СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р5-96-417

Я.Буша*, О.Гудец*, Е.П.Жидков

О РЕШЕНИИ МЕТОДОМ ВВЕДЕНИЯ ПАРАМЕТРА

*Технический университет, Кошице, Словакия

1996

Введение

В [1] был предложен метод приближенного решения систем нелинейных уравнений, основанный на приведении этих систем к системам обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка путем дифференцирования по вещественному параметру. Пути введения параметра там не обсуждались. Этот подход был использован в [2] для вычисления обратных матриц, зависящих от параметра. Отметим также [3], где метод дифференцирования по параметру успешно применен совместно с непрерывным аналогом метода Ньютона. В [4] метод введения параметра применяется для "линеаризации" краевых задач нелинейных дифференциальных уравнений.

Метод дифференцирования по параметру широко применяется для решения алгебраических и операторных уравнений, в том числе с дифференциальным оператором, часто без соответствующего обоснования. Целью настоящей работы является изучение применения данного метода в случае одного трансцендентного уравнения. В этом случае проявляются основные трудности, связанные с применением метода в более общих случаях, но метод можно обосновать. Будем изучать условия, связанные с решением уравнений $p(x) = 0$ с вещественной функцией $p(x)$ от вещественного аргумента.

Рассмотрим параметрическое семейство уравнений

$$p(x) \cdot \omega + f(x) \cdot (1 - \omega) = 0, \qquad (1)$$

где ω – вещественный параметр. При $\omega = 0$ получаем уравнение $f(x) = 0$ и предполагаем известным хотя бы один вещественный корень x_0 функции $f(x)$. При $\omega = 1$ получаем уравнение $p(x) = 0$. Спрашивается, при каких условиях при непрерывном изменении параметра ω от 0 до 1 существует функция $x(\omega)$, значения которой на краях при $\omega = 0$ и $\omega = 1$ есть корни функций $f(x)$ и $p(x)$ соответственно. При этом предполагаем, что переход от $\omega = 0$ до $\omega = 1$ будем осуществлять решая задачу Коши для уравнения

$$x'(\omega) = g(x, \omega); \qquad x(0) = x_0.$$

Рассмотрим функцию от двух переменных x, ω – $E(x, \omega) = p(x)\omega + f(x)(1 - \omega)$, графиком которой является поверхность в пространстве переменных (x, ω, E). Полагая $E = 0$ получим сечение указанной поверхности плоскостью. В результате в

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект №. 95-01-01467)

плоскости (x, ω) при условии, что хотя бы для одного ω существует решение (1), возникает семейство кривых, которые можно, вообще говоря, рассматривать как параметрически заданные кривые $[x(\tau); \omega(\tau)]$, где τ— некоторый вещественный параметр. Наша задача состоит в том, чтобы указать условия, при которых существуют непрерывные зависимости $x(\tau)$, $\omega(\tau)$ такие, что $\omega(\tau_0) = 0$ и $\omega(\tau_1) = 1$ для некоторых значений τ_0 и τ_1. Если такие "траектории" существуют, то каким образом можно осуществить движение вдоль них?

1 Предварительные результаты

Если из (1) выразим ω, то получим

$$\omega(x) = \frac{f(x)}{f(x) - p(x)}. \qquad (2)$$

Рассмотрим произвольную точку $b \in R$ и предположим, что $p(x) \in C(-\infty, b\rangle$. Если множество корней функции $p(x)$ на интервале $(-\infty, b\rangle$ – $\mathcal{M}_b = \{x \in C(-\infty, b\rangle | \; p(x) = 0\}$ непусто, то максимальный корень обозначим через β: $\beta = \max_{x \in \mathcal{M}_b} x$. В случае, когда $\mathcal{M}_b = \emptyset$, положим $\beta = -\infty$.

Теорема 1. Пусть функция $p(x) \in C(-\infty, b\rangle$ и $p(b) > 0$. Пусть $f(x) \in C(-\infty, b\rangle$, $f(b) = 0$ и $f(x) < 0$ при $x \in \langle \beta, b)$. Тогда имеют место следующие утверждения.

I. Множество $\mathcal{M}_b \neq \emptyset$ тогда и только тогда, когда функция $\omega(x)$ из (2) непрерывна на некотором интервале $\langle \beta, b\rangle$, причем выполнены условия $\omega(b) = 0$, $\omega(\beta) = 1$ и $\omega(x) \in (0, 1)$ при $x \in (\beta, b)$.

II. Множество $\mathcal{M}_b = \emptyset$ тогда и только тогда, когда функция $\omega(x)$ из (2) непрерывна на интервале $(-\infty, b\rangle$, причем выполнены условия $\omega(b) = 0$, и $\omega(x) \in (0, 1)$ для всех $x \in (-\infty, b)$.

Доказательство. I. Необходимость. Если множество $\mathcal{M}_b \neq \emptyset$, то в силу его ограниченности сверху существует его точная верхняя грань и в силу непрерывности функции $p(x)$ она также принадлежит $\mathcal{M}_b$. Т.е. $\beta = \sup \mathcal{M}_b = \max \mathcal{M}_b \in \mathcal{M}_b$. Поэтому $p(\beta) = 0$. Ясно, что $\beta < b$ и поэтому $f(\beta) < 0$. Тогда, подставляя значение β в (2), получим: $\omega(\beta) = f(\beta)/\left(f(\beta) - p(\beta)\right) = f(\beta)/f(\beta) = 1$. Рассмотрим, далее, интервал (β, b). На этом интервале функция $p(x) > 0$ (в силу своей непрерывности и условия $p(b) > 0$). Поэтому $f(x) > f(x) - p(x)$ для $x \in (\beta, b)$. Из условия $f(x) < 0$ на (β, b) следует, что $\forall x \in (\beta, b)$: $\omega(x) = f(x)/\left(f(x) - p(x)\right) < 1$, так как $\forall x \in \langle \beta, b\rangle$ $f(x) - p(x) < 0$. Ясно также, что функция $\omega(x)$ непрерывна на $\langle \beta, b\rangle$ как отношение двух непрерывных функций, причем знаменатель отрицателен. Подставляя, наконец, в (2) значение $x = b$, получим $\omega(b) = f(b)/\left(f(b) - p(b)\right) = 0/\left(0 - p(b)\right) = 0$.

I. Достаточность. Пусть $\omega(x)$ непрерывна на некотором интервале $\langle \beta, b\rangle$ и $\omega(\beta) = 1$, $\omega(b) = 0$. Ясно, что $\beta > b$ и поэтому $f(\beta) < 0$. Но из (2) получаем $f(\beta) = f(\beta) - p(\beta)$, т.е. $p(\beta) = 0$ и β является корнем функции $p(x)$ на $(-\infty, b\rangle$. Поэтому $\mathcal{M}_b \neq \emptyset$.

II. Необходимость. Пусть $\mathcal{M}_b = \emptyset$. В силу непрерывности функции $p(x)$ это означает, что $p(x) > 0\ \forall x \in (-\infty, b)$. Поэтому $0 \neq f(x) - p(x) < 0\ \forall x \in (-\infty, b\rangle$ и функция $\omega(x)$ из (2) является непрерывной. Одновременно совместно выполняются равенства $\omega(x) = 0$, $f(x) = 0$ и $x = b$ для $x \in (-\infty, b\rangle$. Поэтому $\omega(x) > 0\ \forall x \in (-\infty, b)$ (как отношение отрицательных функций). Так как $f(x) > f(x) - p(x)$; $\forall x \in (-\infty, b)$, то $\omega(x) = f(x)/(f(x) - p(x)) < 1\ \forall x \in (-\infty, b)$. Поэтому $\omega(x) \in (0,1)$ $\forall x \in (-\infty, b)$.

II. Достаточность. Пусть $\omega(x) \in (0,1)\ \forall x \in (-\infty, b)$, причем $\omega(x)$ непрерывна на $(-\infty, b)$. В силу того, что $f(x) < 0$ и $\omega(x)$ непрерывна на $(-\infty, b)$, имеем $f(x) - p(x) < 0\ \forall x \in (-\infty, b)$. Поэтому из $\omega(x) < 1$ следует $f(x) > f(x) - p(x)$, или $p(x) > 0$ $\forall x \in (-\infty, b)$. Это вместе с условием $p(b) > 0$ значит, что $p(x)$ не имеет корней на $(-\infty, b)$, $\mathcal{M}_b = \emptyset$ т.е. $\mathcal{M}_b = \emptyset$.

Теорема доказана.

Замечание 1. По аналогии можно исследовать свойства функции $\omega(x)$ для случая $p(b) < 0$, а также и для интервала $\langle b, +\infty)$.

Замечание 2. Теорема 1 устанавливает достаточное условие существования непрерывной функции $\omega(x)$. Из них не следует, вообще говоря, существование обратной функции $x(\omega)$, для $\omega \in \langle 0, 1)$ (см. рис. 1).

Замечание 3. Непрерывность функции (2) можно обеспечить и другими способами, в частности, например, выбирая функцию $f(x) = p(x) - p(b)$, при условии $p(b) \neq 0$. Тогда в теореме 1 следовало бы писать всюду $\omega < 1$ вместо $\omega \in (0,1)$. Выбор функции $f(x)$ согласно условиям теоремы обусловлен желанием удержать значение ω в рамках интервала $(0,1)$.

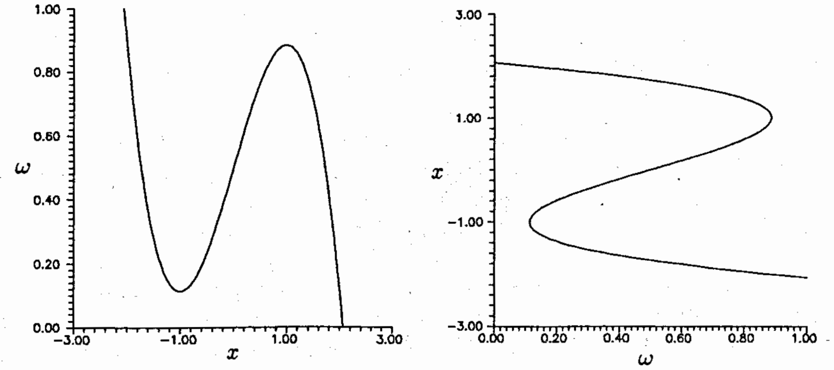

Рис. 1 I. Случай $\mathcal{M}_b \neq \emptyset$

Пример 1. Рассмотрим функцию $p(x) = x(x^2-3) + 10593/4096$, $\beta = -33/16$ (см. рис. 2) и построим для нее функции $f(x)$ и $\omega(x)$ согласно сказанному в замечании 3 (рис. 1). В качестве точки b возьмем $b = 33/16$. Тогда для функции $\omega(x)$ имеет место

представление:

$$\omega(x) = 1 - \frac{p(x)}{p(b)} = \frac{1}{2} - \frac{2048}{10593} x(x^2 - 3).$$

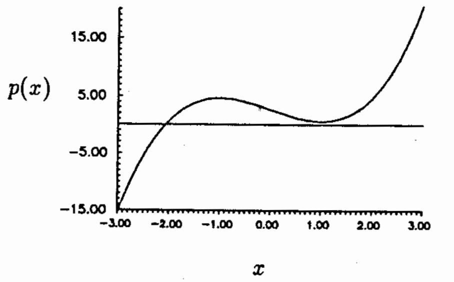

Рис. 2

Замечание 4. Если выбирать $f(x)$ согласно условиям теоремы 1, то зависимость $x(\omega)$ либо монотонна, либо неоднозначна. Это связано с тем, что функция $\omega(x)$ определена однозначно $\forall x \in \langle \beta, b\rangle$.

Далее будем изучать условия, достаточные для существования функции $x(\omega)$, определенной и непрерывной на интервале $\langle 0, 1)$.

2 Задача Коши для функции $x(\omega)$

Предположим, далее, что x в (1) является функцией параметра ω, т.е. $x = x(\omega)$. Это значит, что $x(\omega)$ является решением (1) при фиксированном значении ω. Пусть $f(x), p(x) \in C^1(-\infty, b\rangle$. Дифференцируя (1) по параметру ω получим

$$x'_\omega(\omega) = \frac{f(x) - p(x)}{p'_x \cdot \omega + f'_x \cdot (1 - \omega)}, \tag{3}$$

которое вместе с начальным условием

$$x(0) = x(\omega)|_{\omega=0} = b \tag{4}$$

составляет задачу Коши для определения значений $x(\omega)$ для $\omega \in \langle 0, 1\rangle$. Значение $x(1)$, если оно существует, является корнем функции $p(x)$, который и требуется определить.

Для того чтобы существовала функция $x(\omega)$, при выполнении условий, наложеных на $f(x)$ в теореме 1, в силу непрерывности $\omega(x)$ необходимо и достаточно, чтобы она являлась монотонной на рассматриваемом интервале.

В дальнейшем вместо (3) удобнее использовать тождество

$$x'_\omega(\omega) = \frac{1}{\omega'_x(x)} \tag{5}$$

и изучать выражение для $\omega'_x(x)$. Дифференцируя (2) по переменной x находим

$$\omega'_x(x) = \frac{f(x)p'(x) - f'(x)p(x)}{(f(x)-p(x))^2} = \left(\frac{p(x)}{f(x)}\right)' \frac{f^2(x)}{(f(x)-p(x))^2} =$$

$$= -\left(\frac{f(x)}{p(x)}\right)' \frac{p^2(x)}{(f(x)-p(x))^2}. \qquad (6)$$

Если выбрать функцию $f(x)$ такую, что $(f(x)/p(x))' > 0$, то это обеспечит монотонность $\omega(x)$ внутри интервала $(\beta, b\rangle$ или на всем интервале $(-\infty, b\rangle$, если решение не существует.

Пусть $(f(x)/p(x))' = h(x)$, где $h(x) > 0$ при $x \in (-\infty, b\rangle$, $h(x)$ любая. Тогда $f(x)/p(x) = \int_b^x h(\xi)\, d\xi = H(x)$, причем $H(b) = 0$ и $H'(x) = h(x) > 0$, откуда следует, что $H(x)$ возрастающая и поэтому отрицательна на интервале $(-\infty, b\rangle$. Будет ли функция

$$f(x) = p(x)H(x) \qquad (7)$$

удовлетворять условиям теоремы 1? Сначала рассмотрим случай $\mathcal{M}_b = \emptyset$ – случай II. Тогда $f(b) = 0$ и в силу того, что $p(x) > 0\ \forall x \in (-\infty, b\rangle$ будет иметь место $f(x) < 0$, $\forall x \in (-\infty, b\rangle$. Итак, в этом случае рассматриваемая функция $f(x)$ удовлетворяет условиям Теоремы 1. В случае $\mathcal{M}_b \neq \emptyset$ $f(x)$ обращается в 0 в точке $x = \beta$, т.е. она не удовлетворяет условию $f(x) < 0$ на всем интервале $(-\infty, b\rangle$, а лишь на открытом интервале $(\beta, b\rangle$. Если подставим ее в (2), то получим

$$\omega(x) = \frac{p(x)H(x)}{p(x)H(x) - p(x)}.$$

В этом случае при $x \to \beta^+$ функция $\omega(x)$ имеет предел

$$\lim_{x\to\beta^+} \omega(x) = \lim_{x\to\beta^+} \frac{H(x)}{H(x)-1} = \frac{H(\beta)}{H(\beta)-1} \in (0,1). \qquad (8)$$

Функция $\omega(x)$ в этом случае в точке $x = \beta$ неопределена, но имеет там предел, принадлежащий открытому интервалу $(0,1)$, и нарушается условие $\omega(\beta) = 1$. Если в выражении для $\omega'_x(x)$ сократить члены $p(x)$ (устраняя таким образом неопределенность $\omega'_x(x)$ при $x = \beta$), получим

$$\omega'_x = -\frac{h(x)}{(H(x)-1)^2} < 0 \qquad \forall x \in (-\infty, b\rangle,$$

что означает, что в этом случае мы "не заметим" корень $x = \beta$ и перейдем через него при некотором значении $\omega < 1$. Поэтому выбор функции $f(x)$ согласно (7) в случае, когда корни существуют, непригоден для задачи Коши. Необходима модификация метода, о чем в дальнейшем и пойдет речь.

Далее, для обеспечения монотонности, рассмотрим два способа определения функции $f(x)$ для несколько более общего семейства уравнений, чем (1). Назовем эти методы методами А и Б.

2.1 Метод А

Рассмотрим вместо (1) следующее семейство уравнений:

$$p^\alpha(x)\omega + (b-x)^n(p^\alpha(x) + \varepsilon)(\omega - 1) = 0, \qquad (9)$$

где $\alpha > 0$ некоторый вещественный положительный параметр, $n \in N$ и $\varepsilon > 0$.

Замечание 5. Если не обращать внимание на параметр α, то можно увидеть, что (9) по способу выбора функции $f(x)$ напоминает (7), а именно: $H(x) = -(b-x)^n$, причем $H(b) = 0$, $H(x) < 0$ при $x < b$. Параметр $\varepsilon > 0$ обеспечивает выполнение условия $\omega(b) = 1$ при $x = \beta$. Функция $p^\alpha(x)$ играет роль функции $p(x)$ в теореме 1. При $\varepsilon = 0$ получим выражение (7).

Далее покажем, что для любой функции $p(x) \in C^1(-\infty, b\rangle$ можно таким образом подобрать значения параметров α, n, ε, что в случае, когда существуют корни, для $x = \beta$ выполнено условие $\omega(\beta) = 1$, причем зависимость $\omega(x)$ монотонная на $(\beta, b\rangle$.

Имеет место следующая

Теорема 2. Для любой функции $p(x) \in C^1(-\infty, b\rangle$ такой, что $p(b) > 0$, существует набор параметров (α, n, ε) такой, что справедливы следующие утверждения:

- I. Если $\mathcal{M}_b \neq \emptyset$, то задача Коши, составленная для уравнения (9) дифференцированием по параметру, имеет на интервале $\langle 0, 1\rangle$ единственное решение $x(\omega)$ такое, что $x(0) = b$ и $x(1) = \beta$, где $\beta = \max \mathcal{M}_b$, причем $x'_\omega(\omega) < 0\ \forall \omega \in \langle 0, 1)$.
- II. Если $\mathcal{M}_b = \emptyset$, то для любого наперед заданного значения $L < b$ задача Коши для (9) (после соответствующего выбора параметров) имеет единственное решение для $\omega \in \langle 0, \omega_1\rangle$ для некоторого $\omega_1 < 1$, причем $x'_\omega(\omega) < 0\ \forall \omega \in \langle 0, \omega_1\rangle$ и $x(\omega_1) = L$.

Доказательство. Рассмотрим сначала выражения для $\omega(x)$ и $\omega'_x(x)$ для уравнения (9)

$$\omega(x) = \frac{(b-x)^n}{(b-x)^n + p^\alpha(x)/(p^\alpha(x)+\varepsilon)}, \qquad (10)$$

$$\omega'_x(x) = -\frac{(b-x)^{n-1}[np(x)(p^\alpha(x)+\varepsilon) + (b-x)\varepsilon\alpha p'(x)]}{p^{1-\alpha}(x)[(b-x)^n(p^\alpha(x)+\varepsilon) + p^\alpha(x)]^2}. \qquad (11)$$

I. Пусть $p(\beta) = 0$ и $p(x) > 0$ при $x \in (\beta, b\rangle$. Если $p'(x) \geq 0$ при $x \in (\beta, b\rangle$, то из (11) видно, что $\omega'_x(x) < 0$ для $x \in (\beta, b\rangle$, т.е. $x'_\omega(\omega) < 0$ для соответствующих значений ω (при любом наборе параметров (α, n, ε)). В случае, когда существует $x \in (\beta, b\rangle$ такое, что $p'(x) < 0$, обозначим через m следующее значение: $m = \min_{\substack{x \in (\beta, b\rangle \\ p'(x) \leq 0}} p(x)$.

Покажем сначала, что m существует и положительно. Так как $p(\beta) = 0$, $p(x) > 0$ при $x \in (\beta, b\rangle$ и $p(x) \in C^1(-\infty, b\rangle$, то $p'(\beta) \geq 0$ и существует правая окрестность точки β, в которой $p'(x) > 0$. Пусть для $x \in (\beta, \delta\rangle$ $p'(x) > 0$, $\beta < \delta$. Тогда $m = \min_{\substack{x \in \langle \delta, b\rangle \\ p'(x) \leq 0}} p(x)$.

Итак, мы получили, что минимум определяется на замкнутом подмножестве замкнутого множества, откуда, в силу непрерывности $p(x)$, следует, что $m = p(x^*)$ для некоторого $x^* \in \langle\delta, b\rangle$. Так как $x^* \in \langle\beta, b\rangle$, то $p(x^*) = m > 0$. Далее покажем, что существует набор параметров, удовлетворяющий условиям Теоремы 2. Сначала заметим, что на интервале $\langle b, \delta\rangle$ $p'(x) > 0$ и поэтому $\omega'_x(x) < 0$ при любом наборе параметров. Так как $p(x) \in C^1(-\infty, b\rangle$, то существует такое положительное значение D, что $|p'(x)| \leq D$ для всех $x \in (\beta, b\rangle$. В точках $x \in (\beta, b\rangle$, в которых $p'(x) \geq 0$, $\omega'_x(x) < 0$. Если параметры (α, n, ε) выбрать так, чтобы выполнялось условие

$$\frac{m^{\alpha+1}}{D(b-\beta)} > \frac{\varepsilon\alpha}{n}, \tag{12}$$

то, в силу очевидной цепочки неравенств

$$np(x)(p^\alpha(x)+\varepsilon) \geq nm(m^\alpha+\varepsilon) > nm^{\alpha+1} > \varepsilon k D(b-\beta) > \varepsilon\alpha(b-x)|p'(x)|,$$

получим, что числитель и знаменатель (11) положительны и в случае $p'(x) < 0$, при $x \in (\beta, b\rangle$. Таким образом, если параметры выбрать согласно (12), то будет $x'_\omega(\omega) < 0$ для всех соответствующих значений ω. Из (10) видно, что $\omega(x) \in (0, 1)$ при $p(x) > 0$ и $\omega(b) = 1$, так как $\omega(b) = \frac{(b-\beta)^n}{(b-\beta)^n + 0/(0+\varepsilon)} = 1$. Очевидно, что $\omega(x)$ в (10) является непрерывной и убывающей для $x \in (\beta, b\rangle$, и поэтому для нее существует обратная функция $x(\omega)$, $x(0) = b$, $x(1) = \beta$, убывающая на интервале $(0, 1)$. Она является решением задачи Коши для дифференциального уравнения для $x(\omega)$ с начальным условием $x(0) = b$.

II. Если задать произвольное значение $L < b$, то в случае, когда $\mathcal{M}_b = \emptyset$, функция $p(x)$ положительна на замкнутом интервале $\langle L, b\rangle$. Поэтому на этом интервале существует $m = \min\limits_{x\in\langle L,b\rangle} p(x) > 0$. Выбирая параметры (α, n, ε) из условия

$$\frac{m^{\alpha+1}}{D(b-L)} > \frac{\varepsilon\alpha}{n}, \tag{13}$$

где $D = \max\limits_{x\in\langle L,b\rangle} |p'(x)|$, получим, что $x'_\omega(\omega) < 0$ для $x \in \langle L, b\rangle$, и поэтому $x'_\omega(\omega) < 0$ для $\omega \in \left\langle 0, \frac{(b-L)^n}{(b-L)^n + p^\alpha(L)/(p^\alpha(L)+\varepsilon)} \right\rangle = \langle 0, \omega_1\rangle$. Очевидно, что $\omega_1 < 1$.

Теорема доказана.

Замечание 6. Ясно, что условия (12) и (13) для любого фиксированого значения m, существование которого мы доказали, (а также значений D, β, L) можно удовлетворить за счет выбора достаточно малых значений α, ε или достаточно большого значения параметра n. С другой стороны, если зафиксировать любой набор значений (α, n, ε), то всегда можно найти такую функцию $p(x)$, для которой нет монотонности для $\omega(x)$. Этот случай представлен на рис. 1. При решении задачи Коши с начальным условием $x(0) = b$ появляются точки возврата, в которых значение $x'_\omega(\omega)$ не определено, а фактически стремится к ∞ при ω, стремящемся к этим точкам.

Исследуем поведение значений $x'_\omega(\omega)$ в крайних точках при $\omega = 0$ и $\omega = 1$. При $\omega = 0$, т.е. $x = b$ получим, что $\omega'_x(b) = 0$ при $n > 1$, и при $n = 1$ оно приобретает

отрицательное значение. Поэтому значение $x'_\omega(\omega)|_{\omega=0}$ неопределено (стремится к ∞ при $\omega \to 0^+$). Численное решение нельзя начинать с точки b. При $\omega = 1$ (в случае, если решение существует), поведение функции $x(\omega)$ зависит от выбора параметра α, а также от поведения функции $p(x)$ в точке β.

Если $\alpha = 1$ и $p'(\beta) > 0$, то значение $x'_\omega|_{\omega=1}$ отрицательно. Если кроме $p(\beta)$ также $p'(\beta) = 0$, то из (11) видно, что $\omega'_x(x) \to 0$, т.е. $x'_\omega(\omega) \to -\infty$ при $\omega \to 1^-$.

В случае $\alpha \in (0, 1)$, если $p^{(i)}(\beta) = 0$ для $i = 1, 2, \ldots, k-1$ и $p^{(k)}(\beta) \neq 0$, то $p(x) \approx (x-\beta)^{k\alpha-1}$, т.е. $x'_\omega(\omega) \approx (x-\beta)^{1-k\alpha}$. Поэтому возможны как случаи асимптотического поведения при $\omega \to 1$ ($x'_\omega \to 0$ или $x'_\omega \to -\infty$, так и случаи $x'_\omega \to C < 0$ при $\omega \to 1$.

2.2 Метод Б

По аналогии с предыдущим пунктом рассмотрим следующее семейство уравнений:

$$p^\alpha(x) + (b-x)^n(\omega - 1) = 0, \tag{14}$$

где $\alpha > 0$ и $n \in N$, являются параметрами метода.

Тогда имеет место следующая

Теорема 3. Для любой функции $p(x) \in C^1(-\infty, b\rangle$ такой, что $p(b) > 0$, существует набор параметров (α, n), что справедливы следующие утверждения:

- I. Если $\mathcal{M}_b \neq \emptyset$, то задача Коши, составленная для уравнения (14) дифференцированием по параметру, имеет на интервале $\langle 0, 1)$ единственное решение $x(\omega)$ такое, что $x(0) = b$ и $x(1) = \beta$, где $\beta = \max \mathcal{M}_b$, причем $x'_\omega(\omega) < 0$ $\forall\omega \in (0, 1)$.
- II. Если $\mathcal{M}_b = \emptyset$, то для любого наперед заданного значения $L < b$ задача Коши для (14) (после соответствующего выбора параметров) имеет единственное решение для $\omega \in \langle 0, \omega_1)$ для некоторого $\omega_1 < 1$, причем $x'_\omega(\omega) < 0$ $\forall\omega \in \langle 0, \omega_1\rangle$ и $x(\omega_1) = L$.

Доказательство. Так как доказательство теоремы 3 полностью повторяет доказательство теоремы 2, приведем лишь выражения, аналогичные выражениям (10)–(13):

$$\omega(x) = \frac{(b-x)^n}{(b-x)^n + p^\alpha(x)}, \tag{15}$$

$$\omega'_x(x) = -\frac{(b-x)^{n-1}[np(x) + (b-x)\alpha p'(x)]}{p^{1-\alpha}(x)[(b-x)^n + p^\alpha(x)]^2}. \tag{16}$$

Параметры n и α следует выбирать из условий

$$\frac{m}{D(b-\beta)} > \frac{\varepsilon}{n}, \tag{17}$$

$$\frac{m}{D(b-L)} > \frac{\varepsilon}{n}, \tag{18}$$

где m описано выше.

Теорема доказана.

Замечание 6 остается в силе также для метода Б.

В заключение настоящего параграфа рассмотрим еще поведение производной $x'_\omega(\omega)$ на краях интервала $(0, 1)$.

Для $n > 1$ будет $\omega'_x(b) = 0$, и поэтому $x'_\omega(0)$ неопределено, $x'_\omega(\omega) \to -\infty$ при $\omega \to 0^+$. В случае $n = 1$ $x'_\omega(0) < 0$.

При $\omega \to 1$ имеет место поведение, аналогичное поведению производной в методе А.

Замечание 6. Хотя теоремы 2 и 3 показывают возможность (теоретическую) использования решения задачи Коши для нахождения корней уравнений, численные расчеты естественно ограничивают такую возможность. Если, например, стараться удовлетворить условию (12) (или (13), (17), (18)) за счет выбора достаточно большого значения n, то мы сразу сталкиваемся с большими численными значениями по мере отдаления от точки b. Обсуждению численных результатов посвящен следующий параграф.

3 Численные результаты

В начале настоящего параграфа на примере функции $p(x)$ из примера 1 проиллюстрируем влияние отдельных параметров, введенных в методах А и Б. Будем изображать отображение $x(\omega)$, которое при плавном изменении параметров становится функцией (для $\omega(x)$ существует обратная функция).

Во второй части приведем результаты численного решения задач Коши.

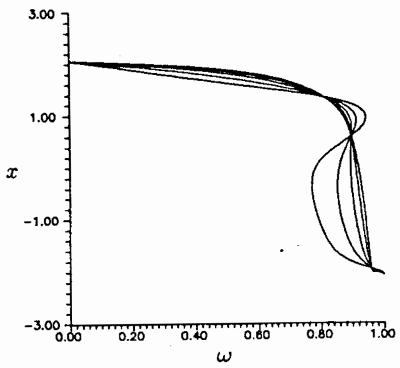

Рис. 3

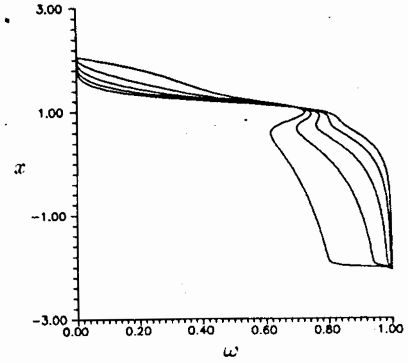

Рис. 4

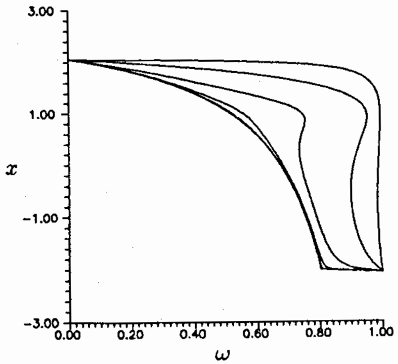

Рис. 5

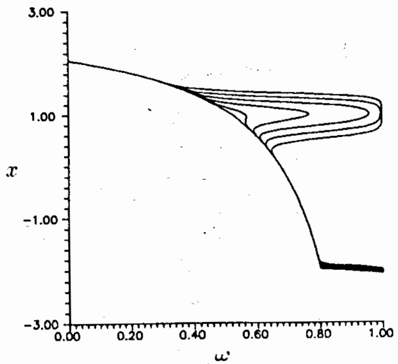

Рис. 6

Рис. 3 получен для метода А при изменении параметра $\alpha = 2, 1, 0.5, 0.25, 0.1$ и фиксированных значениях : $n = 1$ и $\varepsilon = 5.0$. Для значений $\alpha = 0.5$ и $\alpha = 0.1$ в этом случае уже существует обратная функция к функции $\omega(x)$.

Рис. 4 получен для метода А при изменении параметра $n = 1, 2, 3, 4, 5$ и фиксированных значениях $\alpha = 5$ и $\varepsilon = 0.1$. Для значений $n = 4$ и $n = 5$ в этом случае уже существует обратная функция к функции $\omega(x)$.

выбор шага, равного 0.0001. При этом потребовалось 28 шагов. Эти результаты относятся к случаю, когда выбирались значения $\alpha = 1$, $n = 1$, $\varepsilon = 10^{-4}$, $\delta = 0.5$. На рис. 13 приведены результаты счета при разных начальных значениях $b = 2.0625$ и $b = 10$.

Другая ситуация сложилась для случая метода Б. Результаты приведены на рис. 14. При значениях $n = 10$ и $\alpha = 1$ и выборе шага $h = 10^{-6}$ уже с точки $b = 5$ не удалось достичь значение корня. В этом случае все решается в конце интервала для ω. При $\omega = 0.99$ были значения $x(0.99)$, равные 2.88, 1.398 и 0.42 при начальных значениях $b = 5$, 3 и 2.0625, соответственно. А в точке $\omega = 1$ значения $x(1)$ оказались -0.1918, -2.0601 и -2.0625, при точном значении корня -2.0625. На рис. 13 и 14 точное значение корня обозначено чертой.

В заключение можно сказать, что с численной точки зрения метод А оказался эффективнее метода Б. Он позволил найти корень, который с данных начальных точек мы бы не смогли определить, скажем, применяя метод Ньютона. При этом следует уменьшать значение ε, а значения α и n можно выбирать равными 1.

Литература

1. *Д.Ф. Давиденко.* Об одном новом методе численного решения систем нелинейных уравнений. ДАН СССР, 1953, т. 88, Н. 4, с. 601–602.

2. *Д.Ф. Давиденко.* О применении метода вариации параметра к обращению матриц. ДАН СССР, 1960, т. 131, Н. 3, с. 500–502.

3. *I.V. Puzinin, I.V. Amirkhanov, T.P. Puzinina, E.V. Zemlyanaya.* The Newton Iterative Scheme with Simultaneous Calculating the Inverse Operator for the Derivative of Nonlinear Function. (In Programming and Mathematical Techniques in Physics, Proc. of International Conference on Programming and Mathematical Methods for solving Physical Problems), JINR, Dubna, Russia, June 14–19, 1993, pp. 30–34.

4. *А.А. Дородницын.* Применение метода малого параметра к численному решению дифференциальных уравнений. (В сб. Современные проблемы математической физики и вычислительной математики), Москва, Наука, 1982, с. 145–155.

Буша Я., Гудец О., Жидков Е.П.

Р5-96-417

О решении методом введения параметра

Исследуется вопрос о возможности применения метода введения дополнительного параметра при решении как алгебраических, так и трансцендентных уравнений.

Получены достаточные условия применимости этого метода, и приведен ряд примеров.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна, 1996

Перевод авторов

Busha Ya., Gudets O., Zhidkov E.P.

P5-96-417

About the Solution with the Help
of Additional Parameter Introduction Method

The possibility of application of the additional parameter introduction method to solve the algebraic and transcendential equations is investigated.

The sufficient conditions of method applicability are produced. Some examples are represented.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna, 1996