ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р5-96-216

В.Н.Робук

ПРЕОБРАЗОВАНИЯ БЭКЛУНДА ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ЛАНДАУ—ЛИФШИЦА

Направлено в журнал «Фундаментальная и прикладная математика»

1996

1. Уравнение Ландау - Лифшица

Уравнение Ландау - Лифшица (уравнение Л.-Л.) в общем случае можно представить в виде [1]:

$$\frac{\partial \vec{m}}{\partial t} = -\left[\vec{m} \times \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \vec{m}}\right] . \tag{1}$$

Здесь $\vec{m} = \vec{m}(x,t)$[1] - вектор плотности магнитного момента среды, тогда $\delta\mathcal{H}/\delta\vec{m}$ - вариационная производная от функционала свободной энергии кристалла $\mathcal{H} = \mathcal{H}(\vec{m}, \vec{m}_x, \vec{m}_{xx}, \ldots, \vec{m}_x^{(k)})$, которая в развернутом виде выглядит так:

$$\frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \vec{m}} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{d^k}{dx^k} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \vec{m}_x^{(k)}} , \qquad \vec{m}_x^{(k)} \equiv \frac{\partial^k \vec{m}}{\partial x^k} . \tag{2}$$

Учитывая, что из физических соображений[2] $\vec{m}^2 = Const$, мы можем без ограничения общности выбрать нормировку $\vec{m}^2 = 1$. Тогда в угловых переменных $\vec{m} = (\sin\theta\cos\varphi,\ \sin\theta\sin\varphi,\ \cos\theta)$, $\theta = \theta\,(x,t)$, $\varphi = \varphi\,(x,t)$ уравнения Ландау - Лифшица приобретут вид

$$\theta_t = -(\sin\theta)^{-1} \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \varphi} = -(\sin\theta)^{-1} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{d^k}{dx^k} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \varphi_x^{(k)}} , \tag{3}$$

$$\varphi_t = (\sin\theta)^{-1} \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \theta} = (\sin\theta)^{-1} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{d^k}{dx^k} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \theta_x^{(k)}} . \tag{4}$$

Такое представление уравнений Л.-Л. в ряде случаев может обеспечить упрощение реальных вычислений. В данной работе для представления результатов в основном удобней использовать векторную форму записи уравнений Л.-Л.

С физической природой явлений, описываемых уравнением Л.-Л., можно ознакомиться по книгам [2, 3].

---

[1]Методы, использованные в данной работе, применимы только в случае двух независимых переменных.

[2]Из математической структуры уравнения Ландау - Лифшица следует только лишь условие $(\vec{m}^2)_t = 0$.

2. Псевдопотенциальные структуры для уравнений Ландау - Лифшица с полной анизотропией

В простейшем случае одномерная нелинейная динамика ферромагнитного кристалла с полной анизотропией может быть описана функционалом свободной энергии вида:

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}(\vec{m}_x)^2 - \frac{1}{2}\beta_{ik} m_i m_k \ , \tag{5}$$

где β_{ik} - постоянная симметричная матрица размерности 3 на 3, определяемая симметрией кристалла и геометрией задачи (направлением распространения возмущения в среде), m_i и m_k - компоненты вектора плотности магнитного момента $\vec{m}$ в декартовых координатах.

Согласно основным формулам (1), (2) уравнения Л.-Л. для данного $\mathcal{H}$ в векторных переменных будут выглядеть следующим образом:

$$m_{i,t} = \varepsilon_{ikl} m_k (m_{l,xx} + \beta_{lp} m_p) \ , \tag{6}$$

где ε_{ikl} - полностью антисимметричный тензор третьего ранга, $\varepsilon_{123} = 1$.

В работе [10] посредством процедуры Уолквиста - Истабрука [4] была получена общая схема, позволяющая строить[3] всевозможные матричные $U - V$ - пары и псевдопотенциальные представления для уравнения (6), а именно:

$$\hat{F} \ = \ m_i \hat{X}_i + \hat{X}_4 \ = \ m_1 \hat{X}_1 + m_2 \hat{X}_2 + m_3 \hat{X}_3 + \hat{X}_4 \ , \tag{7}$$

$$\begin{aligned} \hat{G} \ &= \ \varepsilon_{ikl} m_i m_{k,x} \hat{X}_l + \tfrac{1}{2} \varepsilon_{ikl} m_i [\hat{X}_k, \hat{X}_l] + \hat{X}_5 = \\ &= \ [\vec{m} \times \vec{m}_x]_1 \hat{X}_1 + [\vec{m} \times \vec{m}_x]_2 \hat{X}_2 + [\vec{m} \times \vec{m}_x]_3 \hat{X}_3 + \\ &\quad + m_1 [\hat{X}_2, \hat{X}_3] + m_2 [\hat{X}_3, \hat{X}_1] + m_3 [\hat{X}_1, \hat{X}_2] + \hat{X}_5 \ . \end{aligned} \tag{8}$$

[3] Методика построения конкретных псевдопотенциальных представлений и матричных $U - V$ - пар при наличии решений соответствующих коммутационных соотношений в виде нетривиальных алгебр Ли достаточно подробно описана в работах [4] на примере уравнения Кортевега - де Фриза.

При этом соотношение

$$\hat{F}_t - \hat{G}_x + [\hat{G}, \hat{F}] = 0 \tag{9}$$

будет выполняться **на всех решениях** исходного уравнения (6) , если все пять операторов $\hat{X}_i, \hat{X}_4$и$\hat{X}_5$ принадлежат некоторой алгебре Ли и удовлетворяют коммутационным соотношениям

$$\begin{aligned} &[[\hat{X}_2, \hat{X}_3], \hat{X}_1] = \beta_{13}\hat{X}_2 - \beta_{12}\hat{X}_3 \ , \\ &[[\hat{X}_3, \hat{X}_1], \hat{X}_2] = \beta_{12}\hat{X}_3 - \beta_{23}\hat{X}_1 \ , \\ &[[\hat{X}_1, \hat{X}_2], \hat{X}_3] = \beta_{23}\hat{X}_1 - \beta_{13}\hat{X}_2 \ , \\ &[[\hat{X}_2, \hat{X}_3], \hat{X}_2] + [[\hat{X}_3, \hat{X}_1], \hat{X}_1] = \beta_{23}\hat{X}_2 - \beta_{22}\hat{X}_3 + \beta_{11}\hat{X}_3 - \beta_{13}\hat{X}_1 \ , \\ &[[\hat{X}_3, \hat{X}_1], \hat{X}_3] + [[\hat{X}_1, \hat{X}_2], \hat{X}_2] = \beta_{13}\hat{X}_3 - \beta_{33}\hat{X}_1 + \beta_{22}\hat{X}_1 - \beta_{12}\hat{X}_2 \ , \\ &[[\hat{X}_1, \hat{X}_2], \hat{X}_1] + [[\hat{X}_2, \hat{X}_3], \hat{X}_3] = \beta_{12}\hat{X}_1 - \beta_{11}\hat{X}_2 + \beta_{33}\hat{X}_2 - \beta_{23}\hat{X}_3 \ , \\ &[\hat{X}_4, \hat{X}_i] = 0 \ , \quad [\hat{X}_4, \hat{X}_5] = 0 \ , \quad [\hat{X}_5, \hat{X}_i] = \varepsilon_{ikl}[[\hat{X}_k, \hat{X}_l], \hat{X}_4] \ . \end{aligned} \tag{10}$$

Коммутационные соотношения (10) обладают частными решениями в виде трёхмерных алгебр Ли:

$$\hat{X}_4 = \hat{X}_5 = 0 \ , \quad [\hat{X}_i, \hat{X}_k] = C^l_{ik} \hat{X}_l \ , \text{где } C^l_{ik} \in C \ . \tag{11}$$

Различные матричные представления и представления в виде линейных дифференциальных операторов первого порядка, именно трёхмерных алгебр Ли (11), как раз и сыграли в конце 70-х годов решающую роль в построении всех матричных представлений типа $U - V$ - пары или псевдопотенциальных представлений Уолквиста - Истабрука для уравнений Л.- Л. (6) вне зависимости от того, были ли эти результаты получены другими методами [6, 8] или построены посредством регулярных вычислений по методу Уолквиста - Истабрука [7, 9, 10].

В то же время прямые вычисления соотношений (7), (8), (10) по методу Уолквиста - Истабрука показывают, что соотношение (9) будет выполняться **только на решениях** исходного уравнения (6) при строгом соблюдении условия линейной независимости всех шести операторов:

$$[\hat{X}_1, \hat{X}_2] \ , \quad [\hat{X}_2, \hat{X}_3] \ , \quad [\hat{X}_3, \hat{X}_1] \ , \quad \hat{X}_1 \ , \quad \hat{X}_2 \ , \quad \hat{X}_3 \ . \tag{12}$$

Исследование вопроса корректности, в смысле условия (12), выше перечисленных результатов выходит за рамки данной работы. Вместо этого в следующем разделе на примере изотропного уравнения Л.-Л. мы рассмотрим одну из многочисленных[4] возможностей (предоставляемых нам общей схемой Уолквиста - Истабрука (7), (8), (10)) построения псевдопотенциальных структур с соблюдением условия (12).

3. Преобразования Бэклунда для изотропного уравнения Ландау - Лифшица

Одномерную динамику изотропного ферромагнетика можно описать уравнением Л.- Л. (6) при $\beta_{ik} = 0$:

$$\vec{m}_t = [\vec{m} \times \vec{m}_{xx}]. \tag{13}$$

Одним из наиболее простых нетривиальных решений коммутационных соотношений (10) в случае уравнения (13) будет трёхмерная алгебра Ли вида

$$[\hat{X}_i, \hat{X}_k] = \lambda\varepsilon_{ikl}\hat{X}_l \ , \quad \hat{X}_4 = 0 \ , \quad \hat{X}_5 = 0 \ , \quad \lambda \in C \ . \tag{14}$$

Соответствующее матричное представление этой алгебры даёт нам возможность построить $L - A$ - пару, полученную Тахтаджаном в работе [6]. В то же время одно из наиболее простых представлений этой алгебры дифференциальными операторами первого порядка

$$\hat{X}_k = X_k^l(\vec{y})\frac{\partial}{\partial y_l} = -\lambda\varepsilon_{kpl}y_p\frac{\partial}{\partial y_l} \tag{15}$$

приводит нас согласно известной методике [4] по формулам

$$y_{k,x} = F^k(\vec{y}, \vec{m}) = m_1X_1^k(\vec{y}) + m_2X_2^k(\vec{y}) + m_3X_3^k(\vec{y}), \tag{16}$$

$$y_{k,t} = G^k(\vec{y}, \vec{m}, \vec{m}_x) = \varepsilon_{pql}m_pm_{q,x}X_l^k(\vec{y}) + \tfrac{1}{2}\varepsilon_{pql}m_l[\hat{X}_p(\vec{y}), \hat{X}_q(\vec{y})]^k \tag{17}$$

к псевдопотенциальному аналогу результата Тахтаджана [6] :

[4]См. заключение.

$$\vec{y}_x = \lambda[\vec{y} \times \vec{m}] \ , \tag{18}$$

$$\vec{y}_t = \lambda[\vec{y} \times [\vec{m} \times \vec{m}_x]] + \lambda^2[\vec{y} \times \vec{m}] \ . \tag{19}$$

Однако в случае уравнения (13) коммутационные соотношения (10) обладают и множеством других решений в алгебрах Ли. Например, операторы

$$\hat{X}_k = -\lambda_1[\vec{y} \times \frac{\partial}{\partial \vec{y}}]_k \pm \lambda_2[\vec{y} \times [\vec{y} \times \frac{\partial}{\partial \vec{y}}]]_k \tag{20}$$

удовлетворяют коммутационным соотношениям (10) и образуют алгебру Ли, для которой выполняется условие (12). Следовательно, согласно общей схеме (16) , (17) мы можем записать два различных псевдопотенциальных представления для одного и того же уравнения (13) :

$$\vec{y}_x = \lambda_1[\vec{y} \times \vec{m}] + \lambda_2[\vec{y} \times [\vec{y} \times \vec{m}]] \ , \tag{21}$$

$$\begin{aligned}\vec{y}_t = {} & \lambda_1[\vec{y} \times [\vec{m} \times \vec{m}_x]] + \lambda_2[\vec{y} \times [\vec{y} \times [\vec{m} \times \vec{m}_x]]] + \\ & +({\lambda_1}^2 - {\lambda_2}^2)[\vec{y} \times \vec{m}] + 2\lambda_1\lambda_2[\vec{y} \times [\vec{y} \times \vec{m}]]\end{aligned} \tag{22}$$

и второе

$$\vec{z}_x = \lambda_1[\vec{z} \times \vec{\mu}] - \lambda_2[\vec{z} \times [\vec{z} \times \vec{\mu}]] \ , \tag{23}$$

$$\begin{aligned}\vec{z}_t = {} & \lambda_1[\vec{z} \times [\vec{\mu} \times \vec{\mu}_x]] - \lambda_2[\vec{z} \times [\vec{z} \times [\vec{\mu} \times \vec{\mu}_x]]] + \\ & +({\lambda_1}^2 - {\lambda_2}^2)[\vec{z} \times \vec{\mu}] - 2\lambda_1\lambda_2[\vec{z} \times [\vec{z} \times \vec{\mu}]] \ .\end{aligned} \tag{24}$$

Здесь $\vec{m}$ и $\vec{\mu}$ - это два **различных**, пока никак не связанных между собой, решения уравнения (13), а $\vec{y}$ и $\vec{z}$ - соответственно два различных псевдопотенциала.

Из (21) получаем

$$\vec{m} = (1 - \frac{(\vec{y}_x)^2}{{\lambda_1}^2 + {\lambda_2}^2})^{\frac{1}{2}}\vec{y} - \frac{\lambda_2}{{\lambda_1}^2 + {\lambda_2}^2}\vec{y}_x - \frac{\lambda_1}{{\lambda_1}^2 + {\lambda_2}^2}[\vec{y} \times \vec{y}_x] \ . \tag{25}$$

Из (23)

$$\vec{\mu} = (1 - \frac{(\vec{y}_x)^2}{{\lambda_1}^2 + {\lambda_2}^2})^{\frac{1}{2}}\vec{y} + \frac{\lambda_2}{{\lambda_1}^2 + {\lambda_2}^2}\vec{y}_x - \frac{\lambda_1}{{\lambda_1}^2 + {\lambda_2}^2}[\vec{y} \times \vec{y}_x] \; . \qquad (26)$$

Подставим эти выражения для $\vec{m}$ и $\vec{\mu}$ в (22) и (24) соответственно. Получим уравнения для $\vec{y}$ и $\vec{z}$:

$$\begin{aligned} \vec{y}_t &= \lambda_1({\lambda_1}^2 + {\lambda_2}^2)^{-1}(\vec{y}_x)^2\vec{y}_x + \\ &+({\lambda_1}^2 + {\lambda_2}^2)^{-1}(1 - ({\lambda_1}^2 + {\lambda_2}^2)^{-1}(\vec{y}_x)^2)^{-\frac{1}{2}}(\vec{y}_x\vec{y}_{xx})[\vec{y} \times \vec{y}_x] + \\ &+(1 - ({\lambda_1}^2 + {\lambda_2}^2)^{-1}(\vec{y}_x)^2)^{\frac{1}{2}}[\vec{y} \times \vec{y}_{xx}] \; , \qquad (27) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{z}_t &= \lambda_1({\lambda_1}^2 + {\lambda_2}^2)^{-1}(\vec{z}_x)^2\vec{z}_x + \\ &+({\lambda_1}^2 + {\lambda_2}^2)^{-1}(1 - ({\lambda_1}^2 + {\lambda_2}^2)^{-1}(\vec{z}_x)^2)^{-\frac{1}{2}}(\vec{z}_x\vec{z}_{xx})[\vec{z} \times \vec{z}_x] + \\ &+(1 - ({\lambda_1}^2 + {\lambda_2}^2)^{-1}(\vec{z}_x)^2)^{\frac{1}{2}}[\vec{z} \times \vec{z}_{xx}] \; . \qquad (28) \end{aligned}$$

Как видим, уравнения для $\vec{y}$ и $\vec{z}$ полностью совпадают. Действительно, все различия между уравнениями (21), (22), (25) и уравнениями (23), (24), (26), кроме различий в обозначениях, сводятся только к замене знака параметра λ_2 , в то время как этот параметр в оба уравнения (27) и (28) входит только в квадрате. Поэтому мы можем во всех уравнениях положить

$$\vec{z} = \vec{y}$$

без дополнительных ограничений на $\vec{z}$ или $\vec{y}$. При этом $\vec{m}$ и $\vec{\mu}$ останутся различными решениями одного и того же уравнения (13), но между ними возникнет связь. Из уравнений (25) и (26) при условии $\vec{z} = \vec{y}$ получаем

$$\vec{y}_x = \frac{{\lambda_1}^2 + {\lambda_2}^2}{2\lambda_2}\left(\vec{\mu} - \vec{m}\right) \; , \qquad (29)$$

$$\vec{y} = \frac{1}{1 + (\vec{m}\vec{\mu})}\left(\frac{1}{\lambda_2}\Omega(\vec{\mu} + \vec{m}) + \frac{\lambda_1}{\lambda_2}[\vec{m} \times \vec{\mu}]\right) \; , \qquad (30)$$

где $\quad \Omega = \left(\frac{1}{2}(\lambda_1^2 + \lambda_2^2)\omega - \lambda_1^2\right)^{\frac{1}{2}} \; , \qquad \omega = 1 + (\vec{m}\vec{\mu}) \; .$

Подставим выражение для $\vec{y}$ из (30) в (29) и получим преобразования Бэклунда [5] для изотропного уравнения Ландау - Лифшица:

$$\frac{1}{2}(\lambda_1^2 + \lambda_2^2)\omega(\vec{\mu} - \vec{m}) - \Omega(\vec{\mu}_x + \vec{m}_x) + \dot{\lambda}_1[\vec{\mu} \times \vec{m}_x] + \lambda_1[\vec{\mu}_x \times \vec{m}] +$$
$$+ (\vec{m}\vec{\mu})_x\left\{(\omega^{-1}\Omega - \frac{1}{4}(\lambda_1^2 + \lambda_2^2)\Omega^{-1})(\vec{\mu} + \vec{m}) + \lambda_1\omega^{-1}[\vec{m} \times \vec{\mu}]\right\} = 0. \qquad (31)$$

Теперь, зная одно из решений уравнения (13), например $\vec{m}$, мы можем решать последнее уравнение как обыкновенное нелинейное дифференциальное уравнение первого порядка для неизвестной функции $\vec{\mu} = \vec{\mu}(x,t)$ и определить, таким образом, явную зависимость $\vec{\mu}$ от x. После чего зависимость $\vec{\mu}$ от t можно определить из уравнения (13).

Такой путь получения новых решений уравнения (13) из известных "затравочных" решений этого же уравнения представляется весьма громоздким ввиду громоздкости самих преобразований Бэклунда. Можно отчасти избежать этих трудностей, производя промежуточные вычисления через псевдопотенциальную функцию $\vec{y}$. Этим мы и займёмся в следующем разделе.

4. Генерация решений с помощью псевдопотенциалов

Псевдопотенциальное представление (21) , (22) является системой обыкновенных дифференциальных уравнений для вектора $\vec{y}$ с переменными коэффициентами, роль которых играют компоненты вектора $\vec{m}$. В простейшем случае, выбрав в качестве "затравочного" решения уравнения Л.-Л. постоянный вектор $\vec{m} = (0,0,1)$, из этого псевдопотенциального представления мы получим для компонент вектора $\vec{y}$ систему обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами:

$$\begin{aligned} y_{1,x} &= \lambda_1 y_2 + \lambda_2 y_1 y_3 \; , \\ y_{2,x} &= -\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 y_3 \; , \qquad (32) \\ y_{3,x} &= \lambda_2(y_3^2 - 1) \; , \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
y_{1,t} &= (\lambda_1^2-\lambda_2^2)y_2+2\lambda_1\lambda_2 y_1 y_3 \ , \\
y_{2,t} &= -(\lambda_1^2-\lambda_2^2)y_1+2\lambda_1\lambda_2 y_2 y_3 \ , \qquad (33)\\
y_{3,t} &= 2\lambda_1\lambda_2(y_3^2-1) \ .
\end{aligned}
$$

Решив эту систему обыкновенных нелинейных уравнений, получим для угловых переменных $\vec{y}=(\sin\psi\cos\xi,\ \sin\psi\sin\xi,\ \cos\psi)$ следующие выражения :

$$\cos\psi=-th(\lambda_2 x+2\lambda_1\lambda_2 t)\ , \quad \xi=-\lambda_1 x-(\lambda_1^2-\lambda_2^2)t\ .$$

Подставив это решение в выражение для вектора $\vec{m}$ (25), мы естественно получим то же самое "затравочное" решение $\vec{m}=(0,0,1)$, из которого получили наше решение для $\vec{y}$. В то же время мы это решение для $\vec{y}$ можем подставить и в выражение для $\vec{\mu}$ (26) или в (29), или в (30) и при этом каждый раз будем получать одно и то же решение уравнения Ландау - Лифшица $\vec{\mu}=\vec{\mu}(x,t)$, отличное от $\vec{m}=(0,0,1)$:

$$\cos\theta=\frac{\lambda_1^2-\lambda_2^2}{\lambda_1^2+\lambda_2^2}+\frac{2\lambda_2^2}{\lambda_1^2+\lambda_2^2}th^2(\lambda_2 x+2\lambda_1\lambda_2 t)$$

и

$$tg\varphi=\frac{\lambda_2 th(\lambda_2 x+2\lambda_1\lambda_2 t)+\lambda_1 ctg(\lambda_1 x+(\lambda_1^2-\lambda_2^2)t)}{\lambda_1-\lambda_2 th(\lambda_2 x+2\lambda_1\lambda_2 t)ctg(\lambda_1 x+(\lambda_1^2-\lambda_2^2)t)}\ ,$$

где $\vec{\mu}=(\sin\theta\cos\varphi,\ \sin\theta\sin\varphi,\ \cos\theta)$.

5. Заключение

Та лёгкость, с которой мы получили весьма сложное решение уравнения (13), обусловленна, прежде всего, простотой "затравочного" решения. Другие "затравочные" решения приведут к необходимости решать обыкновенные дифференциальные уравнения с переменными коэффициентами, что далеко не всегда можно сделать аналитическими методами. Возможны **два варианта** выхода из этой ситуации. **Либо** построение решения $\vec{y}$ системы уравнений (21), (22) численными методами с последующим использованием формулы (29) или (30) для численного построения

нового решения уравнения (13). **Либо** построение новых, более сложных, псевдопотенциальных систем путём отыскания решений коммутационных соотношений (10) в алгебрах Ли высоких размерностей. В последнем варианте для элементарного затравочного решения $\vec{m}=(0,0,1)$ мы всегда будем иметь дело только с обыкновенными дифференциальными уравнениями с **постоянными** коэффициентами. И более того, в случае конечномерных алгебр Ли мы всегда можем построить псевдопотенциальное представление в виде конечной системы обыкновенных **линейных** дифференциальных уравнений.

Однако на этом пути мы сталкиваемся с весьма сложной алгебраической проблемой, которая называется – *факторизация свободной алгебры Ли по идеалу, порождённому определяющими соотношениями и образующими элементами.*[5] При решении этой проблемы необходимо производить большое количество однотипных аналитических операций с некоммутативными переменными, что в настоящее время становится уже возможным, в частности, благодаря работам [11 – 15].

Автор выражает свою признательность В.П.Гердту, П.Е.Жидкову, О.К.Пашаеву и В.Б.Приезжеву за полезные обсуждения и замечания.
Эта работа была поддержана грантом INTAS 93 - 0893.

Литература

[1] Ландау Л.Д. - Собрание трудов, М.: Наука, 1969, т.1, с.128.

[2] Ахиезер А.И., Барьяхтар В.Г., Пелетминский С.В. - Спиновые волны., М., Наука, 1967.

[3] Косевич А.М., Иванов Б.А., Ковалёв А.С. - Нелинейные волны намагниченности. Динамические и топологические солитоны., Киев, Наукова думка, 1983.

[4] Wahlquist H.D. and Estabrook F.B. - Prolongation Structures of Nonlinear Evolution Equations, *J. Math. Phys.* 16, 1-7, 1975.
Estabrook F.B. and Wahlquist H.D. - Prolongation Structures of Nonlinear Evolution Equations II, *J. Math. Phys.* 18, 1293-1297, 1976.

[5] В данном случае определяющие соотношения это коммутационные соотношения (10), а образующие элементы - генераторы $\hat{X}_i$.

[5] Bäcklund Transformation, the Inverse Scattering Method, Solitons and their Application, R.Miura (Ed.), Springer-Verlag, Berlin, 1976.

[6] Takhtajan L.A. - *Phys. Let.*, 1977, 64A, 2, p.235.

[7] Боровик А.Е. - *Письма ЖЭТФ*, 1978, т.28, в.10, с.629.

[8] Sklyanin E.K. - On complete integrability of the Landau - Lifshitz equation, *LOMI E-3-79*, Leningrad, 1979.

[9] Borovick A.E. - *Sol. Stat. Comm.*, 1980, 33.

[10] Боровик А.Е., Робук В.Н. - Линейные псевдопотенциалы и законы сохранения для уравнения Ландау - Лифшица, описывающего нелинейную динамику ферромагнетика с одноосной анизотропией., *ТМФ*, т. 46, N 3, 1981.

[11] Робук В.Н., В сб.: *Операторные пространства и функциональный анализ* под ред. В.А.Марченко, Наукова думка, Киев, 1987, с. 58-66.

[12] Akselrod I.R., Gerdt V.P., Kovtun V.E. and Robuk V.N. - - Construction of a Lie Algebra by a Subset of Generators and Commutation Relations. *JINR E5-90-508*, Dubna, 1990.; - Construction of a Lie Algebra by a Subset of Generators and Commutation Relations, In: *Computer Algebra in Physical Research*, Shirkov D.V., Rostovtsev V.A. and Gerdt V.P. (eds.), World Scientific Publ.Co., Singapore, 1991, pp.306-312.

[13] Gerdt V.P., Robuk V.N. and Severyanov V.M. - On Construction of Finitely Presented Lie Algebras. *JINR E5-94-302*, Dubna, 1994, (будет опубликовано в *Журнале вычислительной математики и математической физики*).

[14] Mikhalev A.A., Zolotykh A.A. - Combinatorial Aspects of Lie Superalgebras. - CRC Press, Boca Raton, New York, 1995.

[15] Gerdt V.P., Kornyak V.V. - Construction of Finitely Presented Lie Algebras and Superalgebras. *JINR E5-95-353*, Dubna, 1995, (to be published in *Journal of Symbolic Computation*).

Рукопись поступила в издательский отдел
24 июня 1996 года.

Робук В.Н. P5-96-216

Преобразования Бэклунда для уравнений Ландау—Лифшица

В работе рассмотрена возможность построения преобразований Бэклунда для уравнений Ландау—Лифшица с двуосной анизотропией. Для изотропного уравнения Ландау—Лифшица методом Уолквиста—Истабрука построено новое нелинейное псевдопотенциальное представление, с помощью которого получены преобразования Бэклунда. Продемонстрирован метод, позволяющий из простых «затравочных» решений исходного нелинейного дифференциального уравнения в частных производных строить более сложные решения этого же уравнения путем решения дифференциальных уравнений в обыкновенных производных.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна, 1996

Перевод автора

Robuk V.N. P5-96-216

Bäcklund Transformations for Landau—Lifshits Equations

In the present paper we argue that it is possible to construct Bäcklund transformations for Landau—Lifshits equations with biaxial anisotropy. For the isotropic Landau—Lifshits equations a new nonlinear pseudopotential representation is found using the Walquist—Estabrook method. This representation is applied for construction of Bäcklund transformation. A method is demonstrated which allows one to generate solutions of the initial partial differential equation on the basis of some closed solutions. It is achieved by solving the pseudopotential ordinary differential equations.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna, 1996