ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р5-96-151

М.А.Назаренко

ПОЛИНОМИАЛЬНЫЕ РАЗБИЕНИЯ ЕДИНИЦЫ И $\mathcal{D}$-ФИЛЬТРЫ

Направлено на Международную конференцию по теории приближения функций, посвященную памяти профессора П.П.Коровкина, г.Калуга, 25—30 июня 1996 г.

1996

Рассмотрим задачу построения полинома f степени не выше n, наилучшим образом приближающего набор точек $\{X_s, Y_s\}$ в среднеквадратичном смысле:

$$\sum_s |f(X_s) - Y_s|^2 \to \min. \tag{1}$$

Точечным базисом размерности n будем называть совокупность из $(n+1)$ различных точек множества $\mathcal{M}$, имеющего континуальную мощность. Точной системой Чебышева с единицей над множеством $\mathcal{M}$ будем называть следующую систему функций $\{ g_j \}_{j=0}^{\infty}$:

1. Любая не равная нулю тождественно функция из линейной оболочки первых $(n+1)$ элементов системы Чебышева, обозначаемая как $P \in \operatorname{Lin}\langle g_0, g_1, \dots, g_n \rangle$, называемая также полиномом степени не выше n по этой системе, имеет на множестве $\mathcal{M}$ не более чем n нулей;
2. Для любого точечного базиса размерности $(n-1)$ существует нетривиальный, то есть не равный нулю тождественно, полином степени не выше n, имеющий точки этого базиса в качестве своих нулей;
3. $g_0(x) \equiv 1$.

Пусть система $\{ g_j \}_{j=0}^{\infty}$, по которой образуются полиномы, является точной системой Чебышева с единицей. Для фиксированного точечного базиса $\{ x_k \}_{k=0}^{n}$ из области определения $\mathcal{M}$ построим полиномиальное интерполяционное разбиение единицы:

$$P_m(x_k) = \delta_{mk}, \qquad m, k \in \{0, \dots, n\},$$

$$\sum_{m=0}^{n} P_m(x) = g_0(x) \equiv 1.$$

Этому множеству полиномов соответствует согласованное рациональное разбиение единицы:

$$R_0(x) = \frac{1}{P_0(x)}, \quad R_j(x) = -\frac{P_j(x)}{P_0(x)}, \qquad j \in \{1, \dots, n\},$$

$$\sum_{m=0}^{n} R_m(x) = \frac{P_0(x)}{P_0(x)} = g_0(x) \equiv 1.$$

Основным свойством системы полиномов $\{P_m\}_{m=0}^{n}$, образующих разбиение единицы по некоторому точечному базису, является то, что эти полиномы образуют базис в линейном пространстве полиномов степени не выше n. То есть любой полином P степени не выше n представим единственным образом в следующем виде:

$$P(x) = \sum_{m=0}^{n} A_m \cdot P_m(x).$$

Аналогично соответствующее рациональное разбиение единицы $\{R_m\}_{m=0}^{n}$ является базисом в линейном пространстве рациональных функций, степень числителя которых не превосходит n, а знаменатель фиксирован и равен $P_0(x)$:

$$\frac{P(x)}{P_0(x)} = \sum_{m=0}^{n} B_m \cdot R_m(x).$$

Перейдем к определению $\mathcal{D}$-фильтров. Предполагаем, что фиксирован точечный базис $\{x_m\}_{m=0}^{n}$, система полиномов $\{P_m\}_{m=0}^{n}$ образует разбиение единицы по этому точечному базису, система рациональных функций $\{R_m\}_{m=0}^{n}$ является соответствующим рациональным разбиением единицы.

Пусть $\{F_j\}_{j=1}^{n}$ — набор числовых параметров. $\mathcal{D}$-преобразованием функции f над точечным базисом $\{x_m\}_{m=0}^{n}$ с параметрами $\{F_j\}_{j=1}^{n}$ будем называть следующую функцию [1, 2, 3]:

$$\begin{aligned} h(x) &= \mathcal{D}\Big[f;\,\{F_j\}_{j=1}^{n},\,\{x_m\}_{m=0}^{n}\Big] = \mathcal{D}\Big[f;\,\{F_j\}_{j=1}^{n}\Big] = \\ &= \mathcal{D}[f] = f_0(x)\cdot R_0(x) + \sum_{j=1}^{n} F_j \cdot R_j(x). \end{aligned}$$

Обратное преобразование имеет вид

$$\begin{aligned} f(x) &= \mathcal{D}^{-1}\Big[h;\,\{F_j\}_{j=1}^{n},\,\{x_m\}_{m=0}^{n}\Big] = \mathcal{D}^{-1}\Big[h;\,\{F_j\}_{j=1}^{n}\Big] = \\ &= \mathcal{D}^{-1}[h] = h_0(x)\cdot P_0(x) + \sum_{j=1}^{n} F_j \cdot P_j(x). \end{aligned}$$

Основным свойством введенного $\mathcal{D}$-преобразования является интерполяционная полиномиальная фильтрация, понимаемая в следующем смысле.

Теорема. *Пусть функция f является полиномом степени не выше n, $\{F_j\}_{j=1}^{n}$ — набор числовых параметров, $\{x_m\}_{m=0}^{n}$ — точечный базис. Пусть имеют место интерполяционные соотношения*

$$f(x_j) = F_j, \qquad j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n.$$

Тогда $\mathcal{D}$-образ функции f является константой:

$$h(x) = \mathcal{D}\Big[f;\,\{F_j\}_{j=1}^{n},\,\{x_m\}_{m=0}^{n}\Big] \equiv \mathrm{Const}.$$

При использовании аппарата $\mathcal{D}$-преобразования решение задачи (1) сводится к решению системы из n линейных уравнений для параметров $\{F_j\}$. Имеют место следующие преимущества:

- Отказавшись от универсального базиса по степеням независимого переменного, мы получаем $(n+1)$-параметрическую матрицу системы линейных уравнений, зависящую от расположения точечного базиса $\{x_m\}_{m=0}^{n}$. Выбор параметров позволяет управлять характерными свойствами этой матрицы.
- $\mathcal{D}$-преобразование является устойчивым к ошибкам и подавляет систематические ошибки полиномиального характера соответствующей степени [1, 3].
- Выбор структуры $\mathcal{D}$-преобразования позволяет организовать распознавание нескольких полиномиальных образов [2].
- Все аналитические преобразования, порождающие $\mathcal{D}$-преобразование, могут быть реализованы в формальном нейробазисе. Это дает возможность организовать распознавание одного полиномиального образа нейросетью прямых связей [4].
- Распознавание многих полиномиальных образов может быть организовано нейросетью с обратными связями (с глобальной нелинейностью) [4].

- $\mathcal{D}$-преобразование может быть использовано в качестве экспертного аппарата при построении энергетических функций нейросетей. Примером может служить on–line комплекс «клеточный **автомат** - нейросеть» в случае следующих требований на структуру [5, 6]. Требуется поощрение связи между координатно удаленными активными нейронами, если их расположение на полиномиальном образе, приближающем трек с заданными ограничениями на внутренние характеристики, "поддерживается" наличием активных нейронов "вдоль" графика этого полинома.

Литература

[1] Дикусар Н. Д. // *Математическое моделирование*, 1991, **3**(10), 50.

[2] Dikoussar N. D. // *Comp. Phys. Comm.*, 1994, **79**, 39–51.

[3] Дикусар Н. Д. // *Сообщения ОИЯИ* Р5–95–285, Дубна, 1995.

[4] Уоссермен Ф. *Нейрокомпьютерная техника.* М.: Мир, 1992.

[5] Кисель И. В., Нескоромный В. Н. и Ососков Г. А. // *ЭЧАЯ*, 1993, **24**(6), 1551–1595.

[6] Baginyan S., Glazov A., Kisel I., Konotopskaya E., Neskoromnyi V. and Ososkov G. // *Comp. Phys. Comm.*, 1994, **79**, 165-178.

Рукопись поступила в издательский отдел
26 апреля 1996 года.