ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р5-96-269

П.Е.Жидков*

О ПОЛНОТЕ СИСТЕМ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ ОПЕРАТОРА ШТУРМА—ЛИУВИЛЛЯ С ПОТЕНЦИАЛОМ, ЗАВИСЯЩИМ ОТ СПЕКТРАЛЬНОГО ПАРАМЕТРА, И НЕКОТОРОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧИ

Направлено в журнал «Математический сборник»

---

*E-mail: zhidkov@thsun1.jinr.dubna.su

1996

1. Введение. Основные результаты

В первой части работы продолжено исследование, начатое в [1]: рассматривается задача

$$-u'' + V(\lambda, x)u = \lambda u, \quad x \in (0,1), \tag{1}$$

$$u(\lambda, 0) = u(\lambda, 1) = 0. \tag{2}$$

Здесь и в дальнейшем все величины вещественны. Постановка задачи обычная: V– заданная ограниченная непрерывная функция, а неизвестны пары (λ, u), где $\lambda \in R$, а $u = u(x) \not\equiv 0$, удовлетворяющие уравнению (1) и граничным условиям (2).

Задача (1)-(2) возникает нри описании конкретных физических явлений (см., например,[2]-[4]). В работе [5] (см. также список литературы в этой работе) изложены результаты численного исследования подобных задач. В работе [6] рассмотрены некоторые вопросы нестационарной теории рассеяния для подобных задач, а в [7], [8] задачи этого класса изучаются в связи с вопросами вполне интегрируемости некоторых систем.

Имеется ряд статей, посвященных изучению свойств спектра и собственных функций задач типа (1)-(2) (см., например, [1], [4], [9], [10]). В частности, в работах [1], [4], [9] получены некоторые результаты о полноте систем собственных функций задач этого типа.

В работе [1] рассматривался вопрос о возможности разложения произвольной функции $w \in L_2(0,1)$ в ряд по собственным функциям задачи (1)-(2). При доказательстве теоремы о разложении, кроме непрерывности и ограниченности функции $V(\lambda, x)$, предполагалось, что существует равномерный по $x \in [0,1]$ предел $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} V(\lambda, x) = \overline{V}(x)$, и налагались условия на скорость сходимости в этом пределе. Кроме того, были предъявлены примеры потенциалов $V(\lambda, x)$ таких, что система собственных функций задачи (1)-(2) не является полной в $L_2(0,1)$.

В настоящей статье получен более общий результат, чем в работе [1], о полноте в $L_2(0,1)$ системы собственных функций задачи (1)-(2). Основное предположение на потенциал $V(\lambda, x)$ при этом состоит в следующем.

(V) *Пусть функция $V(\lambda, x)$ вещественна, непрерывна, и пусть существует $V_0 > 0$ такое, что $|V(\lambda, x)| \le V_0$ для всех λ и x.*

Определение 1. *Назовем систему собственных функций* $u_n(\lambda_n, x)$ *с соответствующими собственными значениями* λ_n *задачи* (1)-(2) *стандартной (здесь* $n = 0, 1, 2, \ldots$*), если для любого* n *функция* u_n *аргумента* x *имеет ровно* n *корней в интервале* $(0,1)$ *и нормирована в* $L_2(0,1)$*:* $||u_n(\lambda_n, .)||_{L_2} = 1$, *где*

$$||g||_{L_2} = \left\{ \int_0^1 g^2(x)dx \right\}^{\frac{1}{2}} \quad \text{и} \quad (g,h)_{L_2} = \int_0^1 g(x)h(x)dx.$$

Следующий простой результат (в несколько иной форме) доказан в работе [1].

Предложение. *Пусть выполнено предположение* (V). *Тогда задача* (1)-(2) *имеет стандартную систему собственных функций* u_n *и соответствующих собственных значений* λ_n. *Для любой стандартной системы для всех* $n = 0, 1, 2, \ldots$ *выполнено неравенство*

$$(\pi(n+1))^2 - V_0 \leq \lambda_n \leq (\pi(n+1))^2 + V_0.$$

Замечание 1. Стандартная система собственных функций и соответствующих собственных значений задачи (1)-(2) в предположениях Предложения, вообще говоря, не единственна.

Определение 2. *Пусть система* $\{g_n\}_{n=0,1,2,\ldots} \subset L_2(0,1)$. *Назовем ее линейно независимой в* $L_2(0,1)$, *если из условия* $\sum\limits_{n \geq 0} a_n g_n = 0$, *где* $a_n \in R$, *а сходимость ряда понимается в смысле пространства* $L_2(0,1)$, *следует, что* $a_n = 0$ *для всех* n.

Первый основной результат работы составляет

Теорема 1. *Пусть выполнено предположение* (V). *Тогда для того, чтобы стандартная система собственных функций* $\{u_n(\lambda_n, .)\}_{n=0,1,2,\ldots}$ *задачи* (1)-(2) *была полной в пространстве* $L_2(0,1)$, *т. е. чтобы для любой функции* $w \in L_2(0,1)$ *существовал набор коэффициентов* $a_n \in R$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ *такой, что* $w(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n u_n(\lambda_n, x)$, *где сходимость ряда понимается в смысле пространства* $L_2(0,1)$, *необходимо и достаточно, чтобы эта система была линейно независима в* $L_2(0,1)$.

Далее в работе рассматривается приложение этого результата к следующей нелинейной задаче на собственные значения:

$$-u'' + f(u^2)u = \lambda u, \quad x \in (0,1), \tag{3}$$

$$u(\lambda, 0) = u(\lambda, 1) = 0, \tag{4}$$

$$||u(\lambda, .)||_{L_2} = 1. \tag{5}$$

Здесь f– вещественная функция, а неизвестны пары (λ, u), где $\lambda \in R$, а $u = u(\lambda, x) \not\equiv 0$, удовлетворяющие задаче (3)-(5). Основное предположение состоит в следующем.

(f) *Пусть* $uf(u^2)$*– непрерывно дифференцируемая функция, а* $f(s)$ *не убывает на полупрямой* $s \in [0, +\infty)$ *и* $f(0) = 0$.

Имеет место

Теорема 2. *Пусть функция* f *удовлетворяет условию* (f). *Тогда*

(a) *задача* (3)-(5) *для каждого целого* $n \geq 0$ *имеет единственное с точностью до множителя* ± 1 *у функции* u_n *решение* $(\lambda_n, u_n(\lambda_n, .))$ *такое, что* $u_n(\lambda_n, .)$ *как функция аргумента* x *имеет ровно* n *корней в интервале* $(0,1)$*; при этом*

$$0 < \lambda_0 < \lambda_1 < \ldots < \lambda_n < \ldots;$$

(б) *система функций* $\{u_n(\lambda_n, .)\}_{n=0,1,2,\ldots}$ *является линейно независимой и полной в пространстве* $L_2(0,1)$.

Замечание 2. По вопросам, связанным с разложением произвольной функции из некоторого функционального пространства в ряд по собственным функциям нелинейных краевых задач, автору настоящей статьи известна лишь работа [11]: в ней анонсированы результаты о возможности такого разложения для случая, когда нелинейная задача возникает при малых (в некотором смысле) нелинейных возмущениях линейной задачи.

Замечание 3. Нелинейные спектральные задачи, подобные задаче (3)-(5) (с нормировочным условием (5)), хорошо известны в физике. Такие задачи (и значительно более сложные, например многомерные и нелокальные) возникают, в частности, при квантово-механическом описании различных явлений (см., например, работу [12], в которой математическими методами изучаются подобные задачи; полнота соответствующих систем собственных функций в этой работе остается, однако, неисследованной). В этом контексте (3)-(5) можно рассматривать как некоторую модельную систему.

В дальнейшем через $C, C_1, C_2, C', C'', \ldots$ обозначаются положительные постоянные.

2. Доказательство теоремы 1

Доказательство разобьем на ряд лемм.

Лемма 1. *Существуют такие $C_1 > 0$ и номер $N_1 > 0$, зависящие лишь от V_0, что для любого потенциала $V(\lambda, x)$, удовлетворяющего условию* (V), *и произвольных собственных функций u_m и u_n задачи* (1)-(2), *где $n \neq m$ и $n \geq N_1$, имеет место неравенство*

$$\left|(u_n, u_m)_{L_2}\right| \leq C_1 |n^2 - m^2|^{-1}.$$

Доказательство. Умножим уравнение (1), записанное для u_n, на u_m, а уравнение (1), записанное для u_m, на u_n, вычтем получившиеся тождества одно из другого и проинтегрируем получившееся равенство по отрезку $[0, 1]$. Получим

$$|\lambda_n - \lambda_m| \left|(u_n, u_m)_{L_2}\right| \leq 2V_0.$$

В силу Предложения отсюда следует утверждение леммы 1.

Рассмотрим систему функций

$$u_0(\lambda_n, .), \ldots, u_n(\lambda_n, .), u_{n+1}(\lambda_{n+1}, .), u_{n+2}(\lambda_{n+2}, .), \ldots, u_{n+k}(\lambda_{n+k}, .), \ldots \quad (6)$$

Заметим, что, в силу Предложения, для всех достаточно больших номеров n (6) является системой собственных функций задачи (1)-(2) с потенциалом, удовлетворяющим условию (V), который равен $V(\lambda_n, x)$ при $\lambda \leq \lambda_n$ и $V(\lambda, x)$ при $\lambda > \lambda_n$.

Лемма 2. *Существует такой номер $N_2 \geq N_1$, что для любых потенциала $V(\lambda, x)$, удовлетворяющего условию* (V), *и номера $n \geq N_2$ произвольная система функций вида* (6) *линейно независима в $L_2(0, 1)$ (не требуется, чтобы система $\{u_n(\lambda_n, .)\}_{n \geq 0}$ была линейно независима в $L_2(0, 1)$).*

Доказательство. Проведем некоторые оценки. Пусть $C_1 > 0$– постоянная из леммы 1, а $\alpha(K, N) = \sum\limits_{\substack{n=K \\ n \neq N}}^{\infty} \left|n^2 - N^2\right|^{-1}$, где N– натуральное, а $K \geq 0$– целое. Тогда ясно, что $\lim\limits_{N \to \infty} \alpha(K, N) = 0$ равномерно по $K \geq 0$ и $\lim\limits_{K \to \infty} \alpha(K, N) = 0$ равномерно по $N = 1, 2, 3, \ldots$. Выберем номер $N_2 \geq N_1$ так, что $\alpha(N) \leq (2C_1)^{-1}$, если $N \geq N_2$, либо $K \geq N_2$. Докажем, что номер N_2 удовлетворяет требованиям из леммы 2.

Предположим, что некоторая система функций вида (6) с $n \geq N_2$ линейно зависима:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k u_k(\lambda_n, .) + \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k u_k(\lambda_k, .) = 0, \quad (7)$$

где среди коэффициентов $a_k \in R$ есть отличные от нуля. Тогда ясно, что $\lim\limits_{k \to \infty} a_k = 0$, поэтому среди чисел $|a_k|$ существует максимальное. Пусть это $|a_{k_0}|$. Умножим равенство (7) скалярно в $L_2(0, 1)$ на $u_{k_0}(\lambda_l, .)$, где $l = n$, если $k_0 \leq n$, и $l = k_0$, если $k_0 > n$. Получим в силу предыдущих оценок $\frac{1}{2}|a_{k_0}| \leq 0$, т. е. противоречие. Тем самым, лемма 2 доказана.

Пусть $u_0(\lambda_0, .), \ldots, u_n(\lambda_n, .), \ldots$– произвольная линейно независимая в $L_2(0, 1)$ система собственных функций задачи (1)-(2), и пусть N_2– номер из леммы 2. Тогда для доказательства достаточности условий теоремы 1 достаточно доказать, что система (6) является базисом (т. е. полной и линейно независимой системой) в $L_2(0, 1)$ для некоторого $n \geq N_2$. Действительно, отсюда будет следовать, что коразмерность подпространства пространства $L_2(0, 1)$, натянутого на функции $\{u_k(\lambda_k, .)\}_{k \geq n}$, равна n, поэтому, добавляя к этой системе n функций так, чтобы получающаяся система была линейно независима в $L_2(0, 1)$, получим полную систему этого пространства.

Фиксируем некоторый номер $n \geq N_2$ и рассмотрим ортонормированный базис $e_0, ..., e_k, ...$ в $L_2(0,1)$, состоящий из собственных функций задачи (1)-(2), взятой с $V(\lambda, x) = V(\lambda_n, x)$. Ясно, что можно считать $e_k = u_k(\lambda_n, .)$ для $k = \overline{0, n}$.

Лемма 3. *Для любого номера $l \geq 1$ система*

$$e_0, ..., e_n, u_{n+1}(\lambda_{n+1}, .), ..., u_{n+l}(\lambda_{n+l}, .), e_{n+l+1}, e_{n+l+2}, ... \tag{8}$$

является базисом в пространстве $L_2(0,1)$.

Доказательство. Воспользуемся методом математической индукции. Очевидно, $u_{n+1}(\lambda_{n+1}, .) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k^1 e_k$, причем ввиду леммы 2 $a_{n+1}^1 \neq 0$. Поэтому система

$$e_0, ..., e_n, u_{n+1}(\lambda_{n+1}, .), e_{n+2}, e_{n+3}, ...$$

является базисом пространства $L_2(0,1)$. Пусть утверждение леммы выполнено для $l = 1, ..., r$. Докажем его для $l = r+1$. Имеем:

$$u_{n+r+1} = \sum_{k=0}^{n} a_k^{r+1} e_k + \sum_{k=n+1}^{n+r} a_k^{r+1} u_k(\lambda_k, .) + \sum_{k \geq n+r+1} a_k^{r+1} e_k.$$

Опять в силу леммы 2 $a_{n+r+1}^{r+1} \neq 0$. Поэтому система (8) является базисом пространства $L_2(0,1)$ при $l = r+1$, и лемма 3 доказана.

Лемма 4. *В предположениях леммы 3 существуют номер $N_3 \geq N_2$ и постоянная $C_2 > 0$ такие, что для произвольного натурального l из условия*

$$\left|\left| \sum_{k=0}^{n} a_k e_k + \sum_{k=n+1}^{n+l} a_k u_k(\lambda_k, .) + \sum_{k=n+l+1}^{\infty} a_k e_k \right|\right|_{L_2} \leq 1$$

вытекает, что $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k^2 \leq C_2$, если $n \geq N_3$.

Доказательство. Пусть $||u||_{L_2} = 1$ и $u = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k e_k + \sum\limits_{k=n+1}^{n+l} a_k u_k(\lambda_k, .) + \sum\limits_{n+l+1}^{\infty} a_k e_k$. Умножим левую и правую части этого равенства скалярно в $L_2(0,1)$ на себя. Получим ввиду леммы 1 и доказательства леммы 2

$$1 \geq \sum_{k=0}^{\infty} a_k^2 - 2C_1 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\substack{m=n \\ m \neq k}}^{\infty} \frac{|a_k|\, |a_m|}{|k^2 - m^2|} \geq$$

$$\geq \sum_{k=0}^{\infty} a_k^2 - C_1 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\substack{m=n \\ m \neq k}}^{\infty} \frac{a_k^2 + a_m^2}{|k^2 - m^2|} \geq \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} a_k^2$$

для достаточно больших номеров n. Тем самым, лемма 4 доказана.

Докажем достаточность в теореме 1. Предположим, что система функций (6) с $n \geq N_3$ не является базисом в $L_2(0,1)$. Тогда существует функция $u \in L_2(0,1)$, $||u||_{L_2} = 1$, ортогональная каждой функции из системы (6), где $n \geq N_3$. Поскольку для каждого натурального l система (8) является базисом в $L_2(0,1)$, для каждого натурального l имеем:

$$u = \sum_{k=0}^{n} a_k^l e_k + \sum_{k=n+1}^{n+l} a_k^l u_k(\lambda_k, .) + \sum_{k \geq n+l+1} a_k^l e_k.$$

Умножим левую и правую части этого равенства скалярно в $L_2(0,1)$ на u, получим:

$$1 \leq \sum_{k \geq n+l+1} |a_k^l|\, \left|(u, e_k)_{L_2}\right| \leq \left\{ \sum_{k \geq n+l+1} (a_k^l)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ \sum_{k \geq n+l+1} (u, e_k)_{L_2}^2 \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

В силу леммы 4 очевидно, что правая часть этого неравенства стремится к нулю при $l \to \infty$, т. е. получаем противоречие.

Из приведенных выше аргументов сразу следует, что если система собственных функций $\{u_n(\lambda_n, .)\}_{n=0,1,2,...}$ задачи (1)-(2) линейно зависима в $L_2(0,1)$ и выполнено предположение (V), то эта система не является полной в $L_2(0,1)$. Теорема 1 доказана.

3. Доказательство теоремы 2

В этом разделе считаем справедливыми предположения теоремы 2. Рассмотрим задачу Коши

$$-u'' + f(u^2)u = \lambda u, \quad x \in (0,1), \tag{9}$$

$$u(0) = 0, \quad u'(0) = a > 0, \tag{10}$$

где $a > 0$– параметр. Обозначим через $u(a, \lambda, x)$ ее решения.

Лемма 5. *Для любого целого $n \geq 0$ и любого $a > 0$ существует единственное $\lambda \in R$ такое, что решение задачи (9)-(10) как функция аргумента x имеет ровно n корней в интервале $(0, 1)$ и $u(a, \lambda, 1) = 0$; при этом $\lambda > (\pi(n + 1))^2$.*

Доказательство. Для решений задачи (9)-(10) имеет место тождество

$$\{[u'_x]^2 + \lambda u^2 - F(u^2)\}' = 0,$$

где $F(s) = \int\limits_0^s f(p)dp$, откуда

$$[u'_x(a, \lambda, x)]^2 + \lambda u^2(a, \lambda, x) - F(u^2(a, \lambda, x)) = a^2 \tag{11}$$

для любого решения задачи (9)-(10) и любого $x \in [0, 1]$.

Фиксируем произвольные целое $n \geq 0$ и $a > 0$. Тогда из теоремы сравнения следует, что $u(a, \lambda, x) > 0$ для всех $x \in (0, 1]$ и всех достаточно малых положительных λ. В то же время для любого $A > 0$ существует $\lambda > 0$ столь большое, что функция $G(\lambda, u) = \lambda u^2 - F(u^2)$ строго возрастает при $u \in [0, A]$ и

$$G(\lambda, A) > a^2 = \{[u'_x(a, \lambda, 0)]^2 + \lambda[u(a, \lambda, 0)]^2 - F(u^2(a, \lambda, 0))\}.$$

При таком выборе $\lambda > 0$, очевидно, в силу (11) $|u(a, \lambda, x)| < A$ для всех $x \in [0, 1]$. Поэтому $\max\limits_{x \in [0,1]} |u(a, \lambda, x)| \to 0$ при $\lambda \to +\infty$. В частности, отсюда вытекает, что функция $u(a, \lambda, x)$ удовлетворяет уравнению

$$u'' + c(\lambda, x)u = 0, \quad x \in (0, 1),$$

где функция $c(\lambda, x) > 0$ сколь угодно велика равномерно по $x \in [0, 1]$, если $\lambda > 0$ достаточно велико. Следовательно, в силу теорем сравнения решение $u(a, \lambda, x)$ задачи (9)-(10) имеет более n корней в интервале $x \in (0, 1)$ для достаточно больших значений $\lambda > 0$.

Пусть Λ_n– множество значений $\lambda > 0$, при каждом из которых решение $u(a, \lambda, x)$ задачи (9)-(10) имеет не менее $(n + 1)$ корней как функция аргумента x в интервале $(0, 1)$. Согласно предыдущему множество Λ_n непусто. Пусть $\lambda_n(a) = \inf \Lambda_n$. Тогда $\lambda_n(a) > 0$. По теореме о непрерывной зависимости решения задачи (9)-(10) от параметра λ, соответствующее решение $u(a, \lambda_n(a), x)$ имеет не более n корней как функция аргумента x в интервале $(0, 1)$, так как иначе существовали бы значения $\lambda < \lambda_n(a)$, принадлежащие множеству Λ_n (здесь надо использовать то обстоятельство, что, поскольку функция $u \equiv 0$ удовлетворяет уравнению (9), в силу единственности решения задачи Коши для этого уравнения имеем $u'_x(a, \lambda, x) \neq 0$, если $u(a, \lambda, x) = 0$ для некоторого x). Аналогично, $u(a, \lambda_n(a), x)$ как функция аргумента x имеет не менее n корней в интервале $(0, 1)$ и $u(a, \lambda_n(a), 1) = 0$.

Докажем единственность указанного значения $\lambda = \lambda_n(a)$, при котором решение $u(a, \lambda_n(a), x)$ задачи (9)-(10) имеет ровно n корней в интервале $x \in (0, 1)$ и удовлетворяет условию $u(a, \lambda_n(a), 1) = 0$. Предположим, что существует $\lambda' \neq \lambda_n(a)$, удовлетворяющее условиям леммы. Используя автономность уравнения (9), легко можно доказать, что

(а) *для любого корня x_0 произвольного решения уравнения (9) это решение нечетно относительно точки x_0 на любом отрезке $[x_0 - b, x_0 + b] \subset [0, 1]$;*

(б) *между любыми двумя соседними корнями $x_1 < x_2$ произвольного решения $u(x)$ уравнения (9) лежит единственная точка $x_0 = \frac{x_1+x_2}{2}$ экстремума этого решения, оно строго монотонно на отрезках $[x_1, x_0]$ и $[x_0, x_2]$ и четно относительно точки x_0 на любом отрезке $[x_0 - b, x_0 + b] \subset [0, 1]$;*

(в) $u(a, \lambda, x) = u(a, \lambda, x + 2x_1)$ *для любого x такого, что $x, x + 2x_1 \in [0, 1]$, где x_1– минимальный положительный корень функции u.*

Из свойств (а)-(в) вытекает, в частности, что каждое из двух решений $u(a, \lambda_n(a), x)$ и $u(a, \lambda', x)$ задачи (9)-(10), монотонно возрастая, достигает максимума в точке $x = \frac{1}{2(n+1)}$. Пусть еще для определенности $\lambda' > \lambda_n(a)$, и пусть $u_1(x) = u(a, \lambda_n(a), x)$, а $u_2(x) = u(a, \lambda', x)$. Тогда ввиду равенства (11) ясно, что $u_1(x) > u_2(x)$ в некоторой правой полуокрестности точки $x = 0$. Пусть $\overline{x} > 0$– минимальное значение аргумента $x \in \frac{1}{2(n+1)}$, при котором $u_1(x) = u_2(x)$, либо $\overline{x} = \frac{1}{2(n+1)}$, если $u_1(x) \neq u_2(x)$ для всех $x \in (0, \frac{1}{2(n+1)})$. Умножая уравнение (9), записанное для функции $u_1(x)$, на $u_2(x)$, а уравнение (9), записанное для функции $u_2(x)$, на $u_1(x)$, вычитая получающиеся тождества одно из другого и интегрируя получающееся равенство по отрезку $[0,\overline{x}]$, получим:

$$0 \geq \int\limits_0^{\overline{x}} u_1(x)u_2(x)[f(u_1^2(x)) - f(u_2^2(x)) - \lambda_n(a) + \lambda']dx. \qquad (12)$$

Но, поскольку по предположению $u_1(x) > u_2(x)$ при $x \in (0,\overline{x})$, правая часть этого неравенства положительна, т. е. получаем противоречие.

Свойство $\lambda_n(a) > (\pi(n+1))^2$ следует из теоремы сравнения. Тем самым, лемма 5 доказана.

Сохраним обозначение $\lambda_n(a)$ для значения параметра λ из леммы 5. Положим $u_n(a,\lambda_n(a),x) = u_n(a,x)$. В силу леммы 5 эти определения корректны и $\lambda_n(a) > 0$ для любых $a > 0$ и целого $n \geq 0$. Положим еще $\alpha_n(a) = \int\limits_0^1 u_n^2(a,x)dx$.

Лемма 6. *Для любого целого $n \geq 0$ функция $\lambda_n(a)$ не убывает и непрерывна на полупрямой $a > 0$.*

Доказательство. Пусть $a_1 > a_2 > 0$. Докажем, что $\lambda_n(a_1) \geq \lambda_n(a_2)$. Предположим противное, т. е. что $\lambda_n(a_1) < \lambda_n(a_2)$. Пусть $u_1(x) = u_n(a_1,x)$, а $u_2(x) = u_n(a_2,x)$. В силу свойств (а)-(в), сформулированных при доказательстве леммы 5, каждая из функций $u_1(x)$ и $u_2(x)$ монотонно возрастает на отрезке $[0,\frac{1}{2(n+1)}]$ и $x = \frac{1}{2(n+1)}$ является точкой максимума для каждой из них. В силу равенства (11), для любого $y > 0$, для которого существуют $x_1, x_2 \in (0,\frac{1}{2(n+1)})$ такие, что $u_1(x_1) = u_2(x_2) = y$, имеем $u_1'(x_1) > u_2'(x_2)$. Следовательно, $u_1(x) > u_2(x)$ для всех $x \in (0,\frac{1}{2(n+1)})$. Действуя так же, как при выводе неравенства (12), и взяв $\overline{x} = \frac{1}{2(n+1)}$, получим

$$0 = \int\limits_0^{\frac{1}{2(n+1)}} u_1(x)u_2(x)[f(u_1^2(x)) - f(u_2^2(x)) - \lambda_n(a_1) + \lambda_n(a_2)]dx,$$

что, очевидно, противоречиво, так как правая часть здесь положительна. Тем самым, доказано, что функция $\lambda_n(a)$ не убывает на полупрямой $a > 0$.

Докажем непрерывность функции $\lambda_n(a)$. Предположим противное, т. е. что существует $a_0 > 0$ такое, что $\lim\limits_{a\to a_0+0} \lambda_n(a) > \lambda_n(a_0)$ или

$\lim\limits_{a\to a_0-0} \lambda_n(a) < \lambda_n(a_0)$. Пусть для определенности выполнено первое неравенство (рассуждения во втором случае аналогичны). Тогда, как нетрудно убедиться, из уравнения (9) и равенства (11) следует, что для каждого $a > a_0$, достаточно близкого к a_0, существует $d(a) > 0$ такое, что

1) $d(a) \to +0$ при $a \to a_0 + 0$;
2) $u_n(a,x) > u_n(a_0,x)$ при $x \in (0,d(a))$;
3) $u_n(a,d(a)) = u_n(a_0,d(a))$ и $\frac{d}{dx}u_n(a,d(a)) \leq \frac{d}{dx}u_n(a_0,d(a))$.

Поэтому $u_n(a,x) < u_n(a_0,x)$ в некоторой правой полуокрестности точки $x = d(a)$ (поскольку $u''_{n,xx}(a,d(a)) < u''_{n,xx}(a_0,d(a))$). Тогда, как и выше, из равенства (11) следует, что $u_n(a,x) < u_n(a_0,x)$ для всех $a > a_0$, достаточно близких к a_0, и всех $x \in (d(a),\frac{1}{2(n+1)})$. Используя тождество, аналогичное тождеству (12), с интегралом по отрезку $[d(a),\frac{1}{2(n+1)}]$, получим противоречие. Итак, функция $\lambda_n(a)$ непрерывна, и лемма 6 доказана.

Лемма 7. *$\alpha_n(a)$– непрерывная монотонно возрастающая на полупрямой $a > 0$ функция и $\lim\limits_{a\to+0}\alpha_n(a) = 0$, а $\lim\limits_{a\to+\infty}\alpha_n(a) = +\infty$.*

Доказательство. Непрерывность функции $\alpha_n(a)$ вытекает из непрерывности $\lambda_n(a)$ (см. лемму 6) и теоремы о непрерывной зависимости решения задачи Коши (9)-(10) от параметров a и λ. Далее, поскольку, как доказано ранее, $u_n(a,x) \to 0$ при $a \to +0$ равномерно по $x \in [0,1]$ (см. доказательство леммы 6), имеем $\lim\limits_{a\to+0}\alpha_n(a) = 0$.

Докажем, что $\lim\limits_{a\to+\infty}\alpha_n(a) = +\infty$. Заметим, прежде всего, что $u''_{n,xx}(a,x) \leq 0$ для всех $x \in (0,\frac{1}{2(n+1)})$. Действительно, если предположить, что это не так, то найдется $x_0 \in (0,\frac{1}{2(n+1)})$ такое, что $u''_{n,xx}(a,x_0) > 0$. Но $u'_{n,x}(a,x_0) > 0$, как было указано ранее, и, кроме того, $f(u^2)u - \lambda_n(a)u$– неубывающая функция на полупрямой $u \in [0,+\infty)$, причем по предположению $f(u_n^2(a,x_0)) - \lambda_n(a)u_n(a,x_0) > 0$. Следовательно, получаем, что $u'_{n,x}(a,x) > 0$ для всех $x \in (x_0,1]$, что противоречиво. Итак, $u''_{n,xx}(a,x) \leq 0$ для всех $x \in (0,\frac{1}{2(n+1)})$.

Для доказательства того, что $\lim\limits_{a\to+\infty}\alpha_n(a) = +\infty$, теперь достаточно доказать, что $u_n(a,\frac{1}{2(n+1)}) \to +\infty$ при $a \to +\infty$ (так как, поскольку, как доказано выше, $u_n(a,x)$– вогнутая функция аргумента x на отрезке $[0, \frac{1}{n+1}]$, отсюда следует, что $\alpha_n(a) \to +\infty$ при $a \to +\infty$). Предположим, что для некоторой последовательности $a_k \to +\infty$ выполнено $u_n(a_k, \frac{1}{2(n+1)}) \leq C < +\infty$. Возможны два случая: А. $f(+\infty) = +\infty$ и Б. $f(+\infty) < +\infty$.

А. Пусть $f(+\infty) = +\infty$. Тогда $\lambda_n(a) \to +\infty$ при $a \to +\infty$ (так как иначе из равенства (11) получили бы, что $\lim\limits_{k\to\infty} u_n(a_k, \frac{1}{2(n+1)}) = +\infty$, что противоречиво). Поэтому функции $u_n(a_k, x)$ удовлетворяют в интервале $x \in (0, \frac{1}{2(n+1)})$ уравнениям

$$u''_{n,xx} + g_k(x)u_n(a_k, x) = 0,$$

где $g_k \to +\infty$ при $k \to \infty$ равномерно по $x \in (0, \frac{1}{2(n+1)})$. Следовательно, согласно стандартным рассуждениям, основанным на теоремах сравнения, функции $u_n(a_k, x)$ для всех достаточно больших номеров k должны иметь корень в интервале $(0, \frac{1}{2(n+1)})$, что противоречиво. Итак, случай А не возможен.

Б. Пусть $f(+\infty) < +\infty$. Тогда, с одной стороны, в силу теорем сравнения $\lambda_n(a_k) \leq f(+\infty) + (\pi(n+1))^2 < +\infty$. Но, с другой стороны, как и в случае А, $\lim\limits_{k\to\infty} \lambda_n(a_k) = +\infty$, т. е. получаем противоречие. Итак, доказано, что $\lim\limits_{a\to+\infty} \alpha_n(a) = +\infty$.

Остается доказать, что $\alpha_n(a)$– монотонно возрастающая функция на полупрямой $a \in (0, +\infty)$. Чтобы доказать это утверждение, в силу свойств (а)-(в), указанных при доказательстве леммы 5, достаточно доказать, что для любых a_1, a_2 : $0 < a_1 < a_2$, для всех $x \in (0, \frac{1}{2(n+1)})$ выполнено $u_n(a_1, x) \leq u_n(a_2, x)$. Предположим противное, т. е. что существуют $0 < a_1 < a_2$ такие, что $u_n(a_1, x) > u_n(a_2, x)$ для некоторого $x \in (0, \frac{1}{2(n+1)})$. Пусть $x_1 > 0$-минимальная точка из этого интервала такая, что $u_n(a_1, x_1) = u_n(a_2, x_1)$. Докажем, что $u_n(a_1, x) > u_n(a_2, x)$ в некоторой правой полуокрестности точки x_1. Предположим противное. Тогда $u'_{n,x}(a_1, x_1) = u'_{n,x}(a_2, x_1)$. В силу равенства (11), записанного для $x = x_1$, имеем $\lambda_n(a_1) < \lambda_n(a_2)$, следовательно, в силу уравнения (9), $u''_{n,xx}(a_1, x_1) > u''_{n,xx}(a_2, x_1)$, т. е. получаем противоречие. Итак, доказано, что $u_n(a_1, x) > u_n(a_2, x)$ в некоторой правой полуокрестности точки x_1. Отметим еще, что из этих рассуждений следует, что $u'_{n,x}(a_1, x_1) > u'_{n,x}(a_2, x_1)$, если $\lambda_n(a_1) = \lambda_n(a_2)$.

Пусть x_2– минимальное значение $x \in (x_1, \frac{1}{2(n+1)})$ такое, что $u_n(a_1, x) = u_n(a_2, x)$, либо $x_2 = \frac{1}{2(n+1)}$, если в интервале $(x_1, \frac{1}{2(n+1)})$ нет

такой точки. Повторяя процедуру, использованную при выводе неравенства (12), с интегрированием по отрезку $[x_1, x_2]$, получим:

$$0 \geq \int\limits_{x_1}^{x_2} u_n(a_1, x)u_n(a_2, x)[f(u_n^2(a_1, x)) - f(u_n^2(a_2, x)) - \lambda_n(a_1) + \lambda_n(a_2)]dx,$$

причем в силу предыдущего здесь имеет место строгое неравенство, если $\lambda_n(a_1) = \lambda_n(a_2)$. Таким образом, получаем противоречие. Тем самым, $\alpha_n(a)$– монотонно возрастающая функция аргумента $a > 0$, и лемма 7 доказана.

Лемма 8. *Для любого целого $n \geq 0$ существует единственная с точностью до множителя ± 1 при u_n пара $(\lambda_n, u_n(x))$, удовлетворяющая задаче (3)-(5), такая, что функция $u_n(x)$ имеет ровно n корней в интервале $(0, 1)$; при этом имеет место неравенство*

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n < \ldots \tag{13}$$

Доказательство. В силу лемм 5–7 достаточно доказать неравенство (13). Предположим, что $\lambda_n \geq \lambda_{n+1}$ для некоторого $n \geq 0$. Решение $u_{n+1}(x)$ возрастает при $x \in I = [0, \frac{1}{2(n+2)}]$ и $u'_{n+1}(\frac{1}{2(n+2)}) = 0$. Ясно, что невозможен случай, когда $u_{n+1}(x) \geq u_n(x)$ для всех $x \in I$, поскольку тогда $f(u_{n+1}^2(x)) - \lambda_{n+1} \geq f(u_n^2(x)) - \lambda_n$ при $x \in I$, следовательно, по теореме сравнения должна была бы существовать точка $x_0 \in I$ такая, что $u'_n(x_0) = 0$. Поэтому возможны лишь следующие два случая А и Б.

А. Пусть существуют точки $0 \leq x_1 < x_2 \leq \frac{1}{2(n+2)}$ такие, что $u_{n+1}(x) > u_n(x)$ при $x \in (x_1, x_2)$ и $u_{n+1}(x_1) = u_n(x_1)$, а $u_{n+1}(x_2) \geq u_n(x_2)$, причем $u_{n+1}(x_2) = u_n(x_2)$, если $x_2 < \frac{1}{2(n+2)}$. Действуя, как при выводе неравенства (12) с интегралом по отрезку $[x_1, x_2]$, получаем неравенство

$$0 \geq \int\limits_{x_1}^{x_2} u_{n+1}(x)u_n(x)[f(u_{n+1}^2(x)) - f(u_n^2(x)) - \lambda_{n+1} + \lambda_n]dx,$$

причем, как и при доказательстве леммы 7, здесь имеет место строгое неравенство, если $\lambda_{n+1} = \lambda_n$. Поэтому получаем противоречие. Следовательно, случай А не возможен.

Б. Пусть $u_{n+1}(x) \le u_n(x)$ для всех $x \in I$. Заметим, что тогда $u_{n+1}(x) < u_n(x)$ для некоторого $x_0 \in I$ (так как иначе было бы $u_n'(\frac{1}{2(n+2)}) = 0$). Далее, ясно, что $u_{n+1}(x) \le u_n(x)$ для всех $x \in [0, \frac{1}{n+1}]$. Докажем, что тогда $||u_{n+1}||_{L_2} < 1$, если $||u_n||_{L_2} = 1$. Для произвольного целого $k = \overline{1, n+1}$ рассмотрим интервал $I_k = (\frac{k-1}{n+1}, \frac{k}{n+1})$ (здесь $u_n(\frac{k-1}{n+1}) = u_n(\frac{k}{n+1}) = 0$). В этом интервале функция u_{n+1} имеет, очевидно, ровно один корень $\overline{x}$ (поскольку $\frac{k}{n+2} > \frac{k-1}{n+1}$ для каждого $k = \overline{2, n+1}$). Заменим функцию u_{n+1} на отрезке I_k функцией $v(x)$, равной $u_{n+1}(\overline{x} - x + \frac{k-1}{n+1})$ при $x \le \overline{x}$ и равной $u_{n+1}(\overline{x} - x + \frac{k}{n+1})$ при $x > \overline{x}$. Проделаем эту операцию для каждого $k = \overline{1, n+1}$. Тогда, что геометрически очевидно, в силу свойств (а)-(в) из доказательства леммы 5, график функции $|v(x)|$ будет лежать не выше графика функции $|u_n(x)|$, причем найдется интервал $J \subset (0,1)$ такой, что $|v(x)| < |u_n(x)|$ для всех $x \in J$. Поэтому

$$||u_{n+1}||_{L_2} = ||v||_{L_2} < ||u_n||_{L_2} = 1,$$

т. е. получаем противоречие. Тем самым, лемма 8 доказана.

Лемма 9. *Семейство функций $\{u_n(x)\}_{n=0,1,2,\ldots}$ из леммы 8 равномерно ограничено на отрезке* $[0, 1]$.

Доказательство. Рассмотрим последовательность $u_n(b_n, x)$ решений задачи Коши (9)-(10) с $b_n = 10\pi(n+1)$. Докажем, что эта последовательность равномерно ограничена. Пусть $d_n = u_n(b_n, \frac{1}{2(n+1)})$. Тогда, очевидно, достаточно доказать ограниченность последовательности d_n сверху. В силу теорем сравнения для каждого номера n $\lambda_n(b_n) > (\pi(n+1))^2$. Далее, из тождества (11) следует неравенство

$$(10\pi(n+1))^2 \ge G(\lambda_n(b_n), u_n(b_n, x)) \ge (\pi(n+1))^2 u_n^2(b_n, x) - F(u_n^2(b_n, x)), \tag{14}$$

из которого вытекает, что

$$d_n < 20$$

для всех достаточно больших номеров n. Действительно, если предположить, что это не так, то получили бы, что в (14) правая часть больше левой для достаточно больших номеров n и тех x, для которых $|u_n(b_n, x)| = 20$, что противоречиво. Итак, равномерная ограниченность последовательности $\{u_n(b_n, x)\}$, где $n = 0, 1, 2, \ldots$, доказана.

Докажем, что $||u_n(b_n, .)||_{L_2} > 1$ для всех достаточно больших номеров n. Положим $h_n(x) = 10\sin[\pi(n+1)x]$. Отметим (это используется далее), что $u_{n,x}'(b_n, 0) = h_n'(0)$ и, ввиду свойств (а)-(в) из доказательства леммы 5, $u_{n,x}'(b_n, 1) = h_n'(1)$. Имеем:

$$-h_n'' = \mu_n h_n, \quad x \in (0, 1),$$

$$h_n(0) = h_n(1) = 0,$$

где $\mu_n = (\pi(n+1))^2$. Возьмем произвольную функцию $\psi(x) \in C^1[0,1]$, такую, что $\psi(x) \ge C > 0$ и $\psi'(x) \ge C > 0$ для всех $x \in [0,1]$ (где $C > 0$ не зависит от x). Из предыдущего уравнения для функций h_n и уравнения (9) получим для функций $w_n(x) = u_n(b_n, x) - h_n(x)$:

$$-w_n'' + W_n(x) = \mu_n w_n, \quad x \in (0, 1),$$

где, ввиду Предложения (из которого следует, что $|\lambda_n - \mu_n| \le C$) и доказанной выше равномерной ограниченности семейства функций $\{u_n(b_n, x)\}_{n \ge 0}$, семейство непрерывных функций $\{W_n(x)\}$ равномерно ограничено. Умножая это уравнение на $\psi(x) w_n'(x)$, интегрируя получающееся выражение по отрезку $[0,1]$ и применяя формулу интегрирования по частям, придем к неравенству

$$\mu_n ||w_n||_{L_2}^2 \le C \int_0^1 |w_n'(x)| dx \le C ||w_n'||_{L_2},$$

где $C > 0$ не зависит от номера n. Ввиду этого неравенства и поскольку $||h_n||_{L_2} > 1$ для всех номеров n, для доказательства того, что $||u_n(b_n, .)||_{L_2} > 1$ для всех достаточно больших номеров n, достаточно доказать, что $||w_n'||_{L_2} \le C_1(n+1)$, где $C_1 > 0$ не зависит от n. Но это неравенство сразу получается путем умножения уравнения

$$-w_n''(x) + W_n(x) = \mu_n w_n(x)$$

на w_n и интегрирования по отрезку $[0,1]$. Тем самым, доказано, что $||u_n(b_n, .)||_{L_2} > 1$ для всех достаточно больших номеров n. Отсюда и из леммы 7 вытекает, что

$$|u_n'(0)| < b_n \tag{15}$$

для всех достаточно больших номеров n.

Далее, используя (15), так же, как для функций $u_n(b_n, .)$, можно доказать, что семейство функций $\{u_n(.)\}_{n=0,1,2,...}$ равномерно ограничено. Тем самым, лемма 9 доказана.

Лемма 10. *Пусть $N \geq 0$– четное. Тогда представление $u_N = \sum_{n>N} a_n u_n$, где $a_n \in R$, а сходимость ряда понимается в смысле пространства $L_2(0,1)$, невозможно.*

Доказательство. Предположим противное, т. е. что $u_N = \sum_{n>N} a_n u_n$ для некоторого четного N. Поскольку каждая четная относительно точки $x = \frac{1}{2}$ функция ортогональна каждой нечетной в $L_2(0,1)$, имеем $\sum_{r=1}^{\infty} a_{N+2r-1} u_{N+2r-1} = 0$ в $L_2(0,1)$. Положим для произвольной функции $g \in L_2(0,1)$

$$(Kg)(x) = \int_x^{\frac{1}{2}} g(t)dt \quad \text{и} \quad (Lg)(x) = \int_0^x g(t)dt.$$

Поскольку ряд $\sum_{r=1}^{\infty} a_{N+2r} u_{N+2r}$ сходится в $L_2(0,1)$, для произвольных $0 \leq c < d \leq 1$ он сходится в пространстве $L_1(c,d)$ к функции u_N, поэтому для любых натурального l и $x \in [0,1]$ имеем

$$\left((LK)^l u_N\right)(x) = \sum_{r=1}^{\infty} a_{N+2r} \left((LK)^l u_{N+2r}\right)(x). \tag{16}$$

Пусть $n = N + 2r$. Из свойств (а)-(в) функций u_n, указанных в доказательстве леммы 5, получаем

$$p_{l,r} = \max_{x\in[0,1]} \left|\left((LK)^l u_n\right)(x)\right| =$$

$$= \left| \int_0^{\frac{1}{2(n+1)}} dx_1 \int_{x_1}^{\frac{1}{2(n+1)}} dx_2 \ldots \int_0^{x_{2l-2}} dx_{2l-1} \int_{x_{2l-1}}^{\frac{1}{2(n+1)}} u_n(x_{2l}) dx_{2l} \right|. \tag{17}$$

Далее, поскольку в силу доказательств лемм 7 и 9 каждая функция $u_n(x)$ положительна и вогнута на отрезке $I_n = [0, \frac{1}{2(n+1)}]$ и

$0 < u_n'(0) \leq C_1(n+1)$, где $C_1 > 0$ не зависит от номера n, имеем $0 \leq u_n(x) \leq C_1(n+1)x$ для всех $x \in I_n$ и $u_N(x) \geq C_2(N+1)x$ для всех $x \in I_N$, где $C_2 = 2u_N(\frac{1}{2(N+1)}) > 0$. Поэтому из (17) получаем

$$p_{l,r} \leq C_1(n+1) \left| \int_0^{\frac{1}{2(n+1)}} dx_1 \int_{x_1}^{\frac{1}{2(n+1)}} dx_2 \ldots \int_0^{x_{2l-2}} dx_{2l-1} \int_{x_{2l-1}}^{\frac{1}{2(n+1)}} x_{2l} dx_{2l} \right|, \tag{18}$$

где $n > N$– четное, и

$$p_{l,0} \geq C_2(N+1) \left| \int_0^{\frac{1}{2(N+1)}} dx_1 \int_{x_1}^{\frac{1}{2(N+1)}} dx_2 \ldots \int_0^{x_{2l-2}} dx_{2l-1} \int_{x_{2l-1}}^{\frac{1}{2(N+1)}} x_{2l} dx_{2l} \right|. \tag{19}$$

Сделаем в интеграле из правой части (18) замену переменных, полагая $y_k = \left(\frac{n+1}{N+1}\right) x_k$, где $k = \overline{1,2l}$. Тогда в силу (18) и (19) получаем (напомним, что $n = N + 2r$):

$$p_{l,r} \leq C \left(\frac{N+1}{N+2r+1}\right)^{2l} p_{l,0}, \tag{20}$$

где $C = C_1 C_2^{-1} > 0$ не зависит от r и l. Теперь из (16) и (20) вытекает, с учетом того, что $\max_n |a_n| < +\infty$ (поскольку очевидно, что $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$):

$$1 \leq C_3 \sum_{r=1}^{\infty} \left(\frac{N+1}{N+2r+1}\right)^{2l},$$

где постоянная $C_3 > 0$ не зависит от r и l. Но ясно, что в этом неравенстве правая часть стремится к нулю при $l \to \infty$, т. е. получаем противоречие. Тем самым, лемма 10 доказана.

Лемма 11. *Система функций $\{u_n(x)\}$, где $n \geq 0$– целое, линейно независима в $L_2(0,1)$.*

Доказательство. Предположим противное. Тогда $u_N = \sum_{n>N} a_n u_n$ для некоторого номера N и коэффициентов $a_n \in R$, где сходимость ряда понимается как сходимость в $L_2(0,1)$. В силу леммы 10 N нечетно, следовательно, $\sum_{r=1}^{\infty} a_{N+2r-1}u_{N+2r-1} = 0$ в $L_2(0,1)$, поскольку каждая четная относительно точки $x = \frac{1}{2}$ функция из $L_2(0,1)$ ортогональна каждой нечетной в $L_2(0,1)$, а функции u_n четны относительно этой точки при четных n и нечетны при нечетных n. Следовательно, по лемме 10 $a_{N+2r-1} = 0$ для всех натуральных r. Далее, функция $u_N(x)$ либо четна, либо нечетна относительно точки $x = \frac{1}{4}$ на отрезке $[0, \frac{1}{2}]$. Если она четна на указанном отрезке относительно указанной точки, то, повторяя рассуждения из доказательства леммы 10 для отрезка $[0, \frac{1}{2}]$ вместо $[0,1]$, придем к противоречию. Если же функция $u_N(x)$ нечетна на отрезке $[0, \frac{1}{2}]$ относительно точки $x = \frac{1}{4}$, то продолжим эти рассуждения, рассматривая эту функцию на отрезке $[0, \frac{1}{4}]$. Ясно, что, рассуждая таким образом, за конечное число шагов придем к тому, что функция $u_N(x)$ нечетна на отрезках $[0, 2^{-k}]$, где $k = \overline{0, m-1}$, относительно их середин и четна на отрезке $[0, 2^{-m}]$ относительно его середины. Применяя далее рассуждения из доказательства леммы 10, получим противоречие. Тем самым, лемма 11 доказана.

Докажем теорему 2. В силу (13) имеем $0 < \lambda_0 < \lambda_1 < \ldots < \lambda_n < \ldots$. Введем функцию $V(\lambda, x)$, полагая $V(\lambda, x) = 0$, если $\lambda \le 0$, $V(\lambda_n, x) = f(u_n^2(x))$ для каждого $n = 0, 1, 2, \ldots$ и доопределяя ее линейно по λ и непрерывно на интервалах

$$(0, \lambda_0),\ (\lambda_0, \lambda_1),\ \ldots, (\lambda_{n-1}, \lambda_n),\ \ldots$$

для каждого $x \in [0,1]$. Очевидно, что, ввиду леммы 9, построенная функция $V(\lambda, x)$ удовлетворяет условию (V), пары (λ_n, u_n), где $n \ge 0$ целое, являются собственными значениями и нормированными собственными функциями задачи (1)-(2) с построенным потенциалом, причем по лемме 11 семейство функций $\{u_n\}_{n=0,1,2,\ldots}$ линейно независимо в $L_2(0,1)$. По теореме 1 это семейство является базисом пространства $L_2(0,1)$, и теорема 2 доказана.

Пример. Предположения теоремы 2 выполнены, например, для задачи

$$-u'' + |u|^{p-1}u = \lambda u, \quad x \in (0,1),$$
$$u(\lambda, 0) = u(\lambda, 1) = 0,$$

$$\int_0^1 u^2(\lambda, x)dx = 0,$$

где $p \ge 1$– постоянная.

Пользуясь случаем, автор выражает искреннюю благодарность чл.-корр. РАН, профессору С.И. Похожаеву, который не раз отмечал важность и сложность задач, одной из которых посвящена теорема 2, за полезные и приятные дискуссии в стенах МИРАН им. В.А. Стеклова, и профессору В.А. Мещерякову, по совету которого автор начал изучать спектральные задачи для оператора Штурма – Лиувилля с потенциалом, зависящим от спектрального параметра.

Литература

1. Жидков П.Е. О задаче на собственные значения для оператора Штурма – Лиувилля с потенциалом, зависящим от спектрального параметра// Препр. ОИЯИ. Р5-96-52. Дубна. 1996.

2. Logunov A.A., Tavkhelidze A.N. Quasi-optical approach in quantum field theory// Nuovo Cim. 1963. V. **29**. No 2. P. 380-399.

3. Kadyshevsky V.G., Mir-Kasimov R.M., Skachkov N.B. Quasi-potential approach and the expansion in relativistic spherical functions// Nuovo Cim. 1968. V. **55A**. No 2. P. 233-257.

4. Габов С.Ф., Малышева Г.Ю. Об одной спектральной задаче, связанной с колебаниями вязкой стратифицированной жидкости// Ж-л Выч. Мат. и Мат. Физ. 1984. Т. **24**. No 6. С. 893-899.

5. Khoromskii B.N., Makarenko T.M., Nikonov E.G., Skachkov N.B., Zhidkov E.P. Numerical methods for solving relativistic equations describing bound states of a double-particle system// In: "Proceedings of the International Conference on Programming and Mathematical methods for Solving Physical Problems, Dubna, 1993" (Ed. by Yu.Yu. Lobanov and E.P. Zhidkov), World Scientific Publ. 1994. P. 210-214.

6. Jaulent M., Jean C. The inverse scattering problem for a class of potentials depending on energy// Commun. Math. Phys. 1972. V. **28**. P. 177-220.

7. Antonowicz M., Fordy A.P. A family of completely integrable multi-hamiltonian systems// Physics Letters **A**. 1987. V. **122**. No 2. P. 95-99.

8. Antonowicz M., Fordy A.P. Factorisation of energy dependent Schrödinger operators: Miura maps and modified systems// Commun. Math. Phys. 1989. V. **124**. P. 465-486.

9. Келдыш М.В. О собственных значениях и собственных функциях некоторых классов несамосопряженных операторов// ДАН СССР. 1951. Т. 77. No 1. С. 11-14.

10. Крейн М.Г., Лангер Г.К. К теории квадратичных пучков самосопряженных операторов// ДАН СССР. 1964. Т. 154. No 6. С. 1258-1261.

11. Махмудов А.П. О полноте собственных элементов некоторых нелинейных операторных уравнений// ДАН СССР. 1982. Т. **263**. No 1. С. 23-27.

12. Lions P.L. The Choquard equation and related questions// Nonlinear Anal.: Theory, Meth. Appl. 1980. V. 4. No 6. P. 1063-1073.

Рукопись поступила в издательский отдел
19 июля 1996 года.

Жидков П.Е. Р5-96-269

О полноте систем собственных функций оператора Штурма—Лиувилля с потенциалом, зависящим от спектрального параметра, и некоторой нелинейной задачи

Сначала рассматривается задача на собственные значения для оператора Штурма—Лиувилля на отрезке [0,1] с потенциалом, зависящим от спектрального параметра, при нулевых граничных условиях Дирихле. Для этой задачи при некоторых предположениях о потенциале доказано, что необходимым и достаточным условием полноты в пространстве $L_2(0,1)$ произвольной системы собственных функций, обладающей для произвольного целого неотрицательного n единственной функцией с n корнями в интервале $(0,1)$, является линейная независимость функций из этой системы в $L_2(0,1)$. Затем этот результат применен для исследования спектральной задачи для некоторого нелинейного оператора типа Штурма—Лиувилля. Для этой задачи доказана полнота в пространстве $L_2(0,1)$ системы ее собственных функций.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики им.Н.Н.Боголюбова ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна, 1996

Перевод автора

Zhidkov P.E. P5-96-269

On the Completeness of Systems of Eigenfunctions of the Sturm—Liouville Operator with a Potential Depending on the Spectral Parameter and a Nonlinear Problem

First, the eigenvalue problem on the segment [0,1] for the Sturm—Liouville operator with a potential depending on the spectral parameter with the zero Dirichlet boundary conditions is considered. For this problem, under some hypotheses on the potential, it is proved that the necessary and sufficient condition for an arbitrary system of eigenfunctions, possessing a unique function with n roots in the interval $(0,1)$ for an arbitrary non-negative integer number n, being complete in the space $L_2(0,1)$ is the linear independence of the functions from this system in the space $L_2(0,1)$. Then, this result is applied for the investigation of an eigenvalue problem for a nonlinear operator on the Sturm—Liouville type. For this problem, the completeness of the system of its eigenfunctions in the space $L_2(0,1)$ is proved.

The investigation has been performed at the Bogoliubov Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna, 1996