачи анонсированы результаты о возможности такого разложения. Численно спектральные задачи этого типа исследовались в ряде работ (см., например, [4] и указанный в этой работе список литературы). В работе [5] рассмотрены некоторые вопросы нестационарной теории рассеяния для задач этого класса, а в работах [6,7] подобные проблемы изучаются в связи с вопросами полной интегрируемости по Лиувиллю некоторых систем. Результаты о полноте системы собственных функций некоторой нелинейной задачи, возникающей при малых нелинейных возмущениях линейной задачи, анонсированы в работе [8].

В настоящей работе сделана попытка изучить указанный вопрос о полноте собственных функций на примере относительно простой модельной задачи

$$-u'' + V(\lambda, x)u = \lambda u, \quad x \in (0,1), \tag{1}$$

$$u(0) = u(1) = 0. \tag{2}$$

Здесь λ- спектральный параметр, а $u(\lambda, x)$ и $V(\lambda, x)$– вещественные функции, функция V непрерывна по совокупности аргументов на $[0, +\infty) \otimes [0,1]$. Постановка задачи обычная: требуется найти все пары (λ, u) чисел λ и функций $u \not\equiv 0$, удовлетворяющие задаче (1)-(2). При этом функция V считается известной. Штрих означает производную по x.

В дальнейшем через $C, C_1, C_2, C', C'', \ldots$ будем обозначать положительные постоянные. Пусть L_2– обычное вещественное пространство Лебега, состоящее из функций аргумента $x \in [0,1]$, со скалярным произведением

$$(g, h)_{L_2} = \int\limits_0^1 g(x)h(x)dx.$$

Напомним некоторые сведения из спектральной теории задачи (1)-(2), когда функция $V(\lambda, x)$ не зависит от λ, т.е. $\frac{\partial}{\partial\lambda}V(\lambda, x) = 0$ при всех λ, x. Пусть функция V непрерывна по x. Тогда (см., например, [9,10]):

1. *Существует последовательность* $(\lambda_n, u_n)_{n=0,1,2,...}$ *собственных значений и собственных функций задачи* (1)-(2), *где*

$$\lambda_0 < \lambda_1 < ... < \lambda_n < ...,$$

а функция u_n *имеет ровно* n *корней в интервале* $(0,1)$ *при любом* $n = 0, 1, 2, ...$ *и* $||u_n||_{L_2} = 1$.

2. *Для любой пары* (λ, u), *удовлетворяющей задаче* (1)-(2), *существуют номер* n *и постоянная* $\alpha \neq 0$ *такие, что* $\lambda = \lambda_n$ *и* $u = \alpha u_n$.

3. $(u_n, u_m)_{L_2} = 0$, *если* $n \neq m$.

4. *Для любой* $f \in L_2$ *имеет место разложение* $f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n u_n$, *где* $a_n = (f, u_n)_{L_2}$, *а сходимость ряда понимается как сходимость в* L_2.

Введем еще пространства Соболева H_0^1 и H_0^2 вещественных функций u, соответственно абсолютно непрерывных и абсолютно непрерывных вместе со своими первыми производными на отрезке $[0,1]$, удовлетворяющих условию $u(0) = u(1) = 0$, для которых конечны нормы

$$||u||_{H_0^1} = \left\{ \int_0^1 [u'(x)]^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}} \quad \text{и} \quad ||u||_{H_0^2} = \left\{ \int_0^1 [u''(x)]^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Напомним, что H_0^1 и H_0^2- гильбертовы пространства со скалярными произведениями

$$(g, h)_{H_0^1} = \int_0^1 g'(x)h'(x)dx \quad \text{и} \quad (g, h)_{H_0^2} = \int_0^1 g''(x)h''(x)dx.$$

Отметим, что все сведения из функционального анализа, используемые в работе, содержатся, например, в книге [11].

Введем следующие предположения:

(V1) *функция* $V(\lambda, x)$ *вещественна и непрерывна по совокупности аргументов* $(\lambda, x) \in [0, +\infty) \otimes [0, 1]$;

(V2) *существует такое* $V_0 > 0$, *что* $0 \leq V(\lambda, x) \leq V_0$ *при всех* λ, x;

(V3) *функция* $V(\lambda, x)$ *равномерно по отрезку* $[0, 1]$ *сходится при* $\lambda \to +\infty$ *к некоторой функции* $\overline{V}(x)$, *причем существуют такие* $C > 0$ *и* $\gamma \in (\frac{1}{2}, 1)$, *что* $|V(\lambda, x) - \overline{V}(x)| \leq C\lambda^{-\gamma}$ *для всех* $x \in [0, 1]$ *и* $\lambda \geq 1$.

В дальнейшем используется следующий хорошо известный результат (см. [10], теорема 3.2).

Теорема сравнения

Пусть функции U *и* u *являются решениями следующих задач:*

$$-U'' = Q(x)U, \quad x \in (0,1), \quad U(0) = 0, \quad U'(0) = 1,$$

и

$$-u'' = q(x)u, \quad x \in (0,1), \quad u(0) = 0, \quad u'(0) = 1,$$

где функции $Q(x)$ *и* $q(x)$ *непрерывны на отрезке* $[0, 1]$, *и пусть* $Q(x) > q(x)$ *при* $x \in (0, 1)$. *Пусть функция* $u(x)$ *имеет* n *корней в полуинтервале* $(0, 1]$ *(где* n*- некоторое целое неотрицательное число). Тогда функция* $U(x)$ *имеет в интервале* $(0, 1)$ *не менее* n *корней.*

2 О существовании и единственности собственных значений и собственных функций задачи (1)–(2)

Наряду с задачей (1)-(2) рассмотрим задачу Коши

$$-u'' + V(\lambda, x)u = \lambda u, \quad x \in (0,1), \tag{3}$$

$$u(0) = 0, \quad u'(0) = 1. \tag{4}$$

Напомним, что в силу линейности уравнения (3) по u при фиксированном λ любое его решение $v(x)$, обращающееся в нуль при $x = 0$, равно $\alpha u(x)$ с некоторой постоянной α.

Теорема 1

Пусть функция V удовлетворяет условиям (V1),(V2). Тогда существует последовательность $\lambda_0 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n < \ldots$ такая, что для каждого n соответствующее решение $u(\lambda_n, x)$ задачи (3)-(4) имеет ровно n корней в интервале $(0,1)$ и $u(\lambda_n, 1) = 0$ (т. е. функции u_n удовлетворяют задаче (1)-(2) с $\lambda = \lambda_n$).

Доказательство. При $V(\lambda, x) \equiv 0$ собственными значениями задачи (1)-(2) являются числа $\mu_n = (\pi(n+1))^2$. Поскольку $V(\lambda, x) \geq 0$ в задаче (3)-(4), из теоремы о непрерывной зависимости решения задачи Коши от параметра вытекает, что решение $u(\lambda, x)$ задачи (3)-(4) положительно при $x \in (0,1]$, если $\lambda > 0$ достаточно мало, в частности, $u(\lambda, 1) > 0$. Далее, из теоремы сравнения следует, что при $\lambda > \mu_{n+1} + V_0$ решение $u(\lambda, x)$ задачи (3)-(4) имеет не менее $(n+1)$ корней в интервале $(0,1)$.

Рассмотрим множества

$$Y_n = \{\lambda > 0 : \ u(\lambda, x) \text{ имеет не менее } (\mathrm{n}+1) \text{ корней в интервале } (0,1)\},$$

где $u(\lambda, x)$– решение задачи (3)-(4). Пусть $\lambda_n = \inf Y_n$. Покажем, что $u(\lambda_n, 1) = 0$ и функция $u(\lambda_n, x)$ имеет ровно n корней в интервале $(0,1)$. Предположим, что число корней функции $u(\lambda_n, x)$ в интервале $(0,1)$ меньше n. Тогда, поскольку если $u(\lambda_n, x) = 0$, то $u'_x(\lambda_n, x) \neq 0$ (иначе по теореме единственности $u(\lambda_n, x) \equiv 0$), по теореме о непрерывной зависимости решения задачи Коши от параметра существует $\epsilon > 0$ такое, что при $\lambda_n < \lambda < \lambda_n + \epsilon$ функции $u(\lambda, x)$ имеют не более n корней в интервале $(0,1)$, что противоречит определению λ_n. Аналогично число корней функции $u(\lambda_n, x)$ в интервале $(0,1)$ не может превосходить n.

Итак, число корней функции $u(\lambda_n, x)$ равно n. Если $u(\lambda_n, 1) \neq 0$, то, как и выше, по теореме о непрерывной зависимости от параметра функции $u(\lambda, x)$ имеют не более n корней в интервале $(0,1)$ при λ, больших λ_n и достаточно близких к λ_n, что противоречит определению множества Y_n. Тем самым $u(\lambda_n, 1) = 0$ и теорема 1 доказана.

Приведем простые достаточные условия того, что для любого целого неотрицательного n пара (λ_n, u_n), удовлетворяющая задаче (1)-(2), единственна с точностью до постоянного множителя при u_n, где функция u_n имеет ровно n корней в интервале $(0,1)$. Доказательство каждого из них сразу следует из теоремы сравнения (при доказательстве второго

утверждения следует учесть, что при достаточно малых $\epsilon > 0$ для всех (λ, x) имеет место неравенство $|\frac{\partial}{\partial\lambda} V(\lambda, x)| < 1$).

Предложение 1

Пусть выполнены условия (V1),(V2) и пусть

(V4) *функция $V(\lambda, x)$ непрерывно дифференцируема по λ и $V'_\lambda(\lambda, x) \leq 0$ для всех $(\lambda, x) \in [0, +\infty) \otimes [0,1]$.*

Тогда для каждого $n = 0, 1, 2, \ldots$ существует ровно одно значение $\lambda = \lambda_n > 0$, при котором решение $u(\lambda_n, x)$ задачи (3)-(4) имеет ровно n корней в интервале $(0,1)$ и $u(\lambda_n, 1) = 0$.

Предложение 2

Пусть $V(\lambda, x) = V_1(x) + \epsilon V_2(\lambda, x)$, где функции $V_1(x)$ и $V_2(\lambda, x)$ непрерывны, $V_i \geq 0$ при $x \in [0,1]$ и $\lambda \in [0, \infty)$ $(i = 1, 2)$, а функция $V_2(\lambda, x)$ непрерывно дифференцируема по λ и функции $V_2(\lambda, x)$ и $\frac{\partial}{\partial\lambda} V_2(\lambda, x)$ ограничены по совокупности переменных $x \in [0,1]$, $\lambda \geq 0$. Тогда существует $\epsilon_0 > 0$ такое, что при $|\epsilon| < \epsilon_0$ для любого целого n существует ровно одно значение $\lambda = \lambda_n > 0$, при котором решение $u(\lambda, x)$ задачи (3)-(4) имеет ровно n корней в интервале $(0,1)$ и удовлетворяет условию $u(\lambda_n, 1) = 0$.

3 Полнота системы собственных функций

Пусть $\{(\lambda_n, u_n)\}_{n=0,1,2,\ldots}$- некоторая последовательность решений задачи (1)-(2) такая, что $\lambda_n > 0$, а функция u_n имеет ровно n корней в интервале $(0,1)$ и $||u_n||_{L_2} = 1$. Из теоремы сравнения и из предположений (V1),(V2) сразу следует оценка собственных значений задачи (1)-(2)

$$(\pi(n+1))^2 \leq \lambda_n \leq (\pi(n+1))^2 + V_0, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{5}$$

которая получается сравнением задачи (1)-(2) с задачей

$$-u'' = \lambda u, \quad x \in (0,1),$$

$$u(0) = u(1) = 0.$$

Положим для $u \in H_0^1$

$$J(\lambda, u) = \int\limits_0^1 [u_x^2 + V(\lambda, x)u^2]dx = ||u||_\lambda^2.$$

Ясно, что функционал J непрерывен на пространстве H_0^1 при любом фиксированном $\lambda > 0$. Хорошо известен следующий

Принцип минимакса

В предположениях (V1),(V2) *имеют место утверждения:*

1) $\lambda_0 = J(\lambda_0, u_0) = \inf\limits_{u \in H_0^1;\ ||u||_{L_2}=1} J(\lambda_0, u);$

2) *Пусть $n \geq 1$. Тогда*

$$\lambda_n = J(\lambda_n, u_n) = \inf\limits_{\substack{v_0,\dots,v_n \in H_0^1 \\ (v_i,v_j)_{L_2}=\delta_j^i}} \sup\limits_{\substack{u \in L(v_0,\dots,v_n) \\ ||u||_{L_2}=1}} J(\lambda_n, u)$$

(здесь δ_j^i- символ Кронекера, а $L(v_0, ..., v_n)$- линейная оболочка векторов $v_0, ..., v_n$).

Первый основной результат работы составляет

Теорема 2

Пусть выполнены предположения (V1),(V2),(V3) *и пусть $\{\lambda_n, u_n(\lambda_n, x)\}_{n=0,1,2,...}$– система собственных значений и нормированных в L_2 собственных функций задачи* (1)-(2), *где для любого n u_n как функция аргумента x имеет ровно n корней в интервале $(0, 1)$, а $\lambda_n > 0$ (не требуется, чтобы отсутствовали решения задачи на собственные значения (1)-(2), не входящие в эту систему). Тогда для того, чтобы замыкание в L_2 линейной оболочки векторов $\{u_n(\lambda_n, x)\}$ $(n = 0, 1, 2, ...)$ совпадало с L_2 (т. е. чтобы эта система являлась полной в L_2), необходимо и достаточно, чтобы эта система была линейно независима, т. е. чтобы из условия $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n u_n = \lim\limits_{N\to\infty} \sum\limits_{n=0}^{N} a_n u_n = 0$, где $a_n \in R$, а предел понимается в смысле сходимости в L_2, следовало, что $a_n = 0$ для всех n.*

Доказательству теоремы 2 предпошлем ряд лемм.

Лемма 1

Пусть $\overline{u}_0, \overline{u}_1, ..., \overline{u}_n, ...$ и $\overline{\lambda}_0, \overline{\lambda}_1, ..., \overline{\lambda}_n, ...$– ортонормированная система собственных функций и система собственных значений задачи (1)-(2) с $V(\lambda, x) = \overline{V}(x)$ (функция $\overline{u}_n$ имеет ровно n корней в интервале $(0; 1)$), а $v_n = \alpha_n \overline{u}_n$, где $\alpha_n \in R$, таково, что $v_n'(0) = 1$. Тогда существуют такие $C > 0$ и $a_n \sim \sqrt{2}\lambda_n^{\frac{1}{2}}$, что

$$||u_n(\lambda_n, .) - a_n v_n(.)||_{L_2} \leq Cn^{-1-2\gamma}$$

и

$$|\overline{u}_n(x)| \leq C, \qquad |u_n(\lambda_n, x)| \leq C$$

для всех номеров $n = 0, 1, 2, ...$ и всех $x \in [0, 1]$.

Доказательство. Для решений задачи (3)-(4) справедливо тождество (см. [12], лемма 1.7):

$$u(\lambda, x) = \lambda^{-\frac{1}{2}} \sin(\lambda^{\frac{1}{2}} x) + \lambda^{-\frac{1}{2}} \int\limits_0^x \sin(\lambda^{\frac{1}{2}}(x-y))V(\lambda, y)u(\lambda, y)dy. \qquad (6)$$

Пусть $u(\lambda_n, x)$– решение задачи (3)-(4), имеющее ровно n корней в интервале $(0, 1)$ и $u(\lambda_n, 1) = 0$. Пусть $m = \max\limits_{x\in[0,1]} u(\lambda_n, x)$. Тогда из (6) получаем

$$m \leq \lambda_n^{-\frac{1}{2}} + \lambda_n^{-\frac{1}{2}} m V_0,$$

откуда

$$m \leq \lambda_n^{-\frac{1}{2}}[1 - \lambda_n^{-\frac{1}{2}} V_0]^{-1}. \qquad (7)$$

Отсюда, в частности, следует равномерная ограниченность последовательности функций $u(\lambda_n, x)$ сверху. Ограниченность снизу и ограниченность последовательности $v_n(x)$ доказываются аналогично.

Далее, в силу теоремы сравнения и условия (V3) из (1)-(2) следует оценка

$$|\lambda_n - \overline{\lambda}_n| \leq Cn^{-2\gamma}, \qquad (8)$$

где $C > 0$– не зависит от номера n. Подставим выражение для $u(\lambda_n, x)$ из (6) в правую часть равенства (6) и повторим эту операцию для функций $v_n(x)$. Получим

$$u(\lambda_n, x) = \lambda_n^{-\frac{1}{2}} \sin(\lambda_n^{\frac{1}{2}} x) + \lambda_n^{-1} \int\limits_0^x \sin(\lambda_n^{\frac{1}{2}}(x-y))V(\lambda_n, y)[\sin(\lambda_n^{\frac{1}{2}} y) +$$

$$+\int_0^y \sin(\lambda_n^{\frac{1}{2}}(y-t))V(\lambda_n,t)u(\lambda_n,t)dt]dy \tag{9}$$

и

$$v_n(x)=\overline{\lambda_n}^{-\frac{1}{2}}\sin(\overline{\lambda_n}^{\frac{1}{2}}x)+\overline{\lambda_n}^{-1}\int_0^x \sin(\overline{\lambda}_n^{\frac{1}{2}}(x-y))\overline{V}(y)[\sin(\overline{\lambda}_n^{\frac{1}{2}}y)+$$

$$+\int_0^y \sin(\overline{\lambda_n}^{\frac{1}{2}}(y-t))\overline{V}(t)v_n(t)dt]dy. \tag{10}$$

Поскольку в силу (8) и оценки (5) имеем

$$\lambda_n=\overline{\lambda}_n+O(n^{-2\gamma}),\quad \lambda_n^{\frac{1}{2}}=\overline{\lambda}_n^{\frac{1}{2}}+O(n^{-1-2\gamma}),$$

$$|V(\lambda_n,x)-\overline{V}(x)|=O(n^{-2\gamma})$$

при $n\to\infty$, из (7) и равенств (9) и (10) получаем

$$||u(\lambda_n,x)-v_n(x)||_{L_2}\le Cn^{-2}+\overline{\lambda_n}^{-\frac{1}{2}}||\sin(\lambda_n^{\frac{1}{2}}x)-\sin(\overline{\lambda}_n^{\frac{1}{2}}x)||_{L_2}\le C_1n^{-2},$$

где $C>0$ и $C_1>0$– не зависят от n и x. Повторяя эту операцию еще раз с учетом полученной оценки, придем к неравенству

$$||u(\lambda_n,x)-v_n(x)||_{L_2}\le Cn^{-2-2\gamma},$$

где $C>0$– не зависит от n. Наконец, поскольку в силу представлений (9) и (10) имеем

$$u_n(\lambda_n,x)=a_nu(\lambda_n,x),$$

где

$$a_n\sim\sqrt{2}\lambda_n^{\frac{1}{2}},$$

лемма 1 доказана.

Лемма 2
Существует такое $C>0$, что для любого номера $M>0$

$$(u_n,u_m)_{L_2}\le CM^{-2\gamma}|n^2-m^2|^{-1}$$

для любых $n,m\ge M$, где $n\ne m$ (здесь $\gamma>\frac{1}{2}$– постоянная из условия (V3)).

Доказательство. Умножим уравнение (1), записанное для $u=u_n$, на u_m, а уравнение (1), записанное для $u=u_m$, — на u_n, проинтегрируем получившиеся равенства по отрезку $[0,1]$ и вычтем одно из получившихся равенств из другого. Получим в силу леммы 1

$$|\lambda_n-\lambda_m|\ |(u_n,u_m)_{L_2}|\le$$

$$\le\int_0^1 |V(\lambda_n,x)-V(\lambda_m,x)|\ |u_n(x)|\ |u_m(x)|\ dx\le CM^{-2\gamma},$$

откуда следует утверждение леммы 2.

Докажем теорему 2. Сначала получим некоторые вспомогательные неравенства. Пусть $n>N>M$– натуральные. Тогда

$$\sum_{k=M+1}^{N}\frac{1}{n^2-k^2}\le 2\sum_{k=M+1}^{N}\frac{1}{n^2-(k-1)^2}\le 2\int_M^N\frac{dx}{n^2-x^2}=$$

$$=\frac{1}{n}\ln\left[\frac{(n+N)(n-M)}{(n-N)(n+M)}\right]. \tag{11}$$

Аналогично

$$\sum_{k=N}^{n}\frac{1}{k^2-M^2}\le 3\sum_{k=N}^{n}\frac{1}{(k+1)^2-M^2}\le 3\int_N^{n+1}\frac{dx}{x^2-M^2}=$$

$$=\frac{3}{2M}\ln\left[\frac{(n+1-M)(N+M)}{(n+1+M)(N-M)}\right]. \tag{12}$$

Предположим, что теорема не верна. Тогда, поскольку пространство H_0^2 всюду плотно в L_2 и вложение H_0^2 в L_2 непрерывно, найдется $\phi\in H_0^2$ такое, что $||\phi||_{L_2}=1$ и $(\phi,u_n)_{H_0^2}=0$ для всех $n=0,1,2,\ldots$. Введем новые обозначения, полагая $g_0=\phi$, $g_n=u_{n-1}$, где $n=1,2,3,\ldots$, возьмем произвольные номера n и M такие, что $0<M<n$. Пусть $v=\sum_{k=0}^{M}a_kg_k$ и $||v||_{L_2}=1$, а $q=av+\sum_{k=M+1}^{n}a_kg_k$ и $||q||_{L_2}=1$. Поскольку при $n>0$ имеем

$$C\ge|(g_0'',g_n)_{L_2}|=|(g_0,g_n'')_{L_2}|=|(g_0,V(\lambda_n,x)g_n-\lambda_ng_n)_{L_2}|,$$

где $C > 0$– не зависит от n, получаем

$$|(g_0, g_n)_{L_2}| \le C_0 n^{-2}, \quad n = 1, 2, 3, ...,$$

где постоянная C_0 не зависит от n. Поэтому, с учетом леммы 2, отсюда следует, что существует такое $C > 0$, что

$$|(g_n, g_m)_{L_2}| \le \frac{C}{|n^2 - m^2|} \tag{13}$$

для всех целых неотрицательных $n \ne m$.

Лемма 3

Пусть система $\{g_n\}_{n=0,1,2,...}$ линейно независима. Тогда существует $C > 0$ такое, что $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k^2 \le C||g||^2_{L_2}$ для всех $g = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k g_k \in L_2$ (сходимость ряда для g понимается как сходимость в L_2).

Доказательство. Фиксируем произвольное натуральное N и положим $g_1(N) = \sum\limits_{k=0}^{N} a_k g_k$, $g_2(N) = g - g_1(N)$. В силу (11)-(13) для достаточно больших N имеем

$$||g_2(N)||^2_{L_2} \ge \sum_{k=N+1}^{\infty} a_k^2 - C \sum_{\substack{r,k=N+1 \\ k \ne r}}^{\infty} \frac{|a_k|\,|a_r|}{|k^2 - r^2|} \ge$$

$$\ge \sum_{k=N+1}^{\infty} a_k^2 - 2C \sum_{k=N+1}^{\infty} a_k^2 \sum_{\substack{r \ge N+1 \\ r \ne k}} \frac{1}{|k^2 - r^2|} \ge C_1 \sum_{k=N+1}^{\infty} a_k^2, \tag{14}$$

где постоянные $C, C_1 > 0$– не зависят от N. Следовательно, $\sum\limits_k a_k^2 < \infty$ для всех $g = \sum\limits_k a_k g_k \in L_2$. Предположим, что утверждение леммы не верно. Тогда существует последовательность $g^m = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k^m g_k \in L_2$, сходящаяся к нулю в L_2, и такая, что $\sum\limits_{k=0}^{\infty} (a_k^m)^2 = 1$. Положим $g_1^m(N) = \sum\limits_{k=0}^{N} a_k^m g_k$, $g_2^m(N) = g^m - g_1^m(N)$. Ясно, что для любого N из сходимости последовательности $\{g_1^m(N)\}_{m=1,2,3,...}$ следует сходимость последовательности $\{g_2^m(N)\}_{m=1,2,3,...}$ и наоборот. Поскольку последовательность

$d^m = \sum\limits_{k=0}^{\infty} (a_k^m)^2$ ограничена, для любого N последовательность $g_1^m(N)$ содержит сходящуюся в L_2 подпоследовательность $\{g_1^{m_l}(N)\}_{l=1,2,3,...}$. Тогда сходится и последовательность $\{g_2^{m_l}(N)\}_{l=1,2,3,...}$. Ясно, что каждая из этих последовательностей может сходиться лишь к нулю в L_2, поэтому $g_2^m(N) = \sum\limits_{k \ge N+1} a_k^m g_k \to 0$ в L_2 при $m \to \infty$ для любого натурального N.

Далее, поскольку левая часть неравенства (14) стремится к нулю при $m \to \infty$, получаем, что для достаточно больших номеров N $\sum\limits_{k=N+1}^{\infty} (a_k^m)^2 \to 0$ при $m \to \infty$. Но поскольку $||g_1^m(N)||_{L_2} \to 0$ при $m \to \infty$ для любого N, получаем, что для любого N $\sum\limits_{k=0}^{N} (a_k^m)^2 \to 0$ при $m \to \infty$, т. е. получаем противоречие. Лемма 3 доказана.

Из лемм 2 и 3 сразу следует оценка $(n > M)$

$$|(\overline{v}, g_n)_{L_2}| \le C \sum_{k=0}^{M} |a_k| \frac{1}{n^2 - k^2} \le C'|a| \left\{ \sum_{k=0}^{M} \frac{1}{(n^2 - k^2)^2} \right\}^{\frac{1}{2}} \le$$

$$\le C''|a| n^{-\frac{3}{2}} (M^{\frac{1}{2}} + \ln \frac{n + M}{n - M}) \le C'''|a| M^{\frac{1}{2}} n^{-\frac{3}{2}},$$

где $C''' > 0$– не зависит от n и M. Следовательно,

$$\sum_{k=M+1}^{n} |a_k|\, |(v, g_k)_{L_2}| \le C M^{\frac{1}{2}} |a| \left\{ \sum_{k=M+1}^{n} a_k^2 k^{-\frac{7}{4}} \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ \sum_{k=M+1}^{n} k^{-\frac{5}{4}} \right\}^{\frac{1}{2}} \le$$

$$\le C'|a| M^{\frac{3}{8}} \left\{ \sum_{k=M+1}^{n} a_k^2 k^{-\frac{7}{4}} \right\}^{\frac{1}{2}} \le C_1 a^2 M^{-\frac{1}{4}} + C_1 \sum_{k=M+1}^{n} a_k^2 k^{-\frac{7}{4}} M, \tag{15}$$

где $C_1 > 0$– не зависит от n и M.

Далее, используя результат леммы 2 и неравенства (11),(12), получаем

$$\sum_{\substack{k,m=M+1 \\ k \ne m}}^{n} |a_k|\, |a_m|\, |(g_k, g_m)_{L_2}| \le C M^{-2\gamma} \sum_{\substack{k,m=M+1 \\ k \ne m}}^{n} |a_k|\, |a_m| \frac{1}{|k^2 - m^2|} \le$$

$$\leq CM^{-2\gamma}\sum_{k=M+1}^{n}a_k^2\sum_{\substack{m=M+1\\ m\neq k}}^{n}\frac{1}{|k^2-m^2|}\leq C_2M^{-2\gamma}\sum_{k=M+1}^{n}a_k^2k^{-1}\ln(k+1), \qquad (16)$$

где $C_2>0$– не зависит от M и n.

Объединяя неравенства (15) и (16) и учитывая, что $q=\sum\limits_{k=0}^{n}a_kg_k$, $v=\sum\limits_{k=0}^{M}a_kg_k$ и $||q||_{L_2}=1$, получаем

$$1\geq a^2(1-CM^{-\frac{1}{4}})+\sum_{k=M+1}^{n}a_k^2(1-CMk^{-\frac{7}{4}}-CM^{-2\gamma}k^{-1}\ln(k+1)), \qquad (17)$$

где постоянная $C>0$– не зависит от M и n и $a=||v||_{L_2}$.

Положим $j(\lambda,u,v)=\int\limits_0^1[u'(x)v'(x)+V(\lambda,x)u(x)v(x)]dx$. Тогда $J(\lambda,u)=j(\lambda,u,u)$. Имеет место

Лемма 4

Существуют такие $C>0$ и $\rho>0$, что

$$J(\lambda_{n+1},q)\leq(\pi(n+1))^2+C(n+1)^{1-\rho}$$

для всех достаточно больших номеров n и функций $q=\sum\limits_{k=0}^{n+1}a_kg_k$, удовлетворяющих условию $||q||_{L_2}=1$.

Доказательство. Получим некоторые оценки. В силу лемм 1 и 3 имеем

$$j(\lambda_{n+1},v,\sum_{k=M+1}^{n+1}a_kg_k)=\sum_{k=M+1}^{n+1}a_k(-v''+V(\lambda_{n+1},x)v,g_k)_{L_2},$$

откуда $|j(\lambda_{n+1},v,\sum\limits_{M+1}^{n+1}a_kg_k)|\leq\sum\limits_{k=M+1}^{n+1}|a_k|\ |d_k|$, где

$$|d_k|=||-v''+V(\lambda_{n+1},x)v||_{L_2}\leq\sum_{k=0}^{M}|a_k|\ [(\pi k)^2+C]\leq C_1M^{\frac{5}{2}},$$

где $C_1>0$– не зависит от n и M. Поэтому в силу (17) для достаточно больших M и $n>M$

$$|j(\lambda_{n+1},v,\sum_{k=M+1}^{n+1}a_kg_k)|\leq C_2n^{\frac{1}{2}}M^{\frac{5}{2}}, \qquad (18)$$

где $C_2>0$– не зависит от n и M. Аналогично

$$|j(\lambda_{n+1},v,v)|\leq C_3M^3, \qquad (19)$$

где $C_3>0$– не зависит от n и M.

Получим еще одну оценку. Рассмотрим номера $m>k>M$. Тогда, в силу уравнения 1, условия (V3) и леммы 1 имеем

$$|j(\lambda_{n+1},g_k,g_m)|\leq CM^{-\delta},$$

где $C>0$ и $\delta>0$– не зависят от M, k и m. Отсюда и из (17) получаем

$$\sum_{k=M+1}^{n+1}\sum_{\substack{m=k+1\\ m\neq k}}^{n+1}|a_k|\ |a_m|\ |j(\lambda_{n+1},g_k,g_m)|\leq C_1M^{-\delta}n,$$

где $C_1>0$– не зависит от M и n.

Положим $M=[n^{\frac{1}{10}}]$, где $[s]$– целая часть числа $s\geq0$. Тогда из последнего неравенства, принципа минимакса и (17)-(19) получаем для достаточно больших номеров n (здесь $C>0$– постоянная из (17)):

$$J(\lambda_{n+1},q)\leq C_5n^{\frac{3}{4}}+C_4n^{1-\frac{\delta}{10}}+$$

$$+\sum_{k=M+1}^{n+1}a_k^2(1-Cn^{\frac{1}{10}}k^{-\frac{7}{4}}-Cn^{-\frac{\delta}{10}}k^{-1}\ln\,(k+1))\times$$

$$\times(1-Cn^{\frac{1}{10}}k^{-\frac{7}{4}}-Cn^{-\frac{\delta}{10}}k^{-1}\ln\,(k+1))^{-1}\times[(\pi(k+1))^2+C_2]\leq$$

$$\leq C_5n^{\frac{3}{4}}+C_4n^{1-\frac{\delta}{10}}+[(\pi(n+1))^2+C_2]\times$$

$$\times(1-Cn^{\frac{1}{10}}n^{-\frac{7}{4}}-Cn^{-1-\frac{\delta}{10}}\ln\,(n+1))^{-1}\leq C_5n^{\frac{3}{4}}+$$

$$+C_4n^{1-\frac{\delta}{10}}+[(\pi(n+1))^2+C_2]\times(1+Cn^{-1-\delta_1})\leq(\pi(n+1))^2+C(n+1)^{1-\rho}$$

и лемма 4 доказана.

Для доказательства первой части теоремы 2 теперь достаточно заметить, что $J(\lambda_{n+1}, u_{n+1}) \geq (\pi(n+2))^2$, следовательно, в силу леммы 4 и принципа минимакса для каждого достаточно большого номера n должно быть выполнено неравенство.

$$(\pi(n+1))^2 + C(n+1)^{1-\rho} \geq (\pi(n+2))^2.$$

Так как это неравенство неверно для всех достаточно больших номеров n, приходим к противоречию. Следовательно, если система функций $\{u_n(\lambda_n, x)\}_{n=0,1,2,...}$ линейно независима, то множество конечных линейных комбинаций функций из этой системы всюду плотно в L_2.

Докажем вторую часть теоремы 2. Очевидно, достаточно доказать, что системы функций

$$u_0(\lambda_n, x), ..., u_n(\lambda_n, x), u_{n+1}(\lambda_{n+1}, x), u_{n+2}(\lambda_{n+2}, x), ..., u_{n+k}(\lambda_{n+k}, x), ... \tag{20}$$

линейно независимы для всех достаточно больших номеров n. В самом деле, если система $\{u_n(\lambda_n, x)\}_{n=0,1,2,...}$ линейно зависима, а одна из указанных систем (при $n = n_0$) линейно независима, то коразмерность подпространства L_2, натянутого на функции $\{u_n(\lambda_n, x)\}_{n\geq n_0+1}$, больше или равна n_0+1, но по предположению одна из функций $u_0(\lambda_0, x), ..., u_n(\lambda_n, x)$ линейно выражается через остальные функции системы $\{u_n(\lambda_n, x)\}$ $(n = 0, 1, 2, ...)$, следовательно, замыкание линейной оболочки этой системы имеет коразмерность, не меньшую 1.

Докажем, что для всех достаточно больших номеров n системы вида (20) линейно независимы. Предположим противное. Тогда

$$\sum_{k=0}^{n} a_k u_k(\lambda_n, x) + \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k u_k(\lambda_k, x) = 0 \tag{21}$$

для некоторого n и некоторого набора чисел a_k, среди которых есть отличные от нуля. Покажем, что этого не может быть для всех достаточно больших номеров n.

Имеют место следующие утверждения:

1) $(u_k(\lambda_n, x), u_m(\lambda_n, x))_{L_2} = 0$ при $k, m \leq n,\ k \neq m$;

2) при $k \leq n,\ m > n$ имеем, как и в лемме 2:

$$|(u_k(\lambda_n, x), u_m(\lambda_m, x))_{L_2}| \leq$$

$$\leq Cn^{-2\gamma}\frac{1}{m^2 - k^2},$$

где $C > 0$ – не зависит от m, n и k;

3) при $m > k > n$ имеем, как и в лемме 2:

$$|(u_k(\lambda_k, x), u_m(\lambda_m, x))_{L_2}| \leq Cn^{-2\gamma}\frac{1}{m^2 - k^2},$$

где $C > 0$ – не зависит от k и m.

В силу леммы 3 среди чисел $|a_k|$ $(k = 0, 1, 2, ...)$ существует максимальное. Пусть это $|a_{k_0}|$. Возможны два случая: (а) $k_0 \leq n$ и (б) $k_0 > n$. Рассмотрим сначала случай (а). Умножим скалярно в L_2 равенство (21) на u_{k_0}, получим в силу (12)

$$|a_{k_0}| \leq \sum_{k>n} |a_k|\, |(u_{k_0}(\lambda_n, x), u_k(\lambda_k, x))_{L_2}| \leq$$

$$\leq Cn^{-2\gamma} \sum_{k>n} |a_k| \frac{1}{k^2 - n^2} \leq C'|a_{k_0}| n^{-2\gamma}.$$

Это неравенство противоречиво, если n достаточно велико.

Рассмотрим случай (б). Опять умножим равенство (21) скалярно на $u_{k_0}(\lambda_{k_0}, x)$. Получим в силу (11) и (12)

$$|a_{k_0}| \leq C''|a_{k_0}| n^{-\beta} + \sum_{\substack{k=n+1\\ k\neq k_0}}^{\infty} |a_k|\, |(u_k(\lambda_k, x), u_{k_0}(\lambda_{k_0}, x))_{L_2}| \leq C_1 |a_{k_0}| n^{-\delta},$$

где $C_1 > 0$, $\beta > 0$ и $\delta > 0$ – не зависят от коэффициентов a_k и n. Поскольку это неравенство также противоречиво для достаточно больших номеров n, второе утверждение теоремы 2 полностью доказано. Тем самым теорема 2 полностью доказана.

Теорема 3

Пусть функции $V_1(x)$ и $V_2(\lambda, x)$ непрерывны и ограничены на множестве $(x, \lambda) \in [0, 1] \otimes [0, \infty)$ вместе с производной $\frac{\partial V(\lambda, x)}{\partial \lambda}$. Пусть $V_2(\lambda, x) - \overline{V}(x) = O(\lambda^{-\gamma})$ при $\lambda \to \infty$, где $\gamma > \frac{1}{2}$. Тогда существует $\epsilon_1 \in (0, \epsilon_0)$, где ϵ_0 – постоянная из предложения 2, такое, что при $|\epsilon| < \epsilon_1$ собственные функции $u_n(\lambda_n, x)$ задачи (1)-(2) образуют базис *в пространстве L_2 (здесь для каждого целого неотрицательного n в силу предложения 2 существует единственное $\lambda = \lambda_n > 0$, при котором задача* (1)-(2) *имеет решение, обладающее ровно n корнями в интервале* $(0,1)$).

Доказательство. В силу доказанных теоремы 2 и предложения 2 достаточно доказать, что при достаточно малых ϵ собственные функции $\{u_n\}_{n=0,1,2,...}$ линейно независимы. Как и выше (см. лемму 2), нетрудно получить оценку

$$|(u_n, u_m)_{L_2}| \leq \alpha(\epsilon)\frac{1}{|n^2 - m^2|}, \tag{22}$$

где $n \neq m$, $\alpha(\epsilon) \to +0$ при $\epsilon \to +0$ и функция $\alpha(\epsilon)$ не зависит от n и m. Предположим, что выполнено равенство

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n u_n = 0 \tag{23}$$

для некоторых коэффициентов a_n (конечно, в этом равенстве коэффициенты a_n и функции u_n зависят от ϵ). Поскольку в силу леммы 3 $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 0$, существует номер n_0 такой, что $|a_{n_0}| \geq |a_n|$ для всех $n = 0, 1, 2, \ldots$. Умножим равенство (23) скалярно в L_2 на u_{n_0}, тогда, учитывая оценку (22), получим

$$|a_{n_0}| \leq \sum_{n\neq n_0} |a_n|\, |(u_n, u_{n_0})_{L_2}| \leq |a_{n_0}|\alpha(\epsilon) \sum_{n\neq n_0} \frac{1}{|n^2 - n_0^2|} \leq C|a_{n_0}|\alpha(\epsilon),$$

где $\lim\limits_{\epsilon\to+0} \alpha(\epsilon) = 0$, откуда следует, что $a_{n_0} = 0$ для всех достаточно малых $|\epsilon|$. В силу теоремы 2 теорема 3 доказана.

Замечание

Отметим, что для доказательства линейной независимости системы функций $\{u_n\}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ в теореме 3 использовались лишь непрерывность и ограниченность функций $V_1(x)$ и $V_2(\lambda, x)$.

4 Пример

Приведем пример потенциала $V(\lambda, x)$, удовлетворяющего предположениям (V1),(V2),(V3) и такого, что множество линейных комбинаций

собственных функций задачи (1)-(2) не является всюду плотным в L_2. В дальнейшем будем говорить, что вещественная функция $w(x)$, определенная на отрезке $[0,1]$, удовлетворяет условию (H), если

1) $w \in C^3[0,1]$;
2) функция w имеет конечное число корней в интервале $(0,1)$;
3) если $w(x_0) = 0$, то $w''(x_0) = 0$ и $w'(x_0) \neq 0$ (здесь $x_0 \in [0,1]$).

Ясно, что существуют функции u_0 и u_1, удовлетворяющие условию (H), такие, что $u_0(0) = u_0(1) = u_1(0) = u_1(1) = 0$, $u_0(x) > 0$ при $x \in (0,1)$, а функция u_1 имеет единственный корень в интервале $(0,1)$, и при этом некоторая их линейная комбинация $u_2 = au_0 + bu_1$ удовлетворяет условию (H) и имеет ровно два корня в интервале $(0,1)$. Возьмем произвольные $0 < \lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2$. Тогда, как нетрудно убедиться, существует трижды непрерывно дифференцируемая по x вещественная функция $u(\lambda, x)$, определенная на множестве $(\lambda, x) \in [\lambda_0, \lambda_2] \otimes [0,1]$, такая, что при любом фиксированном λ она, как функция аргумента x, удовлетворяет условию (H), $u(\lambda, 1) \neq 0$ при $\lambda \neq \lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$ и $u(\lambda_i, x) = u_i(x)$, где $i = 0, 1, 2$.

Положим

$$V(\lambda, x) = \lambda + \frac{u''_{xx}(\lambda, x)}{u(\lambda, x)}$$

и доопределим эту функцию по непрерывности для всех $x \in [0,1]$, $\lambda \in [\lambda_0, \lambda_2]$. Ясно, что при любом фиксированном $\lambda \in [\lambda_0, \lambda_2]$ $V(\lambda, x)$– –непрерывная функция. Положим $V(\lambda, x) = V(\lambda_2, x)$ для $\lambda > \lambda_2$ и $V(\lambda, x) = V(\lambda_0, x)$ для $\lambda < \lambda_0$. Тогда очевидно, что функция $V(\lambda, x)$ удовлетворяет условиям (V1),(V3). В силу теоремы сравнения собственными функциями задачи (1)-(2) с построенным потенциалом $V(\lambda, x)$ являются функции u_0, u_1, u_2 и собственные функции u_n задачи (1)-(2) с потенциалом $V(\lambda_2, x)$, где $n \geq 3$, а функция u_n $(n \geq 3)$ имеет ровно n корней в интервале $(0,1)$, и только эти функции. Наконец, чтобы добиться выполнения условия (V2), достаточно взять потенциал $V_1(\lambda, x) = V(\lambda - A, x) + A$, где $A > 0$ – достаточно большая постоянная, так что $V_1(\lambda, x) \geq 0$ для всех пар (λ, x). Как нетрудно проверить, система собственных функций при такой замене потенциала остается неизменной. Поскольку эта система линейно зависима, по теореме 2 множество линейных комбинаций функций из нее не является всюду плотным в L_2, и требуемый пример построен.

Профессор В.А. Мещеряков обратил внимание автора на класс задач, одна из которых рассмотрена в работе. Автор выражает ему за это благодарность.

Список литературы

1. Logunov A.A., Tavkhelidze A.N. Nuovo Cim. 1963. V. **29**. No 2. P. 380.

2. Kadyshevsky V.G., Mir-Kasimov R.M., Skachkov N.B. Nuovo Cim. 1968. V. **55A**. No 2. P. 233.

3. Габов С.Ф., Малышева Г.Ю. Ж-л Выч. Мат. и Мат. Физ. 1984. Т. **24**. No 6. С. 893.

4. Khoromskii B.N., Makarenko T.M., Nikonov E.G., Skachkov N.B., Zhidkov E.P. Numerical methods for solving relativistic equations describing bound states of a double-particle system. In: "Proceedings of the International Conference on Programming and Mathematical methods for Solving Physical Problems, Dubna, 1993" (Ed. by Yu.Yu. Lobanov and E.P. Zhidkov), World Scientific Publ. 1994. P. 210.

5. Jaulent M., Jean C. Commun. Math. Phys. 1972. V. **28**. P. 177.

6. Antonowicz M., Fordy A.P. Physics Letters **A**. 1987. V. **122**. No 2. P. 95.

7. Antonowicz M., Fordy A.P. Commun. Math. Phys. 1989. V. **124**. P. 465.

8. Махмудов А.П. ДАН СССР. 1982. Т. **263**. No 1. С. 23.

9. Марченко В.А. Операторы Штурма-Лиувилля и их приложения. Киев: Наукова Думка, 1977.

10. Левитан Б.М., Саргсян И.С. Операторы Штурма-Лиувилля и Дирака. М.: Наука, 1988.

11. Люстерник Л.А., Соболев В.И. Элементы функционального анализа. М.: Наука, 1965.

12. Титчмарш Э.Ч. Разложения по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка, Т. 1. М.: ИЛ, 1960.

Рукопись поступила в издательский отдел
14 февраля 1996 года.