

ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

96-477

P5-96-477

В.Ф.Ковалев*

РЕНОРМГРУППОВЫЕ СИММЕТРИИ В ЗАДАЧАХ
НЕЛИНЕЙНОЙ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ОПТИКИ

Направлено в журнал «Теоретическая и математическая физика»

*Институт математического моделирования РАН

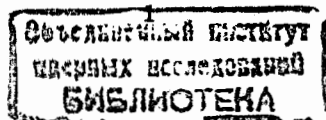
1996

1. Введение

При исследовании физических систем, поведение которых описывается на языке дифференциальных уравнений (ДУ) (обыкновенных и с частными производными) существенную помощь оказывает знание допускаемой группы симметрии, позволяющее регулярным способом находить точные решения этих уравнений. Применительно к анализу краевых задач для уравнений математической физики особый интерес представляет специальный класс симметрий, так называемые симметрии ренормгруппового типа (РГ-симметрии), способ построения которых на основе методов группового анализа суммирован в работах [1, 2]. Этот способ включает ряд последовательных шагов, таких как конструирование специального ренормгруппового многообразия, нахождение допускаемой им группы преобразований и последующее ее сужение на искомом решении краевой задачи, а также использование операторов РГ-симметрий для получения аналитических выражений для точного или приближенного решения краевой задачи.

В данной работе построение операторов РГ-симметрий и нахождение с их помощью решений краевой задачи осуществляется для уравнений нелинейной геометрической оптики, описывающих распространение мощного лазерного излучения в нелинейной среде в пренебрежении дифракционными эффектами². Исходные уравнения и граничные условия к ним в случае плоского (двумерного) и цилиндрического (трехмерного) лазерного пучка сформулированы во втором разделе работы. Построение РГ-симметрий по описанному в [1, 2] методу проведено в третьем разделе работы вначале для плоского, а затем и для трехмерного лазерного пучка. Показано, что координаты операторов РГ-симметрий могут быть представлены в виде бесконечных рядов по степеням произведения параметра нелинейности среды на интенсивность лазерного излучения на ее границе. Для краевых данных специального вида эти ряды обрываются, и возникающая при этом конечная сумма характеризует точную РГ-симметрию краевой задачи при произвольном значении параметра нелинейности среды. В общем случае краевых данных произвольного вида ограничение конечным числом слагаемых соответствующих рядов приводит при малой величине параметра нелинейности к приближенной РГ-симметрии. Указан новый

²Различные подходы к исследованию этих уравнений и полученные частные решения обсуждались ранее в ряде работ (см., например, [3, 4, 5] и цитированную там литературу).



вид РГ-симметрий, получаемых развитием ранее изложенного метода [1, 2]. Использование условий инвариантности относительно операторов точной и приближенной РГ-симметрии порождает решения краевой задачи, приведенные в четвертом разделе работы. Для ряда конкретных примеров, соответствующих заданной кривой распределения интенсивности пучка на границе нелинейной среды (в виде гауссовой кривой, в виде "размытой" ступеньки, в виде солитона) и плоскому фазовому фронту, получены формулы, в замкнутой аналитической форме определяющие распределение интенсивности и производной эйконала лазерного излучения в среде, а также положение точки, в которой возникает особенность решения. В заключение рассмотрена возможность дальнейшего использования как уже найденных РГ-симметрий, так и симметрий, которые могут возникнуть при изменении математической модели, используемой для описания процесса распространения излучения в нелинейной среде.

2. Исходные уравнения

Для описания процесса нелинейной рефракции мощного излучения запишем в качестве исходных (см., например, [3]) следующую пару эллиптических ДУ в частных производных первого порядка:

$$v_t + vv_x = a\varphi(n)n_x, \quad n_t + vn_x + nv_x + (m/x)nv = 0. \quad (2.1)$$

Здесь v – производная эйконала по поперечной координате x , n – интенсивность лазерного пучка, распространяющегося вдоль оси t , функция φ зависит только от n и характеризует нелинейность среды с параметром нелинейности a . Величина m принимает значение $m = 0$ для двумерного пучка и $m = 1$ для трехмерного пучка.

Ниже будем считать, что на входе в нелинейную среду (т.е. при $t = 0$) заданы нулевая кривизна волнового фронта пучка и распределение его интенсивности n по координате x :

$$n(0, x) = N(x); \quad v(0, x) = 0. \quad (2.2)$$

Отличительной особенностью двумерного пучка с $m = 0$ является возможность линеаризации исходной системы уравнений (2.1) преобразованием годографа. После перехода к переменным $\tau = nt$ и $\chi = x - vt$ и

введения нормированной производной эйконала $w = v/a$ система уравнений (2.1) записывается в виде пары линейных ДУ:

$$\tau_w - (n/\varphi(n))\chi_n = 0, \quad \chi_w + a\tau_n = 0. \quad (2.3)$$

Для трехмерного пучка с $m = 1$ преобразование годографа приводит систему нелинейных ДУ (2.1) также к нелинейной системе ДУ

$$\tau_w - (n/\varphi(n))\chi_n = 0, \quad \chi_w + a \left[\tau_n + \frac{w}{\chi} \left(\tau_n \chi_w - \frac{n}{\varphi(n)} \chi_n^2 \right) \right] + \frac{a^2 w}{n^2 \chi} [2n\tau\tau_n - \tau^2] = 0. \quad (2.4)$$

3. Построение ренормгрупповых симметрий

3.1. РГ-симметрии для двумерного пучка: $m = 0$

Первым шагом на пути построения РГ-симметрий является конструирование РГ-многообразия, роль которого в нашем случае играет система исходных ДУ (2.3), рассматриваемых в расширенном пространстве переменных, включающем не только зависимые и независимые переменные τ , χ , w , n и параметр нелинейности a , но и производные τ и χ по n произвольного порядка. Следующие шаги в этом направлении, а именно отыскание РГ-симметрий методом сужения группы точечных симметрий и симметрий Ли-Беклунда [6, 7], допускаемых таким РГ-многообразием, обсуждались в предшествующих работах (см., например, [8, 9, 10]) для двумерного лазерного пучка с $m = 0$. Было показано, что любая комбинация конечного числа операторов конечной подгруппы точечной группы и группы Ли-Беклунда заданного порядка не порождает, вообще говоря, РГ-симметрию при произвольных краевых данных (2.2). Использование бесконечной подгруппы точечной группы, допускаемой уравнениями (2.1) и (2.3), также не решает проблему записи РГ-симметрий в явном виде, поскольку отыскание этой подгруппы фактически эквивалентно решению исходных уравнений (2.3).

Ниже для получения РГ-симметрий воспользуемся следующим приемом: представим координаты f и g канонического оператора группы, допускаемой уравнениями (2.3),

$$X = f\partial_\tau + g\partial_\chi \quad (3.1)$$

в виде ряда по степеням параметра нелинейности³:

$$f = \sum_{i=0}^{\infty} a^i f^i; \quad g = \sum_{i=0}^{\infty} a^i g^i. \quad (3.2)$$

Функции f^i и g^i в (3.2) находятся решением соответствующих определяющих уравнений, выражающих условия инвариантности системы ДУ (2.3) относительно группы с оператором (3.1). Ввиду громоздкости сами определяющие уравнения и способ их решения здесь опущены и приводится лишь окончательный результат в виде формул для координат f^i и g^i оператора искомой группы. Последние даются следующей системой рекуррентных соотношений:

$$f^0 = F^0 + \int dw \left\{ \frac{n}{\varphi} \left[\partial_n + \sum_{s=0}^{\infty} (\tau_{s+1} \partial_{\tau_s} + \chi_{s+1} \partial_{\chi_s}) \right] g^0 \right\}, \quad g^0 = G^0, \quad (3.3)$$

$$f^i = F^i + \int dw \left\{ \sum_{s=0}^{\infty} \tau_{s+1} \partial_{\chi_s} f^{i-1} + \frac{n}{\varphi} \left[\partial_n + \sum_{s=0}^{\infty} (\tau_{s+1} \partial_{\tau_s} + \chi_{s+1} \partial_{\chi_s}) \right] g^i \right\},$$

$$g^i = G^i + \int dw \left\{ \sum_{s=0}^{\infty} \tau_{s+1} \partial_{\chi_s} g^{i-1} - \left[\partial_n + \sum_{s=0}^{\infty} (\tau_{s+1} \partial_{\tau_s} + \chi_{s+1} \partial_{\chi_s}) \right] f^{i-1} \right\},$$

$$\tau_s = \frac{\partial^s \tau}{\partial n^s}, \quad \chi_s = \frac{\partial^s \chi}{\partial n^s}, \quad \tilde{\tau}_s = \tau_s - w \sum_{p=0}^s \binom{s}{p} \frac{\partial^p (n/\varphi)}{\partial n^p} \chi_{s-p+1}, \quad i \geq 1. \quad (3.4)$$

Здесь $F^i(n, \chi_s, \tilde{\tau}_s)$ и $G^i(n, \chi_s, \tilde{\tau}_s)$ ($i \geq 0$) – произвольные функции своих аргументов, а выражения в фигурных скобках перед интегрированием по переменной w должны быть записаны в переменных $\tilde{\tau}_s, \chi_s, n, w$. Соотношения (3.3)-(3.4) записаны для функции $\varphi(n)$ произвольного вида, но ниже в конкретных приложениях (если не оговорено особо) всюду полагается $\varphi(n) = 1$, т.е. рассматривается среда с кубичной нелинейностью.

Процедура сужения найденной группы (3.3)-(3.4) на решении краевой задачи для получения РГ-симметрий, заключающаяся в проверке условий инвариантности этого решения относительно РГ-оператора, налагает ограничения на вид функций $F^i, G^i, i \geq 0$. Они не являются произвольными, но выбираются таким образом, чтобы соотношения

$$f = 0, \quad g = 0 \quad (3.5)$$

³Симметрии подобного рода были названы в [11] *формальными* симметриями.

обращались в тождества на искомом решении краевой задачи и удовлетворяли при $\tau = 0$ заданным краевым данным (2.2), которые на языке переменных (τ, χ) формулируются следующим образом:

$$w = 0, \quad \tau_s = 0, \quad \chi = H(n). \quad (3.6)$$

Если при этом функции $F^i, G^i, i \geq 1$ также равны нулю, то краевые данные налагают ограничения только на вид функций F^0 и G^0 . По существу, соотношения (3.5) принимают вид дифференциальных связей (в частном случае – просто алгебраических соотношений), которым удовлетворяют краевые данные. Особый интерес представляют функции f^0 и g^0 такого вида, при котором ряды (3.2) обрываются при некотором конечном значении $i = i_{max}$ и превращаются в конечную сумму. В качестве примера приведем следующий оператор РГ-симметрии:

$$R = \left(2n(1-n)\tau_2 - n\tau_1 - 2nw(\chi_1 + n\chi_2) + \frac{a}{2}nw^2\tau_2 \right) \partial_\tau + \left(2n(1-n)\chi_2 + (2-3n)\chi_1 + aw(2n\tau_2 + \tau_1) + \frac{aw^2}{2}(n\chi_2 + \chi_1) \right) \partial_\chi, \quad (3.7)$$

который является оператором симметрии Ли-Беклунда второго порядка для ДУ (2.3). Координаты f и g оператора (3.7) имеют вид биномов $f = f^0 + af^1$ и $g = g^0 + ag^1$. Легко проверить прямой подстановкой явных выражений для f^0, g^0 и f^1, g^1 в (3.3)-(3.4), что все последующие приближения с $i \geq 2$ обращаются в нуль, т.е. (3.7) дает точное выражение для оператора РГ-симметрии. Эта симметрия порождает решение краевой задачи (см. ниже формулу (4.1)) с граничным условием $N = \cosh^{-2}(x)$, полностью определяемым видом функции g^0 .

Другим примером РГ-симметрии, представляемым функциями f и g в виде биномов $f = f^0 + af^1$ и $g = g^0 + ag^1$, является следующий РГ-оператор:

$$R = \left(n(1-n)\tau_2 - n\tau_1 - nw\left(\frac{5}{4}\chi_1 + n\chi_2\right) + \frac{a}{4}nw^2\tau_2 \right) \partial_\tau + \left(n(1-n)\chi_2 + (1-2n)\chi_1 - \frac{1}{4}\chi + aw\left(n\tau_2 + \frac{3}{4}\tau_1\right) + \frac{aw^2}{4}(n\chi_2 + \chi_1) \right) \partial_\chi. \quad (3.8)$$

Он также является оператором симметрии Ли-Беклунда второго порядка для ДУ (2.3). Симметрия (3.8) порождает решение краевой

задачи (см. ниже формулу (4.2)) с более сложным видом граничных условий, выражаемых через полные эллиптические интегралы

$$H(n) = \frac{2}{1 + \sqrt{n}} \left(K \left(\frac{2n^{1/4}}{1 + \sqrt{n}} \right) - \frac{6}{\pi} K \left(\frac{1 - \sqrt{n}}{1 + \sqrt{n}} \right) \right).$$

При произвольных краевых данных, т.е. при произвольной функции $H(n)$ в (3.6), ряды (3.2) не обрываются, однако и в этом случае можно ограничиться конечным числом членов ряда при условии малости параметра нелинейности a . Учет малого параметра, по существу, означает, что при нахождении РГ-симметрий используется алгоритм приближенной группы. При этом из исходной системы ДУ выделяется более простая подсистема, которая получается из (2.3) отбрасыванием второго слагаемого во втором уравнении:

$$\tau_w - (n/\varphi(n))\chi_n = 0, \quad \chi_w = 0. \quad (3.9)$$

В отличие от уравнений (2.3), допускающих лишь конечную группу неточечных симметрий заданного порядка, симметрия уравнений (3.9) бесконечномерна и характеризуется произвольной зависимостью от всех своих аргументов координат $f = f^0$ и $g = g^0$ (3.3) канонического оператора группы. При малом, но отличном от нуля значении параметра a , симметрия уравнений (3.9) наследуется (в смысле [11]) системой уравнений (2.3) в любом конечном порядке по параметру a . При этом в качестве симметрии нулевого приближения может выступать как точечная симметрия Ли, так и симметрия Ли-Беклунда. Вид наследуемой симметрии при этом целиком определяется соотношениями (3.4): она может быть как точечной, так и симметрией Ли-Беклунда. Процедура сужения найденной приближенной группы на решении краевой задачи завершает построение искомым РГ-симметрий.

Произвольная зависимость функций F^0, G^0 от своих аргументов позволяет конструировать приближенные РГ-симметрии для любого вида краевых данных (2.2). В качестве примера приведем оператор РГ-симметрии для лазерного пучка с плоским фазовым фронтом и гауссовым распределением интенсивности на границе $\tau = 0$ среды (гауссов пучок):

$$H(n) = (\ln(1/n))^{1/2}. \quad (3.10)$$

Такому краевому условию соответствует, в частности, следующий выбор функции f^0, g^0 :

$$f^0 = 1 + 2n\chi\chi_1, \quad g^0 = 0. \quad (3.11)$$

В этом случае точечная приближенная РГ-симметрия восстанавливается с помощью формул (3.3)-(3.4) и в следующем порядке по параметру нелинейности имеет вид:

$$R = -2\chi\partial_w + 2a\tau\partial_n + \left(1 + \frac{a\tau^2}{n}\right)\partial_\tau. \quad (3.12)$$

Проведенные выше построения РГ-симметрий легко обобщаются на тот случай, когда наряду с "естественными" переменными задачи в групповых преобразованиях участвует также параметр нелинейности a . При этом, как правило, происходит расширение набора возможных РГ-симметрий. Ограничиваясь для наглядности группой точечных преобразований, запишем соотношения, определяющие вид оператора приближенной группы для системы ДУ (2.3) при $\varphi = 1$ с учетом преобразования параметра a :

$$X = \sum_{i=1}^4 X_i + \sum_{i=1}^2 C^i X_{i+4}, \quad (3.13)$$

$$X_1 = \frac{aw^2}{2n} J_x^1 \partial_w - a \left(\frac{\tau}{n} J_x^1 + w J_n^1 \right) \partial_x + \left(J^1 - \frac{a\tau^2}{2n} J_{xx}^1 - \frac{anw^2}{2} J_{nn}^1 - anw\tau (J_x^1/n)_n \right) \partial_\tau,$$

$$X_2 = \left(J^2 - \frac{anw^2}{2} J_{nn}^2 - \frac{a\tau^2}{2n} J_{xx}^2 - aw\tau J_{nx}^2 \right) \partial_w - a \left(\tau J_x^2 + nw J_n^2 \right) \partial_n - \frac{a\tau^2}{2n} J_x^2 \partial_\tau,$$

$$X_3 = \left(nw I_n^1 - \frac{anw^3}{6} (n I_n^1)_{nn} \right) \partial_\tau + \left(I^1 - \frac{aw^2}{2} (n I_n^1)_n \right) \partial_x,$$

$$X_4 = \frac{aw^3}{6} \chi I_n^2 \partial_w + \left(\chi I^2 - aw\tau I_n^2 - \frac{aw^2}{2} \chi (n I_n^2)_n \right) \partial_x + \left(nw \chi I_n^2 + \tau I^2 - \frac{anw^3}{6} \chi (n I_n^2)_{nn} - \frac{anw^2}{2} \tau I_{nn}^2 \right) \partial_\tau,$$

$$X_5 = w\partial_w + 2n\partial_n + \tau\partial_\tau, \quad X_6 = w\partial_w - 2a\partial_a + \tau\partial_\tau.$$

Здесь $J^i(n, \chi)$ и $I^i(n)$ – произвольные функции своих аргументов, C^i – произвольные постоянные. Сужение группы (3.13) на решении краевой задачи (2.2), (2.3) приводит к двум соотношениям, характеризующим связь между функциями $J^i(n, \chi)$, $I^i(n)$ и постоянными C^i . При $w = 0$, $\tau = 0$ эти соотношения принимают следующий вид:

$$J^1 - (n\chi_n)J^2 = 0, \quad I^1 + H(n)I^2 - 2(nH_n)C^1 = 0, \quad (3.14)$$

причем в первом из них произведение $(n\chi_n)$ должно быть выражено в терминах переменных n и χ с учетом краевых данных (2.2), т.е. $(n\chi_n) = h(n, \chi)$. Использование связей (3.14) в (3.13) дает искомую РГ-симметрию, характеризуемую четырьмя РГ-операторами,

$$R = \sum_{i=1}^2 R_i + \sum_{i=1}^2 C^i R_{i+2}, \quad (3.15)$$

$$R_1 = \left[J^2 + a \left(\frac{w^2}{2n} (hJ^2)_\chi - \frac{nw^2}{2} J_{nn}^2 - \frac{\tau^2}{2n} J_{\chi\chi}^2 - \tau w J_{n\chi}^2 \right) \right] \partial_w - a \left(wnJ_n^2 + \tau J_\chi^2 \right) \partial_n - a \left[w(hJ^2)_n + \frac{\tau}{n} (hJ^2)_\chi \right] \partial_\chi + \left[hJ^2 - a \left(\frac{nw^2}{2} (hJ^2)_{nn} + \frac{\tau^2}{2n} ((hJ^2)_{\chi\chi} + J_\chi^2) + nw\tau \left(\frac{hJ^2}{n} \right)_n \right) \right] \partial_\tau,$$

$$R_2 = a \frac{w^3}{6} I_n^2 \partial_w + \left(\tau I^2 + nw(\chi I_n^2 - (HI^2)_n) - a \left(\frac{nw^2}{2} \tau I_{nn}^2 + \frac{nw^3}{6} (\chi(nI_n^2)_{nn} - (n(HI^2)_n)_{nn}) \right) \right) \partial_\tau + \left[(\chi - H)I^2 - a \left[\tau w I_n^2 + \frac{w^2}{2} (\chi(nI_n^2)_n - (n(HI^2)_n)_n) \right] \right] \partial_\chi,$$

$$R_3 = w \partial_w + 2n \partial_n + \tau \partial_\tau + \left(2nw(nH_n)_n - a \frac{nw^3}{3} (n(nH_n)_n)_{nn} \right) \partial_\tau + \left(2(nH_n)_n - aw^2 (n(nH_n)_n)_n \right) \partial_\chi,$$

$$R_4 = w \partial_w - 2a \partial_a + \tau \partial_\tau,$$

Как следует из этих формул, учет преобразований параметра a расширяет группу точечных РГ-симметрий, задаваемую операторами R_1 , R_2 и R_3 , еще на один оператор R_4 . Будучи полученным в рамках алгоритма приближенной группы, этот оператор тем не менее является оператором точной РГ-симметрии при произвольном значении параметра a и произвольных краевых данных (доказательство этого утверждения приведено в приложении 1). Полученный набор РГ-операторов R_i содержит точечные РГ-симметрии; порождаемые формулами (3.3)-(3.4). Так, например, для гауссова пучка оператор РГ-симметрии (3.12) следует из формулы для оператора R_1 при $h(n, \chi) = -(1/2\chi)$ и $J^2 = -2\chi$.

В обсуждавшихся выше примерах РГ-симметрии в рамках упомянутого подхода [1, 2] получались при сужении приближенной группы преобразований, допускаемой исходным РГ-многообразием, на решении краевой задачи. Дальнейшим развитием этого подхода служит демонстрируемый ниже простой пример построения РГ-симметрий, когда процедура сужения (т.е. "привязка" к решениям определенного вида) частично выполняется на этапе решения определяющих уравнений группы, и в этом смысле получаемая симметрия не является симметрией исследуемой системы ДУ в классическом понимании, но, как следует из дальнейшего, также позволяет получить информацию о структуре решения краевой задачи.

Воспользуемся тем фактом, что искомое решение краевой задачи (2.2)-(2.3) формально можно представить в виде ряда (см. приложение 1):

$$\tau = w \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} (aw^2)^k (n\partial_{nn})^k (nH_n), \quad (3.16)$$

$$\chi = H + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} (aw^2)^k \partial_n (n\partial_{nn})^{k-1} (nH_n).$$

Для симметричного распределения интенсивности пучка на границе среды $N(x) = N(-x)$ является очевидным, что эта симметрия сохраняется и в дальнейшем, т.к. уравнения (2.3) допускают преобразование отражения $\chi \rightarrow -\chi$, $w \rightarrow -w$. Это означает, что на оси пучка фазовый фронт не искривляется: $w = 0$ при $x = 0$. Прямым дифференцированием формул (3.16) можно убедиться в том, что на оси пучка также тождественно обращаются в нуль производные τ_a и χ_a (при этом производные τ_w и χ_w отличны от нуля!). Воспользуемся этим обстоятельством и при решении определяющих уравнений, будем считать

выполненными следующие дополнительные условия:

$$\partial_a \chi = \partial_a \tau = 0. \quad (3.17)$$

В результате получим группу точечных преобразований

$$X = \sum_{k=1}^6 C_k(a) X_k + X_\infty + Y_\infty \quad (3.18)$$

с общим элементом, представляемым в виде суммы шести операторов конечной подгруппы

$$X_1 = 2(n\chi - aw\tau)\partial_w - 2an(\tau + w\chi)\partial_n + 2a^2(\tau - w\chi)\partial_a - a\tau^2\partial_\tau,$$

$$X_2 = \tau\partial_w + n\chi\partial_n + a\chi\partial_a, \quad X_3 = w\partial_w - 2a\partial_a - \chi\partial_\chi, \quad X_4 = \tau\partial_\tau + \chi\partial_\chi,$$

$$X_5 = aw^2\partial_w - 4a^2w\partial_a + 2n\chi\partial_\tau - 2a(\tau + w\chi)\partial_\chi,$$

$$X_6 = aw^3\partial_w - 6a^2w^2\partial_a + 6n(\tau + w\chi)\partial_\tau + (6n\chi - 6aw\tau - 3aw^2\chi)\partial_\chi$$

и двух операторов бесконечной подгруппы

$$X_\infty = \xi_1\partial_w + n\xi_2\partial_n + a\xi_2\partial_a, \quad Y_\infty = \eta_1\partial_\tau + \eta_2\partial_\chi;$$

$$a(\xi_1)_n + (\xi_2)_w = 0, \quad (\xi_1)_w - n(\xi_2)_n = 0;$$

$$a(\eta_1)_n + (\eta_2)_w = 0, \quad (\eta_1)_w - n(\eta_2)_n = 0.$$

Сужение этой группы на решении краевой задачи (2.2)-(2.3) дает связь между координатами операторов ξ и η при произвольных значениях w и, следовательно, при $w = 0$ и $\tau = 0$, когда величина χ определяется краевым условием (3.6):

$$-2n^2 H H_n C^1 + 2n H C^5 + \eta_1(0, n, a) - n H_n \xi_1(0, n, a) = 0,$$

$$-n H H_n C^2 + H(C^4 - C^3) + 6n H C^6 + \eta_2(0, n, a) - n H_n \xi_2(0, n, a) = 0. \quad (3.19)$$

Для гауссова пучка с граничным условием (3.10) соотношения (3.19), в частности, выполняются при следующих отличных от нуля значениях входящих в (3.19) функций:

$$C^2 = 2, \quad \eta_2 = -1, \quad (3.20)$$

которым соответствует оператор РГ-симметрии

$$R = 2\tau\partial_w + 2n\chi\partial_n + 2a\chi\partial_a - \partial_\chi. \quad (3.21)$$

Можно надеяться, что получаемая при таком подходе группа описывает симметрию семейства решений краевых задач (2.3)-(2.2) с $N(x) = N(-x)$, по крайней мере, при достаточно малых χ , т.е. в приосевой области.

3.2. РГ-симметрии для трехмерного пучка: $m = 1$

Для трехмерного лазерного пучка с $m = 1$ построение РГ-симметрий сужением группы вида (3.1)-(3.2), допускаемой системой ДУ (2.4), выполняется аналогично рассмотренному выше варианту с $m = 0$. При этом координаты f^0 и g^0 по-прежнему даются формулами (3.3), однако по сравнению с рекуррентными соотношениями типа (3.4) выражения для координат оператора f^i и g^i при $i \geq 1$ возникают в результате более сложных вычислений. Ниже мы приведем явные формулы лишь для координат f^1 и g^1 в частном случае среды с кубической нелинейностью ($\varphi = 1$):

$$\begin{aligned} f^1 &= F^1 + \int dw \left\{ \sum_{s=0}^{\infty} \left(\tau_{s+1} - w \left(\frac{n\chi_1^2}{\chi} \right)_s \right) \partial_{\chi_s} f^0 \right. \\ &\quad \left. + n \left[\partial_n + \sum_{s=0}^{\infty} (\tau_{s+1} \partial_{\tau_s} + \chi_{s+1} \partial_{\chi_s}) \right] g^1 \right\}, \\ g^1 &= G^1 - \frac{nw\chi_1^2}{\chi^2} g^0 + 2 \frac{nw\chi_1}{\chi} \left[\partial_n + \sum_{s=0}^{\infty} (\tau_{s+1} \partial_{\tau_s} + \chi_{s+1} \partial_{\chi_s}) \right] g^0 \\ &\quad + \int dw \left\{ \sum_{s=0}^{\infty} \left(\tau_{s+1} - w \left(\frac{n\chi_1^2}{\chi} \right)_s \right) \partial_{\chi_s} g^0 \right. \\ &\quad \left. - \left[\partial_n + \sum_{s=0}^{\infty} (\tau_{s+1} \partial_{\tau_s} + \chi_{s+1} \partial_{\chi_s}) \right] f^0 \right\}. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Здесь $F^1(n, \chi_s, \tilde{\tau}_s)$ и $G^1(n, \chi_s, \tilde{\tau}_s)$, как и ранее, произвольные функции своих аргументов, а выражения в фигурных скобках перед интегрированием по переменной w должны быть записаны в переменных $\tilde{\tau}_s, \chi_s, n, w$.

Из формул (3.22) следует, что при малом, но отличном от нуля значении параметра a симметрия (3.3) в первом порядке по параметру a наследуется системой ДУ (2.4) с $m = 1$ как приближенная. В частности, задавая координаты f^0 и g^0 в виде (3.11), получим точечную РГ-симметрию для трехмерного гауссова пучка с краевыми данными (3.10)

$$R = -2\chi\partial_w + 4a\tau\partial_n + \left(1 + 2\frac{a\tau^2}{n}\right)\partial_\tau. \quad (3.23)$$

Видно, что по сравнению со случаем плоского пучка (3.12) имеем отличие вдвое в коэффициентах при параметре нелинейности a .

Как и в двумерном варианте ($m = 0$) вовлечение параметра нелинейности a в групповые преобразования расширяет набор РГ-симметрий. Соответствующий оператор приближенной группы приведен в приложении 2. Сужение этой группы на решении краевой задачи с учетом граничных условий (3.6) порождает четыре оператора, аналогичных операторам РГ-симметрий (3.15) для двумерного пучка. Отметим, что последний из операторов в списке (3.15) также является оператором РГ-симметрии для трехмерного пучка. Ввиду громоздкости получающихся формул ниже приводится явное выражение лишь для первого из РГ-операторов:

$$\begin{aligned} R_1 = & \left\{ J^2 + a \left[\frac{\tau^2}{2n\chi^2} (J^2 - \chi^2 J_{xx}^2 - \chi J_x^2) - \frac{w\tau}{\chi} (\chi J_{nx}^2 - J_n^2) - \frac{nw^2}{2} J_{nn}^2 \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{w}{2n} \left(w + \frac{2\tau}{\chi} \right) (hJ^2)_x \right] \right\} \partial_w - a \left(\frac{\tau}{\chi} (J^2 + \chi J_x^2) + nwJ_n^2 \right) \partial_n \\ & + \left\{ hJ^2 - a \left[\frac{w\tau}{n} (n(hJ^2)_{nx} - (hJ^2)_x) + \frac{\tau^2}{2n\chi} (\chi(hJ^2)_{xx} - (\dot{h}J^2)_x - J^2 \right. \right. \\ & \left. \left. - \chi J_x^2 + 2nJ_n^2) + \frac{nw^2}{2} (hJ^2)_{nn} \right] \right\} \partial_\tau - \frac{a}{n} (\tau(hJ^2)_x + wn(hJ^2)_n) \partial_\chi. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Здесь, как и в формулах (3.15), $J^2(n, \chi)$ является произвольной функцией своих аргументов, а функция $h(n, \chi) = (n\chi_n)$ выражается в терминах переменных n и χ с учетом краевых данных (2.2). Так, например, полагая в (3.24) $J^2 = -2\chi$ и выбирая $h(n, \chi) = -(1/2\chi)$, что соответствует гауссову пучку с граничным условием (3.10), приходим к уже

полученному выше оператору РГ-симметрии (3.23). Для того же значения функции J^2 , но при $h(n, \chi) = -(n/2\chi)$, что отвечает пучку с параболическим начальным профилем интенсивности с $H(n) = \sqrt{1-n}$, оператор РГ-симметрии (3.24) принимает вид:

$$R = -2\chi\partial_w + 4a\tau\partial_n + n \left(1 + \frac{2a\tau^2}{n^2} \right) \partial_\tau - aw\partial_\chi. \quad (3.25)$$

Прямой подстановкой выражений для координат оператора (3.25) в соответствующие определяющие уравнения группы можно убедиться в том, что найденная РГ-симметрия является точной, т.е. применима при произвольном значении параметра a , а порожаемое этой симметрией решение краевой задачи является точным и описывает сходжение лучей параболического пучка в точку (см., например, [3]).

4. Построение решений краевой задачи

Процедура построения решений краевой задачи на основе РГ-симметрий использует условия инвариантности этих решений (3.5) относительно соответствующих РГ-операторов. В том случае, когда функции f и g представляют точное решение определяющих уравнений группы, т.е. РГ-симметрии являются точными, решение уравнений (2.3), (3.5) с учетом краевых данных (3.6) дает единственное точное решение краевой задачи (хотя число операторов РГ-симметрий, связанных с данным частным решением, может быть произвольным и, в принципе, бесконечным). Такая ситуация реализуется, например, для РГ-симметрии (3.7), использование которой приводит к решению краевой задачи для пучка с начальным профилем распределения интенсивности в форме солитона $N = \cosh^{-2}(x)$ [3] (см. также [9])

$$\begin{aligned} t &= \frac{1}{n\sqrt{2a}} \left(\sqrt{q^2 + v^2/a} + q \right)^{1/2}, \quad q = \frac{v^2}{4a} + n - 1, \\ x &= vt - \frac{1}{2} \ln \frac{(v/\sqrt{2a}) + \left(\sqrt{q^2 + v^2/a} + q \right)^{1/2}}{-(v/\sqrt{2a}) + \left(\sqrt{q^2 + v^2/a} + q \right)^{1/2}}. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Другой пример решения краевой задачи, основанный на использовании точной РГ-симметрии (3.8), отвечает начальному распределению интенсивности пучка в виде "размытой" ступеньки и дается формулами:

$$t = \frac{1}{n\sqrt{a}} \left[\left(\frac{q}{\sqrt{q+2}} K \left(\frac{2}{\sqrt{q+2}} \right) - \sqrt{q+2} E \left(\frac{2}{\sqrt{q+2}} \right) - \frac{6\sqrt{q+2}}{\pi} \left(E \left(\sqrt{\frac{q-2}{q+2}} \right) - \frac{2}{q+2} K \left(\sqrt{\frac{q-2}{q+2}} \right) \right) \right) \frac{F(\vartheta, k)}{\sqrt{q_2}} - \frac{2}{\sqrt{q+2}} \left(K \left(\frac{2}{\sqrt{q+2}} \right) - \frac{6}{\pi} K \left(\sqrt{\frac{q-2}{q+2}} \right) \right) (\sqrt{q_2} E(\vartheta, k) - \frac{1}{n^{1/4}} ((q_2 - \sqrt{n})(\sqrt{n} - q_1))^{1/2}) \right]; \quad q = \left(1 + n + \frac{v^2}{4a} \right) / \sqrt{n};$$

$$x = vt + \frac{2}{n^{1/4}\sqrt{q+2}} \left(K \left(\frac{2}{\sqrt{q+2}} \right) - \frac{6}{\pi} K \left(\sqrt{\frac{q-2}{q+2}} \right) \right), \quad k = \sqrt{\frac{q_2 - q_1}{q_2}};$$

$$q_{1,2} = \frac{q}{2} \mp \sqrt{\frac{q^2}{4} - 1}; \quad \vartheta = \arcsin \left[\left(\frac{q_2}{\sqrt{n}} \right)^{1/2} ((\sqrt{n} - q_1)(q_2 - \sqrt{n}))^{1/2} \right]. \quad (4.2)$$

Здесь использованы стандартные обозначения для неполных $F(\vartheta, k)$, $E(\vartheta, k)$ и полных $K(k)$, $E(k)$ эллиптических интегралов первого и второго рода.

Построенные по формулам (4.1) и (4.2) графики зависимости функций $v(x)$ и $n(x)$ для $a = 1$ при различных значениях координаты t приведены на рис.1 и рис.2.

В общем случае произвольных краевых данных, когда при записи координат оператора РГ-симметрии ограничиваются конечным числом слагаемых бесконечного ряда (3.2), условия инвариантности (3.5), равно как и получающиеся из них с учетом исходных уравнений (2.3) и граничных условий (3.6) решения являются приближенными. При этом разные формы операторов РГ-симметрий для одной и той же краевой задачи дают, вообще говоря, разные приближенные решения. Для иллюстрации этого утверждения ниже приводятся два приближенных аналитических решения краевой задачи (2.1)-(2.2) для гауссова пучка с распределением интенсивности на границе среды вида (3.10). Первое

из этих решений порождается оператором РГ-симметрии (3.12), для которого условия инвариантности (3.5) с учетом (2.3) записываются в виде следующей пары ДУ в частных производных:

$$\chi\chi_w - a\tau\chi_n = 0, \quad 2\chi\tau_w - 2a\tau\tau_n + 1 + \frac{a\tau^2}{n} = 0, \quad (4.3)$$

Их решение, подчиняющееся условию (3.6), дает приближенное аналитическое решение краевой задачи

$$x^2 = (ant^2 - \ln n) \left[1 - P(\sqrt{ant^2}) \right]^2, \quad v = -\frac{x}{t} \frac{P(\sqrt{ant^2})}{\left[1 - P(\sqrt{ant^2}) \right]}, \quad (4.4)$$

где функция $P(z)$ имеет вид:

$$P(z) = 2ze^{-z^2/2} \int_0^z dt e^{t^2/2}.$$

Второе приближенное аналитическое решение краевой задачи (2.1)-(2.2) возникает при использовании оператора РГ-симметрии (3.21), для которого условие инвариантности (3.5) с учетом (2.3) также записывается в виде двух ДУ в частных производных первого порядка:

$$a\chi\tau_a + n\chi\tau_n + \tau\tau_w = 0, \quad 1 + 2a\chi\chi_a + 2n\chi\chi_n + 2\tau\chi_w = 0. \quad (4.5)$$

Из этих уравнений получается следующее решение краевой задачи, удовлетворяющее заданным краевым данным и условию отсутствия фазовых искажений на оси пучка

$$x^2 = (1 - 2ant^2)^2 \ln \frac{1}{n(1 - ant^2)}, \quad v = -\frac{2x ant}{1 - 2ant^2}. \quad (4.6)$$

При подстановке полученных приближенных формул (4.6) в исходные уравнения (2.3) возникают выражения, которые тождественно обращаются в нуль при $x = 0$. Это означает, что для произвольных значений параметра нелинейности a формулы (4.6) точно описывают изменение интенсивности $n(t, 0)$ на оси пучка, которое при этом дается формулой

$$n(t, 0) = \frac{1}{2at^2} (1 - \sqrt{1 - 4at^2}). \quad (4.7)$$

Максимального значения, равного $n_{max} = 2$, интенсивность пучка достигает при $t_{max} = 1/(2\sqrt{a})$. Построенные по формулам (4.6) графики

зависимости функций v и n от x при различных значениях координаты t для $a = 0, 1$ приведены на рис.3.

Для оценки точности результатов ниже проводится сравнение двух пар приближенных и точных аналитических решений, возникающих при использовании различных РГ-симметрий. Вначале рассматривается пара решений, задаваемых следующими формулами:

$$v = -2ant \tanh(x - vt), \quad an^2t^2 = n \cosh^2(x - vt) - 1; \quad (4.8)$$

$$v = -2ant \tanh(x - vt), \quad ant^2 = \cosh^2(x - vt) \ln(n \cosh^2(x - vt)). \quad (4.9)$$

Первая из приведенных формул дает представленное в другом виде точное решение (4.1) краевой задачи с граничным условием $N = \cosh^{-2}(x)$, а вторая соответствует приближенному решению с тем же граничным условием. Это решение порождается приближенной РГ-симметрией с оператором

$$R = \left(1 + \frac{a\tau^2}{n \cosh^2(\chi)} \right) (\partial_\tau - 2 \tanh(\chi) \partial_w) + \frac{2a\tau}{\cosh^2(\chi)} \partial_n, \quad (4.10)$$

которая возникает в первом приближении по малому параметру a из формул (3.3)-(3.4) при выборе функций f^0 и g^0 следующего вида (ср. с (3.11)):

$$f^0 = 1 + 2n \tanh(\chi) \chi_1, \quad g^0 = 0. \quad (4.11)$$

Построенные по формулам (4.8) и (4.9) графики зависимостей v и n от x при различных значениях координаты t приведены на рис.4 для $a = 0, 1$. Сравнение этих графиков свидетельствует о хорошем совпадении точного (сплошные линии) и приближенного (штриховые линии) решений в периферийной области пучка, а их расхождение наблюдается лишь в приосевой области, причем при тех значениях t , когда возникает особенность решения. Положение точки на оси пучка, в которой возникает особенность решения (т.е. обращается в бесконечность производная n_x), и значение интенсивности пучка в этой точке для точного и приближенного решений даются формулами

$$t_{max} = 1/2\sqrt{a}, \quad n_{max} = 2, \quad (4.12)$$

$$t_{approx} = 1/\sqrt{ae}, \quad n_{approx} = e. \quad (4.13)$$

Таким образом, по сравнению с точным приближенное решение (4.9) дает смещенное вглубь среды положение точки фокуса и увеличенное значение максимальной интенсивности пучка, хотя качественный характер изменения величин n и v при этом сохраняется.

Отмеченные особенности наблюдаются и при сравнении другой пары решений, полученных для гауссова пучка. На рис.5 приведены построенные по формулам (4.4) (штриховые линии) и (4.6) (сплошные линии) графики зависимостей v и n от x при различных значениях координаты t для $a = 0, 1$. Совпадение этих графиков вдали от оси пучка указывает на возможность использования формул (4.6) во всей области изменения переменной x . На оси пучка приближенное решение (4.4) дает такое же смещение положения точки фокуса и увеличение значения интенсивности гауссова пучка (4.12), как и приближенное решение (4.9) с другим граничным условием. При этом значения величин t_{max} и n_{max} для решений (4.1) и (4.6) совпадают.

Зависимости, характеризующие пространственное распределение функций v и n для трехмерного пучка получаются аналогичным образом. Например, оператор РГ-симметрии (3.25) дает приближенное аналитическое решение краевой задачи (2.4), (2.2), получающееся из (4.4) заменой $a \rightarrow 2a$ и $P \rightarrow P/2$.

5. Заключение

В настоящей работе для построения решения краевой задачи для уравнений нелинейной геометрической оптики использовался подход, основанный на РГ-симметрии. Такой подход, дополняя уже известные результаты в этой области [3, 4, 5], обладает рядом привлекательных черт. К ним в первую очередь можно отнести возможность получения при произвольных гладких краевых данных приближенных, а для краевых данных специального вида и точных аналитических выражений для пространственного распределения интенсивности пучка n и производной эйконала v . Другим достоинством этого подхода является возможность дальнейшего уточнения полученных приближенных решений, например, путем последовательного учета следующих, более высоких по степеням параметра a , вкладов в формулах для РГ-симметрий и построения соответствующих решений. Обсуждаемый подход также сохраняет пригодность при изменении математической модели, используемой для описания процесса распространения светового пучка, например, с целью учета дифракционных эффектов, отброшенных нами в рассмотренном выше геометрооптическом приближении, или при учете нестационарности процесса. Явной иллюстрацией этого утверждения служат формулы для операторов приближенной симметрии,

получаемые в рамках единого метода как в плоской, так и в цилиндрической геометрии. В этом смысле использование преобразования годографа в плоской геометрии ($m = 0$) является удобной, но не обязательной процедурой для построения РГ-симметрий: они могут быть найдены и в рамках исходных уравнений (2.1).

Существенным подспорьем при вычислении РГ-симметрий может оказаться использование систем компьютерной алгебры. При получении части результатов данной работы и для контроля аналитических вычислений при нахождении точечных симметрий использовался пакет "DIMSVM" [12].

Найденные аналитические решения (точные и приближенные) и РГ-симметрии можно в дальнейшем использовать для построения новых РГ-симметрий. Один из вариантов такого использования заключается в подстановке полученных решений в формулы, определяющие точечные РГ-симметрии по известному решению краевой задачи (см. приложение 1, формулы (П1.3)). С другой стороны равенство нулю координат канонических операторов, задающих РГ-симметрии, можно рассматривать как дифференциальные связи автоматически учитывающие краевые данные (2.2). Тогда поиск новых РГ-симметрий сводится к исследованию симметрий (точных или приближенных) системы уравнений, объединяющей исходные ДУ и соответствующие дифференциальные связи (подробнее об этом способе см. в [1, 2]).

В завершение укажем еще на одну характерную особенность обсуждаемой проблемы. Как было сказано выше для краевых условий специального вида ряды (3.2), характеризующие выражения для координат f и g , превращаются в конечные суммы, и в этом случае реализуется возможность построения точного аналитического решения краевой задачи. Можно сформулировать и обратную задачу: в заданном порядке по степеням параметра a указать все операторы симметрии, которые не содержат вкладов более высоких порядков и являются таким образом операторами точной РГ-симметрии, и для них указать соответствующие распределения интенсивности света на границе нелинейной среды. Применительно к бесконечной подгруппе точечной группы, допускаемой уравнениями (2.3) (см. приложение 1, формулы (П1.1), (П1.2)), этот подход позволяет получать конкретные выражения для координат оператора X_∞ бесконечной подгруппы. Вместе с тем это есть способ генерации частных решений уравнений (2.3),

т.к. сумма оператора

$$X_\infty = \xi^1(w, n, a)\partial_\tau + \xi^2(w, n, a)\partial_\chi \quad (5.1)$$

и оператора растяжений

$$X_1 = \tau\partial_\tau + \chi\partial_\chi \quad (5.2)$$

сразу приводит к решению уравнений (2.3) в алгебраической форме:

$$\tau = -\xi^1(w, n, a), \quad \chi = -\xi^2(w, n, a). \quad (5.3)$$

Так, например, легко убедиться, что уравнения (2.3) допускают, в частности, следующие операторы с линейными по параметру a координатами:

$$\begin{aligned} X_{1\infty} &= -w\partial_\tau - \ln n\partial_\chi, \\ X_{2\infty} &= (6nw(1 - \ln n) + aw^3)\partial_\tau + (6n(2 - \ln n) + 3aw^2 \ln n)\partial_\chi, \\ X_{3\infty} &= -2wn\partial_\tau + (-2n + aw^2)\partial_\chi. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Сумма линейной комбинации этих операторов $6X_{1\infty} - X_{2\infty} - 6X_{3\infty}$ и оператора растяжений (5.2) дает следующее решение уравнений (2.3):

$$\tau = 6w(1 - n(1 + \ln n)) - aw^3, \quad \chi = 6(1 - n)\ln n + 3aw^2(2 + \ln n). \quad (5.5)$$

Формулы (5.5) порождают целое семейство решений, которые можно получать простым действием на правые части выражений (5.5), рассматриваемых как вектор-столбец, любым из трех операторов рекуррентности [9] (либо обратных к ним) (см. приложение 3). Так, например, действие оператора L_2 на решение (5.5) порождает следующее решение:

$$\begin{aligned} \tau &= -12w(1 - n(3 + 2\ln n)) + 3aw^3, \\ \chi &= 12(1 - n(1 + \ln n)) + 6aw^2(3 + \ln n). \end{aligned} \quad (5.6)$$

Автор выражает благодарность проф. Д.В.Ширкову за постоянную поддержку и обсуждение полученных результатов.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект N 96-01-00195 и частично проект N 96-01-01297).

Список литературы

- [1] В.Ф.Ковалев, В.В.Пустовалов и Д.В.Ширков, *Групповой анализ и ренормгруппа*, Сообщение ОИЯИ, P5-95-447, Дубна, ОИЯИ, 1995.
- [2] V.F.Kovalev, V.V.Pustovalov, D.V.Shirkov, *Group analysis and renormgroup symmetries*, Preprint JINR, E5-96-209, Dubna. JINR, 1996.
- [3] С.А.Ахманов, Р.В.Хохлов, А.П.Сухоруков, О самофокусировке и самоканализации интенсивных световых пучков в нелинейной среде, *ЖЭТФ*, 1966, Т.50, С.1537-1549.
- [4] А.В.Гуревич, А.Б.Шварцбург, *Нелинейная теория распространения радиоволн в ионосфере*, М., Наука, 1973.
- [5] А.Б.Шварцбург, *Нестационарное распространение локализованных волновых полей в нелинейной диспергирующей среде*, в кн. "Нелинейные электромагнитные волны" (под ред. П.Усленги), М., Мир, 1983. гл.6.
- [6] Л.В.Овсянников, *Групповой анализ дифференциальных уравнений*, М., Наука, 1978 (англ.перевод: *Group analysis of differential equations*, Academic Press, New-York,1982).
- [7] Н.Х.Ибрагимов, *Группы преобразований в математической физике*, М., Наука, 1983 (англ.перевод: *Transformation groups applied to mathematical physics*, Riedel, Dordrecht, 1985).
- [8] V.F.Kovalev, Group and renormgroup symmetry of quasi-Chaplygin media, *Journal of Nonlinear Mathematical Physics*, 1996, 3, No 3-4, 351-356.
- [9] V.F.Kovalev, V.V.Pustovalov, Group and renormgroup symmetry of a simple model for nonlinear phenomena in optics, gas dynamics and plasma theory, *Mathematical and Computer Modelling*, 1996 (in press).
- [10] В.Ф.Ковалев, В.В.Пустовалов, С.И.Сенашов, Симметрия Ли-Беклунда уравнений геометрической оптики, *Дифференциальные уравнения*, 1993, Т.29, No 10, С.1751-1764.

- [11] В.А.Байков, Р.К.Газизов, Н.Х.Ибрагимов, *Методы возмущений в групповом анализе*, Итоги науки и техники. Современные проблемы математики, 34, С.85-147, Москва, ВИНТИ, 1989.
- [12] J. Sherring and G. Prince, "DIMSVM - Symmetry determination and linear differential equations package", Department of Mathematics, La Trobe University, Melbourne, Australia, preprint 1992.

Приложение 1. Точечная PГ-симметрия двумерного пучка

В этом приложении приводятся PГ-симметрии для двумерного пучка ($m = 0$) при $\varphi = 1$, возникающие при сужении на решении краевой задачи бесконечной точечной группы симметрии, допускаемой дифференциальным многообразием (2.3),

$$X = \sum_{i=1}^5 C^i(a)X_i + X_\infty, \quad (\text{П1.1})$$

$$X_1 = \tau\partial_\tau + \chi\partial_\chi, \quad X_2 = \tau\partial_\tau + w\partial_w + 2n\partial_n, \quad X_5 = w\partial_w - 2a\partial_a + \tau\partial_\tau,$$

$$X_3 = \left(n - \frac{aw^2}{4}\right)\partial_w - awn\partial_n - \frac{n\chi}{2}\partial_\tau + \frac{a}{2}(\tau + w\chi)\partial_\chi, \quad X_4 = \partial_w,$$

$$X_\infty = \xi^1(w, n, a)\partial_\tau + \xi^2(w, n, a)\partial_\chi.$$

Здесь $C^i(a)$ – произвольные функции параметра нелинейности a , а функции ξ^1, ξ^2 удовлетворяют линейным уравнениям, формально совпадающим с уравнениями (2.3) при $\varphi(n) = 1$

$$\xi^1_w - n\xi^1_n = 0, \quad \xi^2_w + a\xi^1_n = 0. \quad (\text{П1.2})$$

Условие обращения в нуль координат канонического оператора группы, вычисленных на решении краевой задачи ($\bar{\tau}(w, n, a), \bar{\chi}(w, n, a)$), устанавливает связь между координатами оператора (П1.1)

$$\xi^1 = -\sum_{i=1}^5 C^i A^i(w, n, a), \quad \xi^2 = -\sum_{i=1}^5 C^i B^i(w, n, a), \quad (\text{П1.3})$$

$$A^1 = \bar{\tau}, \quad A^2 = \bar{\tau} - w\bar{\tau}_w - 2n\bar{\tau}_n, \quad A^5 = \bar{\tau} - w\bar{\tau}_w + 2a\bar{\tau}_a,$$

$$A^3 = -\frac{n\bar{\chi}}{2} + awn\bar{\tau}_n - \left(n - \frac{aw^2}{4}\right)\bar{\tau}_w, \quad A^4 = -\bar{\tau}_w,$$

$$B^1 = \bar{\chi}, \quad B^2 = -w\bar{\chi}_w - 2n\bar{\chi}_n, \quad B^5 = -w\bar{\chi}_w + 2a\bar{\chi}_a,$$

$$B^3 = \frac{a}{2}(\bar{\tau} + w\bar{\chi}) + awn\bar{\chi}_n - \left(n - \frac{aw^2}{4}\right)\bar{\chi}_w, \quad B^4 = -\bar{\chi}_w,$$

и сужает бесконечную группу (П1.1) до пятимерной точечной ренорм-группы со следующими операторами РГ-симметрии:

$$R \equiv \sum_{i=1}^5 C^i(a)R_i = \sum_{i=1}^5 C^i(a)(X_i - A^i\partial_\tau - B^i\partial_\chi). \quad (\text{П1.4})$$

Соотношения (П1.3) справедливы при всех значениях w и n , в том числе и при $w = \bar{\tau} = 0$, когда зависимость $\bar{\chi}(n)$ дается краевым условием (3.6). При этом краевые условия для $\xi^1(0, n, a)$, $\xi^2(0, n, a)$ записываются с помощью (П1.2) через $A^i(0, n, a)$, $B^i(0, n, a)$ следующим образом:

$$\xi^1(0, n, a) = -C^3\left(\frac{nH}{2} + n^2H_n\right) - C^4nH_n, \quad \xi^2(0, n, a) = C^1H - 2C^2nH_n. \quad (\text{П1.5})$$

В частности, полагая $C^i = 0$ при $i = 1, \dots, 4$, получим нулевые значения для $\xi^1(0, n, a)$ и $\xi^2(0, n, a)$ и соответствующее им нулевое тривиальное решение уравнений (П1.2): $\xi^1 \equiv 0$ и $\xi^2 \equiv 0$. Возникающий при этом оператор РГ-симметрии совпадает с последним оператором в списке (П1.4) при $A^5 = B^5 = 0$, $C^5(a) \equiv \xi(a)$ и не зависит от конкретного вида решения краевой задачи, т.е. характеризует решение для произвольных краевых данных

$$R = \xi(a)(w\partial_w - 2a\partial_a + \tau\partial_\tau). \quad (\text{П1.6})$$

Задаваемый оператором (П1.6) набор инвариантов

$$J^1 = \tau/w, \quad J^2 = \chi, \quad J^3 = aw^2, \quad J^4 = n, \quad (\text{П1.7})$$

показывает, что произвольное решение краевой задачи (2.3)-(2.2) может быть представлено в виде:

$$\tau = w\hat{\tau}(n, aw^2), \quad \chi = \hat{\chi}(n, aw^2). \quad (\text{П1.8})$$

В частности, задавая $\hat{\tau}$ и $\hat{\chi}$ в форме степенных рядов по (aw^2) , приходим к решению вида (3.16).

Приложение 2. РГ-симметрии трехмерного пучка

В данном приложении приводятся формулы для наследуемой приближенной точечной симметрии, допускаемой уравнениями (2.4) для трехмерного пучка $m = 1$ при $\varphi = 1$:

$$X = \sum_{i=1}^4 X_i + \sum_{i=1}^2 C^i X_{i+4}, \quad (\text{П2.1})$$

$$X_1 = J^1\partial_\tau + \frac{aw}{2n}\left(w + \frac{2\tau}{\chi}\right)J_\chi^1\partial_w - \frac{a}{n}(\tau J_\chi^1 + wnJ_n^1)\partial_\chi - a\left(\frac{w\tau}{n}(nJ_{n\chi}^1 - J_\chi^1) + \frac{\tau^2}{2n\chi}(\chi J_{\chi\chi}^1 - J_\chi^1) + \frac{nw^2}{2}J_{nn}^1\right)\partial_\tau,$$

$$X_2 = J^2\partial_w - a\left(\frac{\tau}{\chi}(J^2 + \chi J_\chi^2) + nwJ_n^2\right)\partial_n - \frac{a\tau^2}{2n\chi}(J^2 + \chi J_\chi^2 - 2nJ_n^2)\partial_\tau + a\left(\frac{\tau^2}{2n\chi^2}(J^2 - \chi^2 J_{\chi\chi}^2 - \chi J_\chi^2) - \frac{w\tau}{\chi}(\chi J_{n\chi}^2 - J_n^2) - \frac{nw^2}{2}J_{nn}^2\right)\partial_w,$$

$$X_3 = -\left\{\left(w \ln \chi + 2\frac{\tau}{\chi}\right)I^1 + 2 \ln \chi (wnI_n^1 + \tau I_\chi^1) - a \left[\ln \chi (nw^2 \left(\frac{nw}{3}I_{nnn}^1 + \tau I_{n\chi}^1\right) + \tau^2 \left(wI_{n\chi\chi}^1 + \frac{\tau}{3n}I_{\chi\chi\chi}^1\right)) + nw^2 \left(\frac{5w}{6} \ln \chi + \frac{\tau}{\chi}(1 - 2 \ln \chi)\right) I_{nn}^1 + \left(w^2 \left(\frac{w}{6}\chi + 2\tau\right) \ln \chi + \frac{w}{\chi}\tau^2(2 - \ln \chi)\right) I_{n\chi}^1 + \frac{\tau^2}{n} \left(\frac{w}{2} \ln \chi + \frac{\tau}{3\chi}(3 + \ln \chi)\right) I_{\chi\chi}^1 + \frac{\tau^2}{n\chi^2} \left(\frac{w\chi}{2}(\ln \chi + 2) - \frac{\tau}{3} \cdot (\ln \chi + 1)\right) I_\chi^1 + w \left(\frac{w^2}{6}(1 + \ln \chi) + 2\frac{w\tau}{\chi}(1 - \ln \chi) - 2\frac{\tau^2}{\chi^2}\right) I_n^1 \right] \right\} \partial_w + \left\{ -2n \ln \chi I^1 + a \left[\ln \chi (n^2 w^2 I_{nn}^1 + 2nw\tau I_{n\chi}^1 + \tau^2 I_{\chi\chi}^1) + \frac{\tau^2}{\chi} \right. \right.$$

$$\begin{aligned}
& \cdot (\ln \chi + 2) I_x^1 + nw \left(w \ln \chi + \frac{2\tau}{\chi} \right) I_n^1 \Big] \Big\} \partial_n + \left\{ \tau I^1 + nw \chi \ln \chi I_n^1 \right. \\
& + \tau \chi \ln \chi I_x^1 - a \left[\chi \ln \chi \left(\frac{n^2 w^3}{6} \chi \ln \chi I_{nnn}^1 + \frac{nw^2}{2} \tau I_{nnx}^1 + \frac{\tau^3}{6n} I_{xxx}^1 \right. \right. \\
& + \left. \left. \frac{w}{2} \tau^2 I_{nxx}^1 \right) + \tau^2 \left(\frac{w}{2} (\ln \chi + 2) + \frac{2}{3\chi} \tau \ln \chi \right) I_{nx}^1 - \frac{\tau^2}{2n} \left(w \chi \ln \chi \right. \right. \\
& + \left. \left. \frac{\tau}{3} (\ln \chi - 3) \right) I_{xx}^1 + \frac{nw^2}{6} (2w \chi \ln \chi + 3\tau) I_{nn}^1 - \frac{\tau^2}{2n} \left(w (\ln \chi + 2) \right. \right. \\
& + \left. \left. \frac{\tau}{3} (3 \ln \chi + 5) \right) I_x^1 + \frac{2}{3\chi^2} \tau^3 I_n^1 \Big] \Big\} \partial_\tau + \left\{ \chi \ln \chi I^1 - a \left[w \tau \left(\chi \ln \chi I_{nx}^1 \right. \right. \right. \\
& + \left. \left. I_n^1 \right) + \frac{\tau^2}{2n} \left(\ln \chi (\chi I_{xx}^1 + I_x^1) + 2I_x^1 \right) + \frac{w^2}{2} \chi \ln \chi \left(n I_{nn}^1 + I_n^1 \right) \Big] \Big\} \partial_\chi, \\
X_4 = & - \left\{ w I^2 + 2\tau I_x^2 + 2nw I_n^2 - a \left[\frac{\tau^3}{3n} I_{xxx}^2 + w \tau^2 I_{nxx}^2 + nw^2 \tau I_{nnx}^2 \right. \right. \\
& + \frac{n^2 w^3}{3} I_{nnn}^2 + w \left(\frac{w^2}{6} \chi + 2w\tau \chi - \frac{\tau^2}{\chi} \right) I_{nx}^2 + \frac{\tau^2}{6n} \left(3w + \frac{2\tau}{\chi} \right) I_{xx}^2 \\
& + \left. \left. \left(\frac{5w}{6} - \frac{2\tau}{\chi} \right) nw^2 I_{nn}^2 + \frac{\tau^2}{6n\chi} (3w\chi - 2\tau) I_x^2 + \left(\frac{w}{6} - \frac{2\tau}{\chi} \right) w^2 I_n^2 \right] \Big\} \partial_w \\
& - \left\{ 2n I^2 - a \left[2nw\tau I_{nx}^2 + \frac{\tau^2}{\chi} \left(\chi I_{xx}^2 + I_x^2 \right) + nw^2 \left(n I_{nn}^2 + I_n^2 \right) \right] \Big\} \partial_n \\
& + \left\{ \chi \left(nw I_n^2 + \tau I_x^2 \right) - a \left[\frac{n^2 w^3}{6} \chi I_{nnn}^2 + \frac{w^2}{2n} \tau \chi I_{nnx}^2 + \frac{\tau^3}{6n} \chi I_{xxx}^2 - \frac{\tau^2}{2n} \right. \right. \\
& \cdot \left. \left. \left(w + \frac{\tau}{\chi} \right) I_x^2 + \frac{w\tau^2}{2} \chi I_{nxx}^2 - \frac{\tau^2}{6n} (\tau + 3w\chi) I_{xx}^2 + \frac{\tau^2}{6} \left(3w + \frac{4\tau}{\chi} \right) I_{nx}^2 \right. \right. \\
& + \left. \left. \frac{nw^3}{3} \chi I_{nn}^2 \right] \Big\} \partial_\tau + \left\{ \chi I^2 - a \left[w \tau \chi I_{nx}^2 + \frac{\tau^2}{2n} \left(\chi I_{xx}^2 + I_x^2 \right) + \frac{w^2}{2} \left(n \chi I_{nn}^2 \right. \right. \right.
\end{aligned}$$

$$+ \chi I_n^2) \Big] \Big\} \partial_\chi, \quad X_5 = \tau \partial_\tau + 2n \partial_n + w \partial_w, \quad X_6 = \tau \partial_\tau - 2a \partial_a + w \partial_w.$$

Здесь, как и в (3.13), $J^i(n, \chi)$ и $I^i(n)$ – произвольные функции своих аргументов, C^i – произвольные постоянные. Сужение группы (П2.1) на решении краевой задачи (2.2), (2.4) порождает четыре оператора РГ-симметрии, один из которых (3.24) приведен в основной части текста.

Приложение 3. Операторы рекуррентии

В этом приложении приводятся три оператора рекуррентии, позволяющие получать новые решения краевой задачи (2.2)-(2.3) при $\varphi = 1$ из уже известных. Процедура получения новых решений сводится к записи решений в виде вектор-столбца:

$$\begin{pmatrix} \tau \\ \chi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{\tau}(n, w) \\ \bar{\chi}(n, w) \end{pmatrix} \quad (\text{П3.1})$$

и последующем действии на правую часть этого равенства любым из следующих трех операторов рекуррентии (или обратным к ним):

$$\begin{aligned}
L_1 &= \begin{pmatrix} 0 & -nD_n \\ aD_n & 0 \end{pmatrix}, \quad L_2 = \begin{pmatrix} 2nD_n - 1 & nwD_n \\ -awD_n & 2nD_n \end{pmatrix}, \\
L_3 &= \begin{pmatrix} 2anwD_n & n(aw^2/2 - 2n)D_n - n \\ (-aw^2/2 + 2n)aD_n + a & 2anwD_n + aw \end{pmatrix}. \quad (\text{П3.2})
\end{aligned}$$

Результат такого действия порождает правую часть нового решения, записанного в виде (П3.1).

Рукопись поступила в издательский отдел
26 декабря 1996 года.

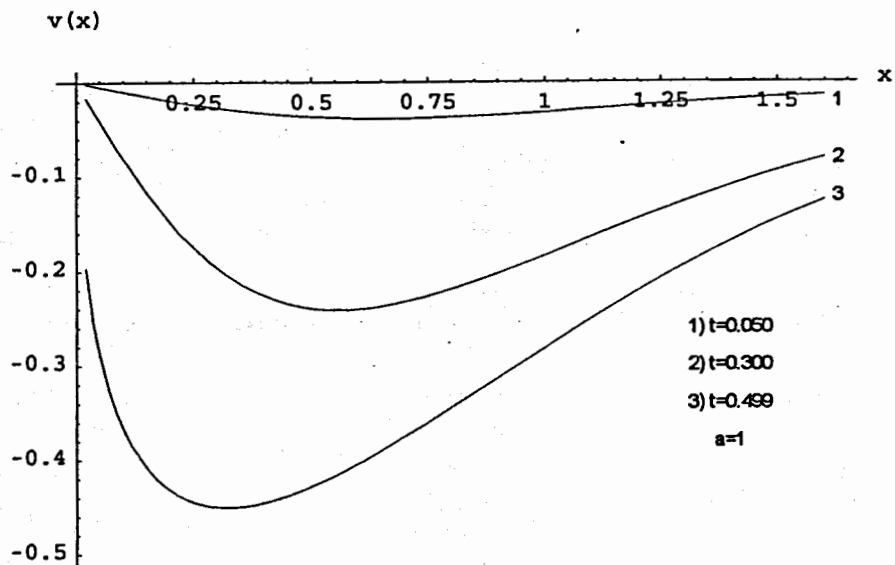


Рис.1а. График функции $v(x)$ для $N(x) = \cosh^{-2}(x)$.

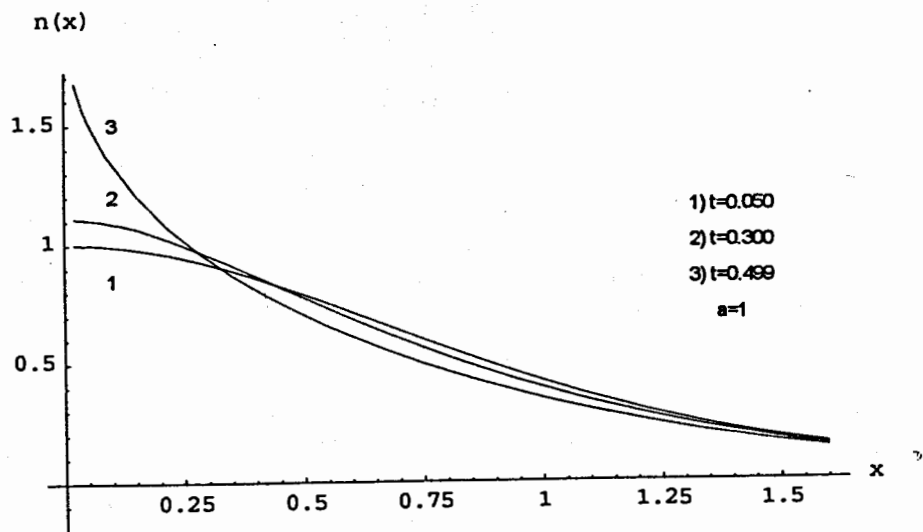


Рис.1б. График функции $n(x)$ для $N(x) = \cosh^{-2}(x)$

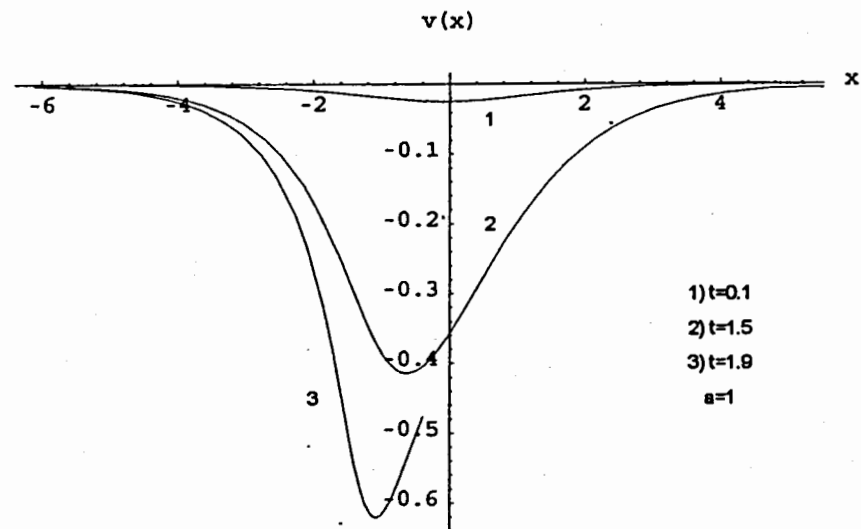


Рис.2а. График функции $v(x)$ для $N(x)$ в виде сглаженной ступеньки.

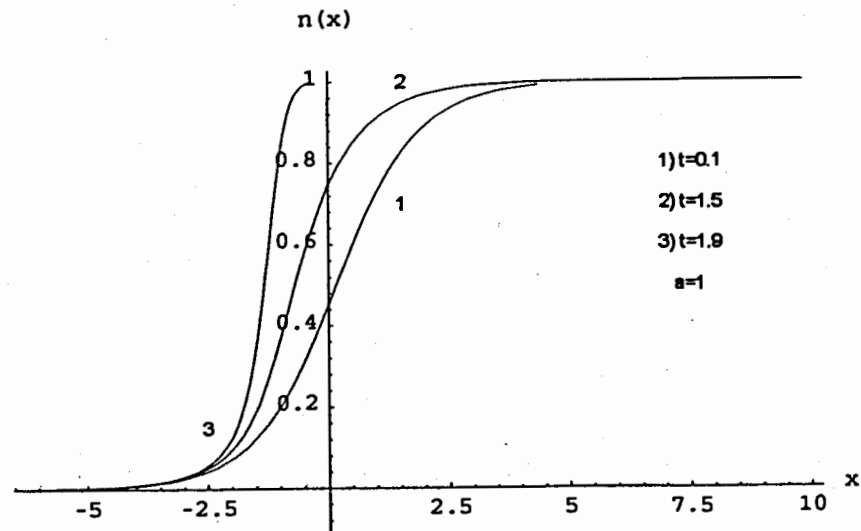


Рис.2б. График функции $n(x)$ для $N(x)$ в виде сглаженной ступеньки

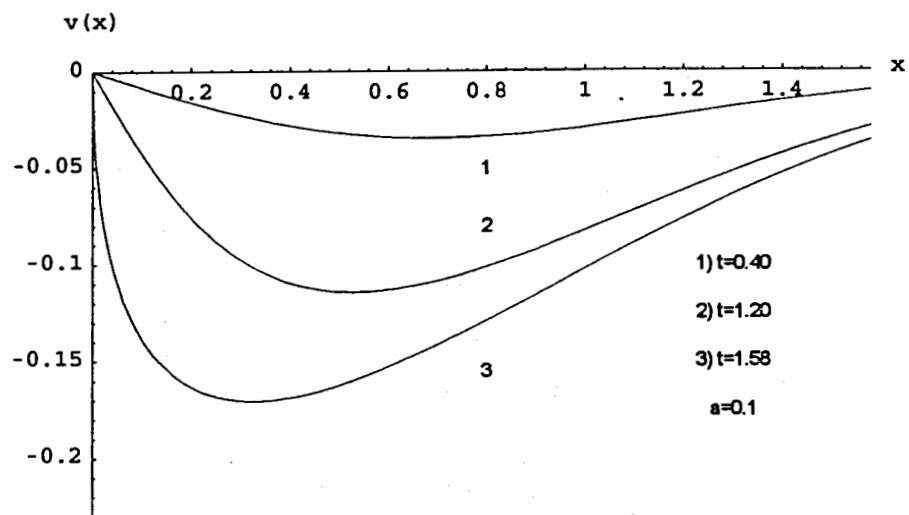


Рис.3а. График функции $v(x)$ для $N(x) = e^{-x^2}$

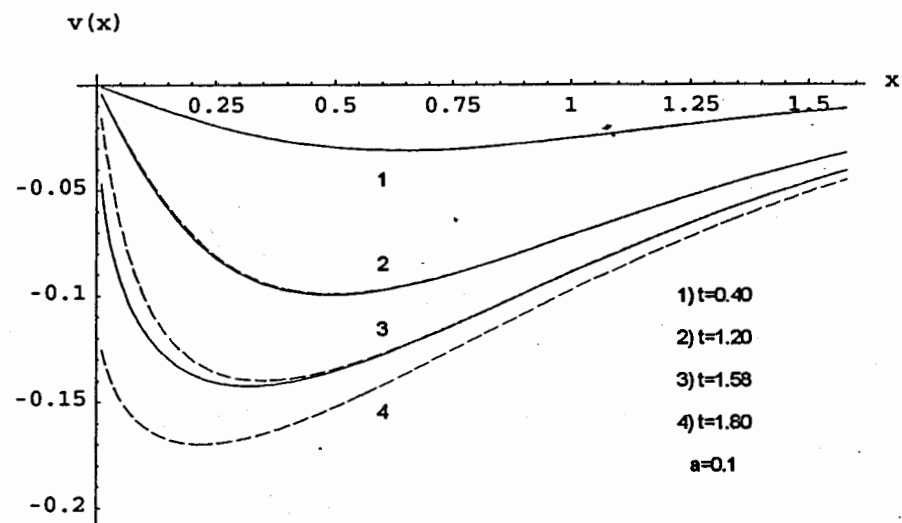


Рис.4а. Сравнение графиков функции $v(x)$, построенных по формулам (4.8) и (4.9)

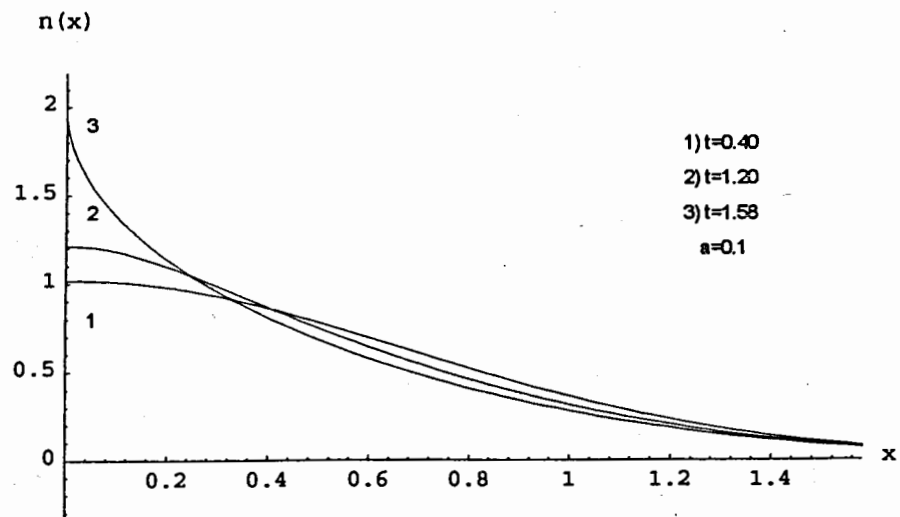


Рис.3б. График функции $n(x)$ для $N(x) = e^{-x^2}$

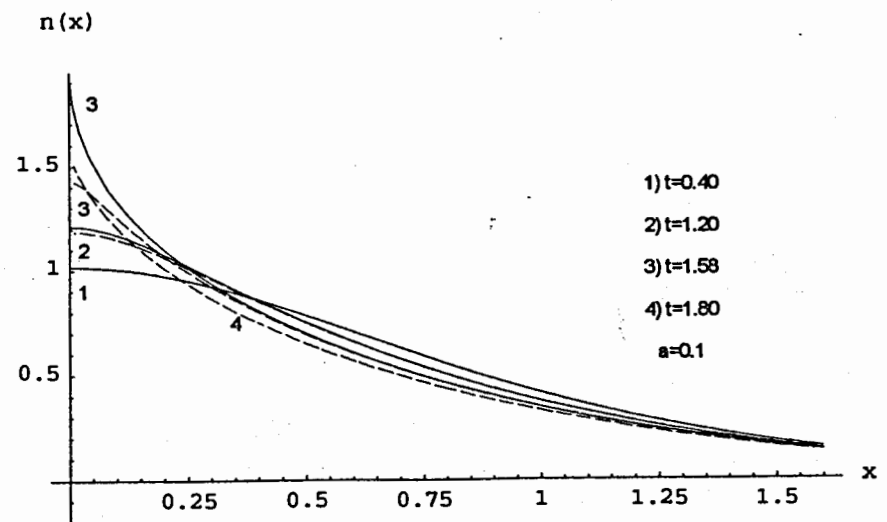


Рис.4б. Сравнение графиков функции $n(x)$, построенных по формулам (4.8) и (4.9)

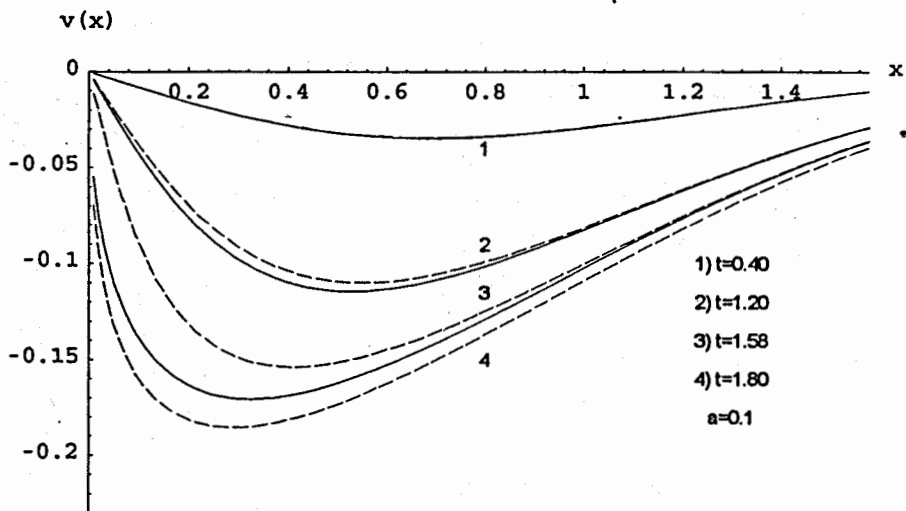


Рис.5а. Сравнение графиков функции $v(x)$, построенных по формулам (4.6) и (4.4)

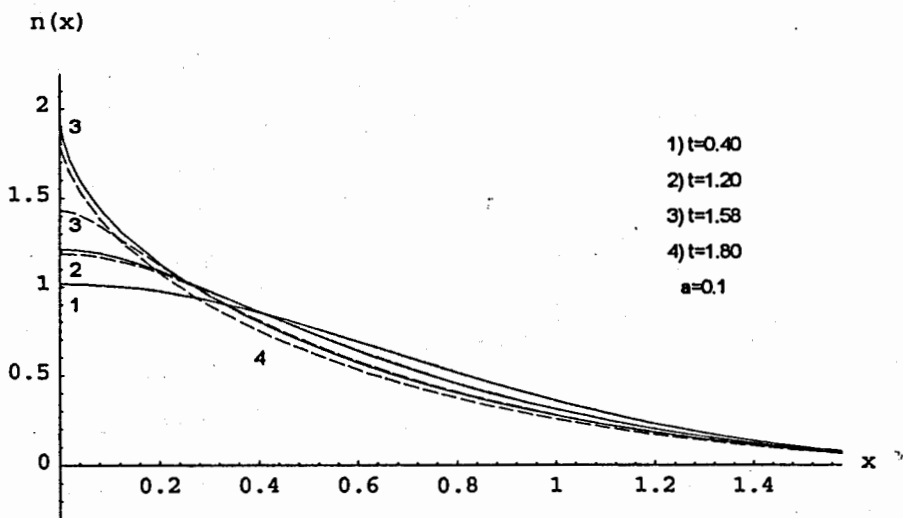


Рис.5б. Сравнение графиков функции $n(x)$, построенных по формулам (4.6) и (4.4)