ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р5-96-226

В.Ж.Сакбаев*

О ЗАДАЧЕ КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СРЕДНЕГО ПОЛЯ, ОПИСЫВАЮЩЕГО МОДЕЛЬ ТВЕРДОГО МАГНЕТИКА

Направлено в журнал «Математические заметки»

---

*E-mail: sakbaev@thsun1.jinr.dubna.su

1996

1. Введение. Описание модели

В настоящей работе рассмотрена модель, описывающая поведение магнетика, состоящего из частиц (атомов, молекул, ионов), обладающих ненулевым спином и ненулевым магнитным дипольным моментом (МДМ). В рассматриваемой модели применяется классическое описание состояния и динамики системы: каждая частица вещества характеризуется своим положением в пространстве $\vec{x} \in R^3$; ее спиновое состояние определяется 3-мерным вектором механического момента частицы $\vec{s}(t)$, $|\vec{s}(t)| = 1$ для каждой частицы (см. [1-3]).

Предполагается, что частица, находящаяся в состоянии $\vec{s}$, обладает МДМ $\vec{\mu} = \mu_e \vec{s}$, где константа μ_e определяется свойствами частиц. Пусть единицы измерения физических величин выбраны так, что $\mu_e = 1$. МДМ $\vec{s}$, находящийся в точке $\vec{x}_0 \in R^3$, создает магнитное поле

$$\vec{B}(\vec{x}) = \nabla_x \left(\frac{(\vec{s}, \vec{x} - \vec{x}_0)}{|\vec{x} - \vec{x}_0|^3}\right) \tag{1}$$

в точках, достаточно удаленных от $\vec{x}_0$ (см., напр., [3]).

Будем предполагать, что частицы вещества расположены в ограниченной области $\Omega \subset R^3$ с гладкой границей $\partial\Omega$, тогда состояние каждой частицы характеризуется координатами $(\vec{x}, \vec{s})$, $\vec{x} \in \Omega$, $\vec{s} \in S^2$.

В данной модели предполагается, что каждая частица находится в некоторой точке Ω и не изменяет своего положения $\vec{x}$, а движение ее спиновой координаты $\vec{s}(\vec{x}, t)$ подчиняется классическому уравнению (см. [1, 2])

$$\frac{d\vec{s}}{dt} = [\vec{B}(\vec{x}, \vec{s}, t) \times \vec{s}], \tag{2}$$

где момент сил $[\vec{B} \times \vec{s}]$ возникает в результате взаимодействия МДМ с магнитным полем, созданным всей совокупностью МДМ и внешними источниками, а также в результате учета электростатического взаимодействия частиц друг с другом с помощью введения эффективных магнитных полей. Здесь $\vec{B}(\vec{x}, \vec{s}, t)$ - индукция суммарного эффективного магнитного поля, которая в соответствии с [1, 2] определяется как суперпозиция внешнего магнитного поля $\vec{B}_0(\vec{x}, t)$, магнитного поля дипольного взаимодействия $\vec{B}(\vec{x}, t)$ и специальных полей, имеющих электростатическую природу: эффективного магнитного поля обменного взаимодействия $\vec{B}_I(\vec{x}, t)$ и эффективного магнитного поля анизатропии кристалла

$\vec{B}_a(\vec{s})$. Возможность описать влияние электрических полей на изменение состояния частицы с помощью эффективного магнитного поля обсуждалась в указанной литературе. Выводы работы справедливы, в частности, и для систем с чисто магнитным взаимодействием.

В работе изучается описание самосогласованной динамики спинового состояния системы $\vec{s}(\vec{x},t)$ в поле $\vec{B}(\vec{x},\vec{s},t)$, связанном с этой динамикой. Рассматриваются вопросы корректности задачи Коши и связи предлагаемого описания непрерывной среды с описанием многочастичной системы с помощью классических уравнений движения.

Состояние системы частиц в момент времени t будем определять с помощью функции распределения в координатном пространстве $X = \Omega \times S^2$: $f(\vec{x},\vec{s},t)$ есть плотность вероятности распределения частиц в пространстве X в момент времени t, т. е., если число частиц системы равно N, то для любой области $D \in X$ величина $N \int\limits_D f(\vec{x},\vec{s},t)dxds$ характеризует число частиц, находящихся в области D пространства X в момент времени t. По своему смыслу функция $f(\vec{x},\vec{s},t)$ должна удовлетворять следующим требованиям:

1) $f(\vec{x},\vec{s},t) \geq 0$ для всех $(\vec{x},\vec{s},t)$;

2) $\int\limits_X f(\vec{x},\vec{s},t)dxds = 1$ при всех t.

Введем следующие обозначения:

1. $T_{\vec{s}}(S^2)$ - касательная плоскость к единичной сфере в точке $\vec{s}$. На сфере S^2 выбран и фиксирован атлас из двух карт $\{\Sigma_1, \Sigma_2\}$, координаты в каждой из которых обозначаются через σ_1, σ_2, тогда $\vec{s} = \vec{s}(\sigma_1,\sigma_2)$. Выбор локальной системы координат (σ_1,σ_2) в карте определяет в касательных плоскостях $T_{\vec{s}}(S^2)$ в каждой точке сферы базис $\vec{e}_1(\vec{s}), \vec{e}_2(\vec{s})$ ($\vec{e}_i(\vec{s}) = \frac{\partial \vec{s}(\sigma_1,\sigma_2)}{\partial \sigma_i} |\frac{\partial \vec{s}}{\partial \sigma_i}|^{-1}$).

2. Пространство непрерывно дифференцируемых k раз в каждой точке сферы вещественнозначных функций обозначается через $C^k(S^2)$; введено обозначение $D^i_{\sigma_\alpha} f(\vec{s}) = (\frac{\partial}{\partial \sigma_\alpha})^i f(\vec{s}(\sigma_1,\sigma_2))$, $\alpha = 1,2$, $i = 1,...,k$, если $f(\vec{s}(\sigma_1,\sigma_2)) \in C^k(S^2)$.

3. $C^k(X)$ - множество k раз непрерывно дифференцируемых функций на ограниченном замкнутом множестве $[X]$ (замыкание X в $R^3 \times S^2$) с гладкой границей. Чтобы определить норму в пространстве $C^k(X)$, рассмотрим покрытие сферы меньшими картами $\{\Sigma'_1, \Sigma'_2\}$, лежащими строго внутри соответствующих карт исходного покрытия. Тогда определим норму в $C^k(X)$ равенством

$$||f(\vec{x},\vec{s})|C^k(X)|| =$$
$$= \max_{a=1,2}(\sup_{l=0,..,k} (\sup_{i_1+...+j_2=l} (\sup_{\Omega\times\Sigma'_a} |D^{i_1}_{x_1} D^{i_2}_{x_2} D^{i_3}_{x_3} D^{j_1}_{\sigma_1} D^{j_2}_{\sigma_2} f(\vec{x},\vec{s}(\sigma_1,\sigma_2))|))),$$

где $i_1, ..., j_2$ - неотрицательные целые числа. Нетрудно проверить, что данное равенство действительно определяет норму.

4. Пусть Y - банахово пространство. Тогда $C^i([0,T] \times X, Y)$, $i = 0,1$, есть, соответственно, непрерывное и непрерывно дифференцируемое по совокупности аргументов $t, \vec{x}, \vec{s}$ отображение пространства $[0,T] \times X$ в пространство Y.

5. Для функций $f(\vec{s})$ из $C^1(S^2)$ и для гладких векторных полей $\vec{A}(\vec{s})$ на S^2 введем операции градиента функции ∇_s : $f(\vec{s}) \to \nabla_s f(\vec{s})$, и дивергенции векторного поля $\vec{A}(\vec{s}) \to div_s \vec{A}(\vec{s})$ (см. [4]). Скалярное произведение векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ евклидова пространства $T_{\vec{s}}(S^2)$ обозначается через $(\vec{a},\vec{b})$.

Конкретизируем, каким образом поле $B(\vec{x},\vec{s},t)$ зависит от состояния системы:

$$\vec{B}(\vec{x},\vec{s},t) = \vec{B}_0(\vec{x},t) + \vec{B}_m(\vec{x},t) + \vec{B}_I(\vec{x},t) + \vec{B}_a(\vec{s}), \qquad (3.1)$$

где

1). $\vec{B}_0(\vec{x},t) \in C^1(X \times [0,T], R^3)$ - заданное внешнее магнитное поле.

2). $\vec{B}_m(\vec{x},t) = \nabla_x \int\limits_\Omega (\nabla_x \frac{1}{|\vec{x}-\vec{y}|}, \vec{M}(\vec{y},t))dy + 4\pi \vec{M}(\vec{x},t)$ - магнитное поле, созданное всеми МДМ с функцией распределения $f(\vec{x},\vec{s},t)$ в момент времени t, где $\vec{M}(\vec{x},t) = \int\limits_{S^2} \vec{s} f(\vec{x},\vec{s},t)ds$ - намагниченность данной системы МДМ. Данная зависимость поля дипольных моментов от функции распределения соответствует уравнениям магнитостатики (см. [2]).

В действительности функция $\frac{1}{|\vec{x}-\vec{y}|}$, характеризующая парное взаимодействие МДМ, соответствует приближенному закону этого взаимодействия для двух МДМ, достаточно удаленных друг от друга. Взаимодействие двух МДМ, близких друг к другу, имеет более сложный характер. С другой стороны, сингулярность в интегральном операторе в формуле для магнитного поля является дополнительной трудностью при исследовании соответствующей математической задачи. В соответствии с этим в работе рассматривается парное взаимодействие МДМ с некоторым модельным гладким потенциалом $U(\vec{x}-\vec{y})$, который может возникнуть, например, при аппроксимации сингулярного ядра $\frac{1}{|\vec{x}-\vec{y}|}$

бесконечно гладкими функциями. При этом естественно потребовать, чтобы магнитное поле, определяемое с помощью этого модельного закона взаимодействия, являлось соленоидальным. Чтобы удовлетворить это требование, определим магнитное поле системы МДМ с функцией распределения $f(\vec{x},\vec{s},t)$ формулой

$$\vec{B}_m(\vec{x},t)=\int\limits_X\{4\pi\vec{s}\omega_U(\vec{x}-\vec{y})+\nabla(\vec{s},\nabla U(\vec{x}-\vec{y}))\}f(\vec{y},\vec{s},t)dyds, \quad (3.2)$$

где функции ω_U и U связаны формулой $\omega_U=\Delta U$. Тогда напряженность магнитного поля определяется по формуле $\vec{H}(\vec{x})=\nabla\int\limits_\Omega(\nabla U(\vec{x}-$ $-\vec{y}),\vec{M}(\vec{y}))dy$, а индукция магнитного поля - по формуле $\vec{B}(\vec{x})=$ $=\vec{H}(\vec{x})+4\pi\int\limits_\Omega\omega_U(\vec{x}-\vec{y})M(\vec{y})dy$, что обеспечивает выполнение условия $div\vec{B}(\vec{x})=0$. Заметим также, что при $\omega(\vec{x})=\delta(\vec{x})$ модельная зависимость магнитного поля от намагниченности совпадает с зависимостью, даваемой уравнениями Максвела.

3). В настоящей работе предполагается модельная зависимость энергии обменного взаимодействия $E_I=\int\limits_\Omega\int\limits_\Omega\omega_0(\vec{x}-\vec{y})(\vec{M}(\vec{x}),\Delta\vec{M}(\vec{y}))dydx$, эффективное поле обменного взаимодействия связано с функцией распределения соотношением

$$\vec{B}_I=J\int\limits_{S^2}\Delta\omega_0(\vec{x}-\vec{y})\vec{s}f(\vec{y},\vec{s},t)dyds,$$

где $\omega_0(\vec{x})\in C_0^\infty(B^3(0,1),[0,+\infty))$, $\int\limits_{R^3}\omega_0(\vec{x})dx=1$, $B^3(0,1)$ - шар единичного радиуса с центром в нуле в пространстве R^3, $J\in R$ - константа обменного взаимодействия.

При $\omega_0(\vec{x})=\delta(\vec{x})$ формула для обменного поля совпадает с формулой, принятой для описания обменного взаимодействия, например, в уравнении Ландау-Лифшица (см. [2].) Такое определение эффективного поля обменного взаимодействия отражает многие явления магнетизма, однако строгий вывод этого уравнения, по-видимому, отсутствует.

4). $\vec{B}_a(\vec{s})=\nabla V(\vec{s})$, где $V(\vec{x})\in C^\infty(R^3)$. Это эффективное поле выражает факт зависимости энергии $V(\vec{s})$ состояния $\vec{s}$ от ориентации $\vec{s}$ относительно осей кристаллической решетки. Данное определение поля $\vec{B}_a(\vec{s})$ соответствует вводимому в монографиях [1, 2] эффективному полю анизатропии кристалла.

Итак, для каждой частицы рассматриваемой системы ее координаты изменяются по закону

$$\vec{x}=const,$$

$$\frac{\partial\vec{s}(\vec{x},t)}{\partial t}=[\vec{B}(\vec{x},\vec{s},t)\times\vec{s}(\vec{x},t)], \quad (4)$$

где $\vec{B}$ определяется по формулам (3). Тогда функция распределения системы из N частиц есть $f^N(\vec{x},\vec{s},t)=\frac{1}{N}\sum\limits_{i=1}^N\delta(\vec{x}-\vec{x}_i)\delta(\vec{s}-\vec{s}_i(\vec{x}_i,t))$, где функция $\vec{s}_i(\vec{x}_i,t)$ - решение уравнения (4), и нетрудно проверить, что $f^N(\vec{x},\vec{s},t)$ является обобщенным решением уравнения (отметим, что вектор $[\vec{B^N}\times\vec{s}]$ принадлежит касательной плоскости $T_{\vec{s}}(S^2)$)

$$\frac{\partial f^N}{\partial t}+(\nabla_s f^N,[\vec{B^N}\times\vec{s}])=0 \quad (5)$$

в том смысле, что для любого $\psi\in C^1(X)$ справедливо равенство

$$\frac{d}{dt}\int\limits_X\psi(\vec{x},\vec{s})f^N(\vec{x},\vec{s},t)dxds=\int\limits_X f^N(\vec{x},\vec{s},t)([\vec{B}^N\times\vec{s}],\nabla_s\psi(\vec{x},\vec{s})).$$

Здесь $\vec{B}^N(\vec{x},\vec{s},t)$ - полное эффективное магнитное поле, соответствующее распределению N частиц в пространстве X с плотностью $f^N(\vec{x},\vec{s},t)$.

Следуя подходу, применяемому при выводе уравнения Власова (см. [5]), заменим систему N частиц, описываемых уравнением (5), некоторой непрерывной средой, описываемой системой уравнений (6) (см. ниже). Рассмотрим следующую задачу для неизвестной функции распределения $f(\vec{x},\vec{s},t)$:

$$\frac{\partial f}{\partial t}+([\vec{B}\times\vec{s}],\nabla_s f)=0, \quad (\vec{x},\vec{s})\in X,\ t\in[0,T], \quad (6.1)$$

$$f(\vec{x},\vec{s},0)=f_0(\vec{x},\vec{s}). \quad (6.2)$$

Индукция магнитного поля $\vec{B}(\vec{x},\vec{s},t)$ определяется по формулам (3):

$$\vec{B}(\vec{x},\vec{s},t)=\vec{B}_0(\vec{x},t)+\nabla V(\vec{s})+\int\limits_X w(\vec{x}-\vec{y})\vec{s}f(\vec{y},\vec{s},t)dyds+$$

$$+\nabla\int\limits_X(\vec{s},\nabla U(\vec{x}-\vec{y}))f(\vec{y},\vec{s},t)dyds=\vec{B}(\vec{x},\vec{s},t;[f]), \qquad (6.3)$$

где

1) $[0,T]$ - произвольный отрезок времени, X - описанное выше координатное пространство;

2) $f(\vec{x},\vec{s},t)\in C^1([0,T]\times X,R^+)$ - неизвестная функция-распределения на пространстве X такая, что $f(\vec{x},\vec{s},0)=f_0(\vec{x},\vec{s})$. Функция $f_0(\vec{x},\vec{s})$ удовлетворяет условиям: $f_0(\vec{x},\vec{s})\in C^1(X,R^+)$; $\int\limits_X f_0(\vec{x},\vec{s})dxds=1$;

3) функция U удовлетворяет условиям: $\Delta U\in C_0^\infty(B^3(0,1),[0,+\infty))$; $\int\limits_{R^3}\Delta U(\vec{x})dx=1$;

4) $w(\vec{x})=J\Delta\omega_0(\vec{x})+\Delta U(\vec{x})\in C_0^\infty(R^3,[0,+\infty))$ в соответствии с определениями полей магнитного дипольного и обменного взаимодействий. Далее функции $U(\vec{x})$ и $w(\vec{x})$ рассматриваются как независимые.

Систему (6) будем называть системой уравнений среднего поля.

В данной работе изучается вопрос корректности задачи (6). Кроме того, получен некоторый результат о близости решения задачи (6) и задачи, описывающей движение конечного числа частиц (5), который, в частности, подтверждает применимость системы уравнений (6) к описанию явлений в магнетиках. Для исследования этих проблем автор применяет комбинацию методов изучения корректности задачи Коши для уравнения Власова, предложенных в [5] и в [6].

2. Обобщенное решение системы уравнений среднего поля

Дадим следующее

Определение 1. Функция $f(\vec{x},\vec{s},t)$, определенная на $X\times[0,T]$, называется классическим решением сглаженной системы (6), если

1) $f(\vec{x},\vec{s},t)\in C^1([0,T]\times X,R_+)$,

2) $f(\vec{x},\vec{s},t)$ удовлетворяет системе уравнений (6).

Замечание. Нетрудно проверить, что для классического решения системы (6) интеграл $\int\limits_X f(\vec{x},\vec{s},t)dxds$ не зависит от времени (поскольку $div_s[\vec{B}\times\vec{s}]=0$).

Рассмотрим пространство M (не обязательно знакоопределенных) борелевских мер на пространстве X. Определим в пространстве M

метрику d соотношением: пусть $\mu,\nu\in M$, тогда

$$d(\mu,\nu)=\sup_{f\in D}|\int\limits_X\mu(dxds)f(\vec{x},\vec{s})-\int\limits_X\nu(dxds)f(\vec{x},\vec{s})|,$$

где

$$D=\{f|f:\ X\to[0,1],\quad|f(\vec{x},\vec{s})-f(\vec{y},\vec{\sigma})|\le|\vec{x}-\vec{y}|+|\vec{s}-\vec{\sigma}|\}.$$

Тогда метрика d порождает топологию слабой сходимости в пространстве M: для последовательности $\mu_n\in M$ условие $\lim\limits_{n\to\infty}d(\mu_n,\mu)=0$ эквивалентно условию $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_X\mu_n(dxds)\psi(\vec{x},\vec{s})=\int\limits_X\mu(dxds)\psi(\vec{x},\vec{s})$ для любого $\psi\in C(X)$ (см. [5, 6]).

На фиксированном выше отрезке $[0,T]$ рассмотрим множество слабо непрерывных отображений $C([0,T],M)$.

Определение 2. Функция $\mu(t,dxds)\in C([0,T],M)$ называется обобщенным решением системы уравнений среднего поля, если она при любом $\psi(\vec{x},\vec{s})\in C^1(X)$ удовлетворяет следующей системе уравнений (7) на отрезке $[0,T]$:

$$\int\limits_X\psi(\vec{x},\vec{s})(\mu(t,dxds)-\mu(0,dxdt))=$$

$$=\int\limits_0^t d\tau\int\limits_X(\nabla_s\psi(\vec{x},\vec{s}),[\vec{B}\times\vec{s}])\mu(\tau,dxds), \qquad (7.1)$$

$$\vec{B}(\vec{x},\vec{s},t)=\vec{B}_0(\vec{x},t)+\nabla V(\vec{s})+\vec{A}(\vec{x},t)+\nabla\varphi(\vec{x},t), \qquad (7.2)$$

$$\varphi(\vec{x},t)=\int\limits_X(\nabla U(\vec{x}-\vec{y}),\vec{s})\mu(t,dyds), \qquad (7.3)$$

$$\vec{A}(\vec{x},t)=\int\limits_X w(\vec{x}-\vec{y})\vec{s}\mu(t,dyds), \qquad (7.4)$$

$$\mu(+0)=\mu_0, \qquad (7.5)$$

где $\mu_0(dxds)\in M(X)$ - положительная мера и $\int\limits_X\mu_0(dxds)=1$.

Теорема 1. *Пусть выполнены следующие предположения о функциях* $w(\vec{x})$, $V(\vec{s})$, $U(\vec{x})$, $\vec{B}_0(\vec{x},t)$: $\vec{B}_0(\vec{x},t) \in C^1(X\times[0,T],R^3)$ *и существует такая положительная постоянная* L, *что*

$$|D^2_{\vec{x}}U(\vec{x})| \le L, \quad |D^2_{\vec{x}}(U(\vec{x})-U(\vec{y}))| \le L|\vec{x}-\vec{y}| \quad \forall(\vec{x},\vec{y})\in\Omega,$$
$$|\nabla V(\vec{s})| \le L, \quad |\nabla V(\vec{s})-\nabla V(\vec{\sigma})| \le L|\vec{s}-\vec{\sigma}| \quad \forall(\vec{s},\vec{\sigma})\in S^2,$$
$$|w(\vec{x})| \le L, \quad |w(\vec{x})-w(\vec{y})| \le L|\vec{x}-\vec{y}| \quad \forall(\vec{x},\vec{y})\in R^3.$$

Тогда

1). Если μ_0 *- неотрицательная борелевская мера, такая что* $\int\limits_X \mu_0(dxds)=1$, *то для любого* $T>0$ *существует единственное обобщенное решение системы (6), причем для любого* $t\in[0,T]$ *мера* $\mu(t)$ *неотрицательна и* $\int\limits_X \mu(t,dxds)=1$.

2). *Существует такое* $C>0$, *что если* $\mu(t)$ *и* $\nu(t)$ *есть обобщенные решения уравнения среднего поля с начальными условиями* μ_0 *и* ν_0 *соответственно, то тогда справедливо неравенство* $d(\mu(t),\nu(t)) \le$ $\le e^{Ct}d(\mu_0,\nu_0)$ *для всех* $t\in R$, $\{\mu_0,\nu_0\}\in M(X)$.

Доказательство.

Рассмотрим функцию $\mu(t)\in C([0,T],M)$. Она определяет зависимость от времени поля $\vec{B}_{\mu(\cdot)}(\vec{x},\vec{s},t)$ в соответствии с формулами (7.2 - 7.4).

Согласно предположению теоремы относительно функций U,V,w задача Коши

$$\frac{d\vec{s}(\vec{x},\vec{\sigma},t)}{dt} = [\vec{B}_{\mu(\cdot)}\times\vec{s}], \quad t\in[0,T], \quad \vec{s}(\vec{x},\vec{\sigma},0)=\vec{\sigma} \tag{8}$$

при любых $(\vec{x},\vec{\sigma})\in X$ имеет на $[0,T]$ единственное решение $\vec{s}(\vec{x},\vec{\sigma},t|\mu(\cdot))$ и ясно, что это решение непрерывно дифференцируемо по $(t,\vec{x},\vec{\sigma})$, т.е. $\vec{s}(\vec{x},\vec{\sigma},t|\mu(\cdot))\in C^1([0,T]\times X,S^2)$. Определим отображение $T_t[\mu(\cdot)]$, действующее из $C^1(X)$ в $C^1(X)$:

$$(T_t[\mu(\cdot)]\psi)(\vec{x},\vec{\sigma}) = \psi(\vec{x},\vec{s}(\vec{x},\vec{\sigma},t|\mu(\cdot)),\ t\in[0,T].$$

Для произвольного $\nu_0\in M$ определим функцию $\nu(t)\in C([0,T],M)$ соотношением $\nu(t)=\nu_0\circ T_t[\mu(\cdot)]$

(т. е. $\int\limits_X \nu(t,dxds)\psi(\vec{x},\vec{s}) = \int\limits_X \nu_0(dxds)(T_t[\mu(\cdot)]\psi)(\vec{x},\vec{s})$).

Тогда справедлива следующая лемма:

Лемма. *Функция* $\mu(t)\in C([0,T],M)$ *является обобщенным решением уравнения среднего поля с начальными данными* μ_0 *тогда и только тогда, когда* $\mu(t)$ *есть неподвижная точка отображения* $\Lambda:\ \Lambda\mu(t)=\mu_0\circ T_t[\mu(\cdot)]$.

Доказательство: Если $\mu(t)$ является неподвижной точкой отображения Λ, то $\mu(t)$, очевидно, удовлетворяет совокупности условий (7).

Пусть функция $\mu(t)$ есть обобщенное решение системы (6). Рассмотрим отображение $S_t(\vec{x}|\mu(\cdot))\in C^1(S^2,S^2):\ \vec{\sigma}\to\vec{s}(\vec{x},\vec{\sigma},t|\mu(\cdot))$, задаваемое задачей (8) при каждом значении $\vec{x}$. Нетрудно проверить, что данное отображение является взаимно однозначным и якобиан его равен 1 (чтобы доказать этот факт, достаточно убедиться в том, что $div_s[\vec{s}\times\vec{B}(\vec{x},\vec{s},t|\mu)]=0$). Следовательно, задано обратное отображение $S_t^{-1}(\vec{x}|\mu(\cdot))\in C^1(S^2,S^2):\ \vec{\sigma}\to\vec{n}(\vec{x},\vec{\sigma},t|\mu(\cdot))$. Поскольку $S_t^{-1}(\vec{x}|\mu(\cdot))\circ S_t(\vec{x}|\mu(\cdot))(\vec{\sigma}) = \vec{n}(\vec{x},\vec{s}(\vec{x},\vec{\sigma},t|\mu(\cdot)),t|\mu(\cdot))=\vec{\sigma}$, то функция $\vec{n}(\vec{x},\vec{\sigma},t|\mu(\cdot))$ при каждом значении $(\vec{x},\vec{\sigma})\in X$ и каждом $i=1,2$ является решением задачи Коши:

$$\begin{gathered}\frac{\partial}{\partial t}(\vec{n}(\vec{x},\vec{s},t))_i + (\nabla_s(\vec{n}(\vec{x},\vec{s},t)_i),[\vec{B}_{\mu(\cdot)}(\vec{x},\vec{s},t)\times\vec{s}])=0,\\ \vec{n}(\vec{x},\vec{s},0)=\vec{s},\end{gathered} \tag{8'}$$

которое единственно и принадлежит классу $C^1(X\times[0,T],S^2)$ в силу предположений теоремы. Учитывая уравнения (7.1) и (8′), нетрудно показать, что $\frac{d}{dt}\int\limits_X \psi(\vec{x},\vec{n}(\vec{x},\vec{s},t|\mu(\cdot)))\mu(t,dxds)=0$ для любого $\psi\in C^1(X)$. Следовательно, для любого $t\in[0,T]$ и любого $\psi\in C^1(X)$ справедливо равенство

$$\int\limits_X \psi(\vec{x},\vec{\sigma})\mu_0(dxd\sigma) = \int\limits_X \psi(\vec{x},\vec{n}(\vec{x},\vec{\sigma},t|\mu(\cdot)))\mu(t,dxd\sigma).$$

Поскольку отображение $S_t^{-1}(\vec{x}|\mu(\cdot))$ взаимно однозначное при любых $\vec{x}$ и t, то отображение $C^1(X)\to C^1(X)$:

$$\psi(\vec{x},\vec{s})\to\psi(\vec{x},\vec{n}(\vec{x},\vec{s},t|\mu(\cdot)))$$

является взаимно однозначным преобразованием пространства $C^1(X)$. Поэтому для любого обобщенного решения задачи (6) при всех $\psi\in C^1(X)$ справедливо соотношение

$$\int\limits_X \psi(\vec{x},\vec{s}(\vec{x},\vec{\sigma},t|\mu(\cdot)))\mu_0(dxd\sigma) = \int\limits_X \psi(\vec{x},\vec{\sigma})\mu(t,dxd\sigma). \tag{9}$$

Следовательно, для всякого обобщенного решения задачи (6) выполнено условие $\mu(t) = \mu_0 \circ T_t[\mu(\cdot)]$. Лемма доказана.

Пусть $\mu(t) = \mu_0 \circ T_t[\mu(\cdot)]$, $\nu(t) = \nu_0 \circ T_t[\nu(\cdot)]$. Тогда

$$d(\mu(t), \nu(t)) = d(\mu_0 \circ T_t[\mu(\cdot)], \nu_0 \circ T_t[\nu(\cdot)]) \le$$
$$\le d(\mu_0 \circ T_t[\mu(\cdot)], \mu_0 \circ T_t[\nu(\cdot)]) + d(\mu_0 \circ T_t[\nu(\cdot)], \nu_0 \circ T_t[\nu(\cdot)]).$$

Для второго слагаемого справедлива оценка

$$d(\mu_0 \circ T_t[\nu(\cdot)], \nu_0 \circ T_t[\nu(\cdot)]) = e^{Lt} \sup_{f \in D} |\int_X (d\mu_0 - d\nu_0) e^{-Lt} (T_t[\nu(\cdot)]f)| \le$$

$\le e^{Lt} d(\mu_0, \nu_0)$, так как если $f \in D$, то $e^{-Lt}(T_t[\nu(\cdot)]f) \in D$. Действительно, в силу уравнения (8) $|\frac{d}{dt}(\vec{s}(\vec{x}, \vec{\sigma}, t) - \vec{s}(\vec{y}, \vec{s}, t))| \le L(|\vec{s}(\vec{x}, \vec{\sigma}, t) - \vec{s}(\vec{y}, \vec{s}, t)| + |\vec{x} - \vec{y}|)$. Из последнего неравенства и леммы Гронуолла получается требуемое условие.

А для первого слагаемого имеем

$$d(\mu_0 \circ T_t[\mu(\cdot)], \mu_0 \circ T_t[\nu(\cdot)]) = \sup_{f \in D} |\int_X d\mu_0 (T_t[\mu(\cdot)]f - T_t[\nu(\cdot)]f) \le$$
$$\le \int_X \mu_0(dx d\sigma) |\vec{s}(\vec{x}, \vec{\sigma}, t|\mu(\cdot)) - \vec{s}(\vec{x}, \vec{\sigma}, t|\nu(\cdot))| = \lambda(t),$$

поскольку $f \in D$. Следовательно, в силу (9)

$$\lambda(t) \le \int_X \mu_0(dx d\sigma) |\int_0^t d\tau [\vec{B}_{\mu(\cdot)}(\vec{x}, \vec{s}(\tau|\mu(\cdot)), \tau) \times \vec{s}(\tau|\mu(\cdot))] -$$
$$- \int_0^t d\tau [\vec{B}_{\nu(\cdot)}(\vec{x}, \vec{s}(\tau|\nu(\cdot)), \tau) \times \vec{s}(\tau|\nu(\cdot))]| \le$$
$$\le \int_0^t \int_X \mu(\tau, dx ds) |[\vec{B}_{\mu(\cdot)}(\vec{x}, \vec{s}, \tau) \times \vec{s}] - [\vec{B}_{\nu(\cdot)}(\vec{x}, \vec{s}, \tau) \times \vec{s}]| +$$
$$+ L \int_0^t \int_X \mu_0(dx ds) |\vec{s}(\tau|\mu(\cdot)) - \vec{s}(\tau|\nu(\cdot))| \le$$
$$\le c_1(L) \int_0^t d\tau d(\mu(\tau), \nu(\tau)) + L \int_0^t \lambda(\tau) d\tau.$$

Поэтому с помощью рассуждений, применяемых для доказательства леммы Гронуолла, можно показать, что

$$\lambda(t) \le c_1(L) \int_0^t d\tau e^{L(t-\tau)} d(\mu(\tau), \nu(\tau)).$$

Таким образом, $d(\mu(t), \nu(t)) \le e^{Lt} d(\mu_0, \nu_0) +$

$+ c_1(L) \int_0^t d\tau e^{L(t-\tau)} d(\mu(\tau), \nu(\tau))$. Из последнего неравенства и леммы Гронуолла вытекает утверждение 2) теоремы 1.

Пусть μ_0 - начальное условие задачи (7). Пусть

$$C_\mu = \{\mu(t) | \mu(t) \in C([0, T], M) : \ \mu(0) = \mu_0\}.$$

Произвольной функции $\mu(t) \in C_\mu$ поставим в соответствие функцию $\Lambda\mu(t) = \mu_0 \circ T_t[\mu(\cdot)]$. Отображение Λ отображает пространство C_μ в себя. Введем в пространстве C_μ метрику: для любых $\mu, \nu \in C_\mu$ положим

$$d_\alpha(\mu(\cdot), \nu(\cdot)) = \sup_{t \in [0,T]} d(\mu(t), \nu(t)) e^{-\alpha t}, \quad \alpha \in R.$$

Так как (M, d) есть полное метрическое пространство (см. [6]), то метрическое пространство (C_μ, d_α) также является полным.

Докажем, что отображение Λ пространства (C_μ, d_α) в себя при достаточно больших α является сжатием. Действительно, согласно сделанной выше оценке имеем

$$d((\Lambda\mu(\cdot))(t), (\Lambda\nu(\cdot))(t)) = d(\mu_0 \circ T_t[\mu(\cdot)], \mu_0 \circ T_t[\nu(\cdot)]) \le$$

$\le c_1(L) \int_0^t d\tau e^{L(t-\tau)} d(\mu(\tau), \nu(\tau))$. Следовательно, при $\alpha > L$

$$d_\alpha(\Lambda\mu(\cdot), \Lambda\nu(\cdot)) \le \frac{c_1}{\alpha - L} d_\alpha(\mu(\cdot), \nu(\cdot)),$$

что и доказывает утверждение.

Поэтому отображение Λ имеет единственную неподвижную точку $\mu(t) \in C_\mu$. Следовательно, существует единственное обобщенное решение уравнения среднего поля.

Положим в (9) $\psi \equiv 1$. Тогда получим, что для любого $t \in [0, T]$ мера $\mu(t)$ является вероятностной.

Теорема 1 доказана.

3. Классическое решение уравнения среднего поля

В этом параграфе приводится исследование гладкости решения задачи (7) при условии, что начальная мера обладает гладкой плотностью.

Рассмотрим задачу (7) с начальной мерой $\mu_0(dx ds) = f_0(\vec{x}, \vec{s}) dx ds$, где функция $f_0(\vec{x}, \vec{s}) \in C^1(X)$ - плотность неотрицательной нормированной меры.

Теорема 2. *Пусть выполнены предположения теоремы 1 о свойствах функций U, V и w. Пусть функция $f_0(\vec{x}, \vec{s})$ принадлежит пространству $C^1(X)$. Тогда на отрезке $[0, T]$ существует единственное классическое решение задачи Коши (6).*

Доказательство. Докажем существование классического решения. Пусть $\mu(t)$ - обобщенное решение задачи (6) с начальной мерой $\mu_0(dxds) = f_0(\vec{x}, \vec{s})dsdx$. По теореме 1 это решение существует и единственно. В силу предположений теоремы поле $\vec{B}_{\mu(\cdot)}(\vec{x}, \vec{s}, t)$, отвечающее этому решению, принадлежит пространству $C^1(X \times [0,T], R^3)$. Следовательно, задача Коши (8) имеет единственное решение $\vec{s}(\vec{x}, \vec{\sigma}, t|\mu(\cdot)) \in C^1(X \times [0,T], S^2)$.

В соответствии с утверждением леммы $\mu(t) = \mu \circ T_t[\mu(\cdot)]$, поэтому для любого $\psi \in C^1(X)$ справедливо равенство

$$\int_X \mu(t, dxds)\psi(\vec{x}, \vec{s}) = \int_X f_0(\vec{x}, \vec{s})dxd\sigma\psi(\vec{x}, \vec{s}(\vec{x}, \vec{\sigma}, t|\mu(\cdot)).$$

Отображение $S_t^{-1}(\vec{x}|\mu(\cdot)) : \vec{\sigma} \to \vec{n}(\vec{x}, \vec{\sigma}, t|\mu(\cdot))$ при любых $\vec{x} \in \Omega$ и $t \in [0,T]$ является взаимно однозначным отображением с равным единице якобианом (см. лемму), поэтому если в последнем равенстве сделать замену переменных интегрирования $\vec{\sigma} \to \vec{n}(\vec{x}, \vec{\sigma}, t|\mu(\cdot))$, то равенство примет вид

$$\int_X \mu(t, dxds)\psi(\vec{x}, \vec{s}) = \int_X f_0(\vec{x}, \vec{n}(\vec{x}, \vec{\sigma}, t|\mu(\cdot))\psi(\vec{x}, \vec{\sigma})dxd\sigma.$$

Поскольку функция $\vec{n}(\vec{x}, \vec{\sigma}, t|\mu(\cdot))$ является решением задачи Коши (8′), то в силу предположений теоремы о функциях U, V и w она принадлежит пространству $C^1(X| \times [0,T], S^2)$.

Следовательно, обобщенное решение задачи (6) $\mu(t)$ имеет плотность $f(\vec{x}, \vec{\sigma}, t) = f_0(\vec{x}, \vec{n}(\vec{x}, \vec{\sigma}, t|\mu(\cdot))$ и $f(\vec{x}, \vec{s}, t) \in C^1(X \times [0,T], R^+)$. Тогда $\int_X \psi(\vec{x}, \vec{s})(\frac{\partial f}{\partial t} - (\nabla_s f, [\vec{B} \times \vec{s}]))dxds = 0$ для произвольного $\psi \in C^1(X)$, поэтому функция $f(\vec{x}, \vec{s}, t)$ удовлетворяет системе уравнений (6) и, следовательно, является классическим решением задачи (6).

Единственность этого решения следует из единственности решения задачи Коши (8′). Теорема 2 доказана.

4. Обсуждение результатов

Предположим, что мера $\mu_N(0)$ определена формулой

$$\int_X \psi d\mu_N(0) = \frac{1}{N} \sum_{1 \le j \le N} \psi(\vec{x}_j, \vec{s}_j),$$

где $\vec{x}_j$, $\vec{s}_j$, $j = 1, ..., N$ - набор точек в пространстве X.

Тогда решение системы (7) с начальной мерой $\mu_N(0)$ существует и как неподвижная точка отображения Λ определяется формулой

$$\int \psi d\mu_N(t) = \frac{1}{N} \sum_{1 \le j \le N} \psi(\vec{x}_j, \vec{s}^N(\vec{x}_j, \vec{s}_j, t)),$$

где $\vec{s}^N(\vec{x}_j, \vec{s}_j, t)$ есть решение системы уравнений

$$\vec{s}^N(\vec{x}_j, \vec{s}_j, 0) = \vec{s}_j,$$

$$D_t\vec{s}^N(\vec{x}_j, \vec{s}_j, t) = [\{\nabla_{x_j} \frac{1}{N} \sum_{1 \le i \le N} (\nabla_{x_j} U(\vec{x}_j - \vec{x}_i), \vec{s}^N(\vec{x}_i, \vec{s}_i, t)) +$$

$$+ \frac{1}{N} \sum_{1 \le i \le N} w(\vec{x}_j - \vec{x}_i)\vec{s}^N(\vec{x}_i, \vec{s}_i, t) + \nabla V(\vec{s}^N(\vec{x}_j, \vec{s}_j, t)) +$$

$$+ \vec{B}_0(\vec{x}_j, t)\} \times \vec{s}^N(\vec{x}_j, \vec{s}_j, t)]. \tag{10}$$

Данная система уравнений является системой уравнений движения N частиц, положение в пространстве которых $\vec{x}_i$, $i = 1, ..., N$, фиксировано, а механический момент $\vec{s}_i^N(t)$ изменяется по закону $D_t\vec{s}_i^N(t) = \vec{F}_i^N(t)$; $\vec{F}_i^N(t)$ - момент сил, действующих на частицу.

Изменение механического момента $\vec{s}_i^N$ частицы обусловленно тем, что с ним связан дипольный магнитный момент $\vec{m}_i^N = \mu\vec{s}_i^N = \vec{s}_i^N$. Система N частиц представляет собой набор находящихся в поле друг друга магнитных диполей, поэтому момент сил магнитного дипольного взаимодействия i-й частицы с другими частицами равен

$$\vec{F}_{mag}^N(t) = [\vec{B}_{mag}^N(\vec{x}_i, t) \times \vec{s}_i^N].$$

В формуле (10) кроме сил магнитного дипольного взаимодействия частиц с помощью эффективного магнитного поля учтено также взаимодействие каждого электрона с атомами кристаллической решетки как целым (слагаемое $V(s)$) и обменного взаимодействия соседних электронов.

Пусть $\mu_\infty(t)$ - обобщенное решение задачи (6) с начальным условием $\mu_\infty(0) = \mu_\infty$. Тогда из теоремы 1 следует, что если $\lim_{N\to\infty} d(\mu_N, \mu_\infty) = 0$, то на произвольном отрезке $[0,T]$ решение $\mu_N(t)$

задачи (7) с начальным условием μ_N сходится к решению системы (7) с начальной мерой μ_∞ в пространстве $C([0,T],M)$ с метрикой d_α. Если мера $\mu_\infty(t)$ имеет гладкую плотность

$f(\vec{x},\vec{s},t) = w*-\lim\limits_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum\limits_{1\le j\le N}\delta(\vec{x}-\vec{x}_j)\delta(\vec{s}-\vec{s}(\vec{x}_j,\vec{s}_j,t))$, то эта плотность является классическим решением приближенного уравнения (6) и содержит информацию о движении реальной спиновой системы с функцией распределения $f_N(\vec{x},\vec{s},t)$. В этом смысле уравнение (6), описывающее движение непрерывной системы, является "власовским" пределом уравнения движения системы N частиц (10) при $N\to\infty$ (см. [5]).

Пользуюсь возможностью выразить искреннюю благодарность моему научному руководителю П.Е. Жидкову за постановку задачи, полезные обсуждения и внимание к работе.

Список литературы

1. Ахиезер А.И., Берестецкий В.Г., Пелетминский С.В., Спиновые волны, М.: Наука, 1967.
2. О'Делл Т. Ферромагнитодинамика, М.: Мир, 1983.
3. Парселл Э. Электричество и магнетизм, М.: Наука, 1983.
4. Постников М.М. Гладкие многообразия, М.: Наука, 1987.
5. Арсеньев А.А. Лекции о кинетических уравнениях, М.: Наука, 1992.
6. Spohn H. Large scale dynamics on interacting particle, Springer-Verlag, 1991.

Рукопись поступила в издательский отдел
27 июня 1996 года.

Сакбаев В.Ж. P5-96-226
О задаче Коши для уравнения среднего поля, описывающего модель твердого магнетика

Рассматривается модель твердого магнетика как системы частиц, обладающих механическим моментом $\vec{s}$, $\vec{s} \in S^2$ и магнитным моментом $\vec{\mu}$, $\vec{\mu} = \vec{s}$, которые взаимодействуют друг с другом посредством магнитного поля, что определяет изменение механического момента каждой частицы.

Изучается система интегродифференциальных уравнений, определяющая эволюцию одночастичной функции распределения указанной системы частиц. Доказаны теоремы о существовании и единственности обобщенного и классического решений задачи Коши для данной системы уравнений и о непрерывной зависимости обобщенного решения от начальных условий.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики им.Н.Н.Боголюбова ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна, 1996

Перевод автора.

Sakbaev V.Zh. P5-96-226
On the Cauchy Problem for Mean Field Equation Describing a Model of Solid Magnet

In this paper, the system of particles is considered as a model of solid magnet. Each particle is supplied with an angular momentum $\vec{s}$, $\vec{s} \in S^2$, and a magnetic dipole moment $\vec{\mu}$, $\vec{\mu} = \vec{s}$. The interaction of particle with a magnetic field induces the evolution of its angular momentum.

A system of integrodifferential equations which determines the evolution of the one-particle distribution function of that system of particles is investigated. The existence and uniqueness of generalized and classical solutions of the Cauchy problem for this system and the continuous dependence of generalized solution on the initial conditions have been established.

The investigation has been performed at the Bogoliubov Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna, 1996