ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

96-140

P5-96-140

М.А.Назаренко

О РЕШЕНИИ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ РАЦИОНАЛЬНЫХ АППРОКСИМАЦИЙ

Направлено в журнал «Математические заметки»

1996

Обозначим символами:

- $\mathcal{CA}$ — пространство непрерывных на замкнутом единичном круге комплексной плоскости и аналитических внутри него функций;
- $\mathcal{C}\,[-1,\,1]$ — пространство комплекснозначных функций, непрерывных на отрезке $[-1,\,1]$;
- $\mathcal{C}^{\mathbb{R}}[-1,\,1]$ — пространство действительнозначных функций, непрерывных на отрезке $[-1,\,1]$;
- $\mathcal{C}^{\mathbb{R}}[0,\,2\pi)$ — пространство действительнозначных функций, непрерывных на периоде $[0,\,2\pi)$.

Будем называть допустимой любую невозрастающую, стремящуюся к нулю последовательность действительных чисел $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$. Основным результатом работы является следующая

Теорема. *Для произвольной допустимой последовательности $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ существует такая функция $f \in \mathcal{CA}$ $(\mathcal{C}\,[-1,\,1])$, что величины ее рациональных уклонений в этом пространстве удовлетворяют соотношениям*

$$R_n[\,f\,] = a_n, \quad n = 0,\,1,\,\ldots$$

Приведенное утверждение полностью решает обратную задачу теории рациональных аппроксимаций в пространствах $\mathcal{CA}$ и $\mathcal{C}\,[-1,\,1]$. Обратная задача теории полиномиальных аппроксимаций в пространстве $\mathcal{C}^{\mathbb{R}}[-1,\,1]$ была решена в 1938 году С. Н. Бернштейном [1]. Позже [2] этот результат был перенесен на произвольное банахово пространство. В 1967 году Е. П. Долженко [3] поставил обратную задачу теории рациональных аппроксимаций и получил частичное решение: для любой допустимой последовательности $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ существует такая функция $f \in \mathcal{C}^{\mathbb{R}}[0,\,2\pi)$ $(\mathcal{C}^{\mathbb{R}}[-1,\,1])$, что

$$R_{9^n}[\,f\,] = a_n, \quad n = 0,\,1,\,\ldots$$

В 1994 году А. А. Пекарский [4] доказал следующее утверждение: для любой допустимой последовательности $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, $a_n > a_{n+1}$, существует такая функция $f \in \mathcal{C}[-1, 1]$, что

$$R_n[f] = a_n, \quad n = 0, 1, \ldots$$

В моей работе [5] было получено следующее частичное решение: для любой допустимой последовательности $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, $a_n > a_{n+1}$, существует такая функция $f \in \mathcal{CA}$, что

$$R_n[f] = a_n, \quad n = 0, 1, \ldots$$

Доказательство теоремы произведем для пространства $\mathcal{CA}$. В случае пространства $\mathcal{C}[-1, 1]$ нужно воспользоваться конструкцией А. А. Пекарского [4]. Доказательству теоремы предпошлем несколько лемм. Введем вспомогательные конструкции. В силу соотношения $R_n[A \cdot f] = A \cdot R_n[f]$, $A > 0$, можно считать $a_0 = 1$. Положим $a_{-1} := -1$. Обозначим $\Delta a_n = a_{n-1} - a_n \geq 0$, $n = 0, 1, 2, \ldots$. Символом Ψ обозначим множество тех натуральных чисел $n \in \{1, \ldots\}$, для которых имеют место соотношения $\Delta a_n + a_n > 0$. Обозначим

$$\Upsilon = \Big\{ n \in \Psi : \ \Delta a_n > 0 \Big\},$$

а элементы этого множества будем обозначать n_k, $k = 1, 2, \ldots$, причем $n_k > n_{k+1}$. Разобьем множество Υ на два подмножества. Число n будем называть обычным, если $\Delta a_{n-1} > 0$. Множество обычных чисел будем обозначать Υ^+. Все остальные числа множества Υ будем называть расширенными и обозначать $\Upsilon^0 = \Upsilon \backslash \Upsilon^+$. Положим

$$\varepsilon_{n_1} := \frac{\Delta a_{n_1}}{2}, \quad \varepsilon_{n_k} := \min\left\{ \varepsilon_{n_{k-1}}, \frac{\Delta a_{n_k}}{2} \right\}, \quad k > 1, \ n_k \in \Upsilon.$$

Заметим, что если n_k является расширенным числом, то имеет место неравенство $n_k - n_{k-1} > 1$, где допускается значение $k = 0$ и считается, что $n_{-1} := 0$. Положим

$$\varepsilon_n := \frac{\varepsilon_{n_k}}{2^{n_k - n}}, \quad n_{k-1} < n < n_k.$$

Следующие две леммы содержатся в работе [5].

Лемма 1. *Для построенной указанным образом последовательности $\{\varepsilon_n\}_{n \in \Upsilon}$ существует такая строго возрастающая последовательность $\{\sigma_n\}_{n \in \Upsilon}$ положительных чисел, что*

$$i) \quad \sum_{j=1}^{s-1} \frac{\sigma_j}{\sigma_s - \sigma_j} < \frac{1}{4}\varepsilon_s, \qquad ii) \quad \sum_{j>s} \frac{\sigma_s}{\sigma_j - \sigma_s} < \frac{1}{4}\varepsilon_s.$$

Положим

$$w_n(z) = \frac{\sigma_n z + 1 - \sigma_n}{(1 - \sigma_n) z + \sigma_n}, \quad N_k(z) = \prod_{j=1}^{k} w_j(z),$$

$$\zeta_n = -\frac{1 - \sigma_n + \sigma_n i}{\sigma_n + (1 - \sigma_n) i}, \quad \lambda_{ks} = \operatorname{Im} N_k(\zeta_s).$$

Лемма 2. *Имеют место соотношения*

$$i) \quad |\lambda_{ks}| < \frac{1}{2}\varepsilon_s, \ k < s, \qquad ii) \quad |\lambda_{ks} - (-1)^s| < \frac{1}{2}\varepsilon_s, \ k \geq s.$$

Символом $\mathcal{B}$ обозначим следующее банахово пространство точек $\dot{t} = (t_0, \ldots, t_m, \ldots)$, $m = n - 1$, $n \in \Psi$. Если $n_k \in \Upsilon^0$, то полагаем $t_m = 2^{-(n_k - m)} t_{n_k}$, где $n_{k-1} < m < n_k$, $n_{k-1} \in \Upsilon$, допускается значение $k = 0$ и считается, что $n_{-1} := 0$. Считаем $\mathcal{B}$ пространством ограниченных последовательностей (по индексам $n \in \Upsilon$). Символом $\mathcal{K}$ обозначим выпуклый компакт в $\mathcal{B}$, покоординатно задаваемый неравенствами $0 \leq t_{n-1} \leq \varepsilon_n$, $n \in \Upsilon$. Каждому $t = (t_0, \ldots) \in \mathcal{K}$ поставим в соответствие функцию

$$f_t(z) = \sum_n \delta_n \cdot \Big(\Delta a_n + \Delta t_n \Big) M_n(z), \quad \delta_n = \begin{cases} 1, & n \in \Upsilon^+ \\ \frac{1}{2}, & n \in \Psi \backslash \Upsilon^+ \end{cases}.$$

Лемма 3. *Пусть комплексные числа F_j равномерно по j ограничены по модулю: $|F_j| \leq A$. Пусть $n_k \in \Upsilon^0$, $n_{k-1} < m < n_k$. Тогда имеют место неравенства*

$$\left| \sum_{j=m}^{n_k} \delta_j \cdot \Big(\Delta a_j + \Delta t_j \Big) F_j \right| \leq A \cdot \Big(\Delta a_j + t_{m-1} - t_{n_k} \Big).$$

Доказательство. Обозначим

$$I = \left| \sum_{j=m}^{n_k} \delta_j \cdot \Big(\Delta a_j + \Delta t_j \Big) F_j \right|.$$

Заметим, что при $j > n_{k-1} + 1$ имеет место равенство

$$\Delta t_j = -t_{j-1} = 2^{-(n_k - j + 1)} t_{n_k} = 2^{-(n_k - j)} t_{n_k - 1},$$

$$\varepsilon_{n_k+1} \le \varepsilon_{n_k} \le \Delta a_{n_k} - t_{n_k},$$

и выполнено соотношение $\Delta a_{n_k} + \Delta t_{n_k} \ge 0$. Таким образом,

$$I = \frac{1}{2} \cdot \left| t_{m-1} F_m - t_m F_m + \sum_{j=m}^{n_k - 1} \Delta t_j F_j + \Big(\Delta a_{n_k} + \Delta t_{n_k} \Big) F_{n_k} \right| \le$$

$$\le \frac{A}{2} \cdot \left[t_{m-1} + t_m + \sum_{j=m+1}^{n_k - 1} |\Delta t_j| + \Delta a_{n_k} + \Delta t_{n_k} \right] =$$

$$= \frac{A}{2} \cdot \Bigg[t_{m-1} + 2^{-(n_k - m)} t_{n_k} + \sum_{j=m+1}^{n_k - 1} 2^{-(n_k - j + 1)} t_{n_k} +$$

$$+ \Delta a_{n_k} + 2^{-1} t_{n_k} - t_{n_k} \Bigg] =$$

$$= \frac{A}{2} \cdot \Bigg[t_{n_k} \cdot 2^{-n_k} \Big(2^m + 2^m + \ldots + 2^{n_k - 1} \Big) +$$

$$+ \Delta a_{n_k} + t_{m-1} - t_{n_k} \Bigg] =$$

$$= \frac{A}{2} \cdot \Big[t_{n_k} + \Delta a_{n_k} + t_{m-1} - t_{n_k} \Big]$$

$$\le \frac{A}{2} \cdot \Big[\varepsilon_{n_k+1} + \Delta a_{n_k} + t_{m-1} - t_{n_k} \Big] \le A \cdot \Big(\Delta a_{n_k} + t_{m-1} - t_{n_k} \Big)$$

Лемма доказана.

Используя только что доказанное утверждение, несложно произвести доказательство очередной леммы, изначально содержащееся в работе [5].

Лемма 4. *При всех $t \in K$ и $s \in \Psi$ имеют место неравенства*

$$(-1)^s \operatorname{Im} f_t(\zeta_s) > a_{s-1} + t_{s-1} - \varepsilon_s > 0.$$

Вычислим точное значение минимума таких выражений.

Лемма 5. *Пусть $n+1 \in \Psi$, тогда имеет место равенство*

$$\min_{1 \le k \le n+1} \Big(a_{k-1} + t_{k-1} - \varepsilon_k \Big) = a_n + t_n - \varepsilon_{n+1}.$$

Доказательство. Достаточно показать, что выражение

$$I' = \Big(a_{k-1} + t_{k-1} - \varepsilon_k \Big) - \Big(a_k + t_k - \varepsilon_{k+1} \Big)$$

является неотрицательным. Перепишем его в следующем виде

$$I' = \Delta a_k + t_{k-1} - \varepsilon_k + \varepsilon_{k+1} - t_k.$$

Рассмотрим случай $\Delta a_k > 0$. Напомним, что в силу введенных определений

$$0 \le t_k \le \varepsilon_{k+1} \le \varepsilon_k \le \frac{\Delta a_k}{2}.$$

Тогда

$$I' \ge \Delta a_k + 0 - \varepsilon_k + 0 > 0.$$

Теперь рассмотрим случай $\Delta a_k = 0$. Следовательно,

$$t_k = 2\, t_{k-1}, \quad \varepsilon_{k+1} = 2\, \varepsilon_k.$$

Таким образом,

$$I' = t_{k-1} - \varepsilon_k + 2\, \varepsilon_k - 2\, t_{k-1} = \varepsilon_k - t_{k-1} \ge 0.$$

Лемма доказана.

Следующая лемма является аналогом теоремы Валле Пуссена. Доказательство этого факта содержится в работе [6].

Лемма 6. *Пусть комплексные числа $\{ y_k \}_{k=1}^{2n+2}$ удовлетворяют соотношениям $|y_k| = 1$, $0 < \arg y_1 < \arg y_2 < \ldots < \arg y_{2n+2} < 2\pi$. Пусть имеют место перемены знаков мнимой части функции f:*

$\operatorname{Im} f(y_k) \cdot \operatorname{Im} f(y_{k+1}) < 0$, $k = 1, 2, \ldots, 2n+1$. *Тогда для любой рациональной функции* r *степени не выше* n *выполнено следующее неравенство*

$$\max_{1 \le k \le 2n+2} |f(y_k) - r(y_k)| \ge \min_{1 \le k \le 2n+2} |\operatorname{Im} f(y_k)|.$$

Лемма 7. *Пусть* $n \in \Psi$, *тогда имеет место следующее неравенство*

$$R_n[\, f_t\,] \ge a_n + t_n - \varepsilon_{n+1}.$$

Доказательство. Положим $y_1 = \overline{\zeta_{n+1}}$, $y_2 = \overline{\zeta_n}$, $\ldots$, $y_{n+1} = \overline{\zeta_1}$, $y_{n+2} = \zeta_1, \ldots, y_{2n+2} = \zeta_{n+1}$. В силу соотношения $M_k(\overline{z}) = \overline{M_k(z)}$, $k = 1, 2, \ldots$, точки $\{\, y_k\,\}_{k=1}^{2n+2}$ удовлетворяют условию леммы 6. Заметим, что

$$\operatorname{Im} f_t(y_k) = -\operatorname{Im} f_t(y_{2n+3-k}) = -\operatorname{Im} f_t(\zeta_{n+2-k}), \quad k = 1, 2, \ldots, n+1.$$

Перемена знаков мнимой части $\operatorname{Im} f_t(y_k) \cdot \operatorname{Im} f_t(y_{k+1})$, $k = 1, 2, \ldots, 2n+1$, обеспечивается леммой 4. Таким образом, для любой рациональной функции r степени n в силу леммы 5 имеет место соотношение

$$\max_{1 \le k \le 2n+2} |f_t(y_k) - r(y_k)| \ge \min_{1 \le k \le 2n+2} |\operatorname{Im} f_t(y_k)| =$$

$$= \min_{1 \le k \le n+1} |\operatorname{Im} f_t(\zeta_k)| = a_n + t_n - \varepsilon_{n+1}.$$

Следовательно, эта же оценка верна для рациональной функции r: $R_n[\, f_t\,] = \|f_t - r\|$. Лемма доказана.

Доказательство теоремы. Рассмотрим непрерывное отображение

$$\Big(\Gamma(t)\Big)_m = \Big(a_m + t_m - R_m[\, f_t\,]\Big) : \mathcal{K} \to \mathcal{B}.$$

Если $\Gamma\colon \mathcal{K} \to \mathcal{K}$, то по принципу Шаудера существует неподвижная точка $t^* = \Gamma(t^*)$. Покоординатно это означает

$$t^*_m = a_m + t^*_m - R_m[\, f^*_t\,] \implies R_m[\, f^*_t\,] = a_m,$$

что и доказывает теорему.

Произведем покоординатные оценки. Оценим сверху величину рационального уклонения

$$R_m[\, f_t\,] \;\le\; \Big\| f_t - \sum_{n \le m} \delta_n \cdot \Big(\Delta a_n + \Delta t_n\Big) M_n \Big\| =$$

$$= \max_{|z|=1} \Big| \sum_{n>m} \delta_n \cdot \Big(\Delta a_n + \Delta t_n\Big) M_n(z) \Big| \le$$

$$\le \sum_{n>m} \Big(\Delta a_n + \Delta t_n\Big) = a_m + t_m.$$

Это дает следующее неравенство

$$0 \le a_m + t_m - R_m[\, f_t\,] = \Big(\Gamma(t)\Big)_m.$$

Оценка снизу величины $R_m[\, f_t\,]$ была произведена в последней лемме. Это дает следующее неравенство

$$a_m + t_m - R_m[\, f_t\,] = \Big(\Gamma(t)\Big)_m \le \varepsilon_{m+1}.$$

Таким образом, $\Gamma\colon \mathcal{K} \to \mathcal{K}$. Теорема доказана.

В заключение я хочу выразить благодарность члену-корреспонденту РАН, профессору П. Л. Ульянову, профессору Е. П. Долженко, профессору М. И. Дьяченко, доценту Н. С. Вячеславову и профессору В. Г. Зинову за полезное обсуждение.

Литература

[1] Бернштейн С. Н. Об обратной задаче теории наилучшего приближения непрерывных функций // В книге: Бернштейн С. Н. *Сочинения.* М.: Издат. АН СССР, 1953. Т. II, С. 292–294.

[2] Тиман А. Ф. *Теория приближения функций действительного переменного.* М.: Физматгиз. 1960. С. 50–53

[3] Долженко Е. П. Сравнение скоростей рациональной и полиномиальной аппроксимаций // Матем. заметки. 1967. Т. **1**(3). С. 313–320.

[4] Пекарский А. А. Существование функции с заданными наилучшими равномерными рациональными приближениями // Известия АН Белоруссии. 1994. Т. **1**. С. 23–26.

[5] Назаренко М. А. Существование функции с заданными рациональными приближениями в пространстве $\mathcal{CA}$ // Препринт ОИЯИ Р5-95-494, Дубна, 1995.

[6] Назаренко М. А. Комплексный вариант теоремы Валле Пуссена // Препринт ОИЯИ Р5-95-508, Дубна, 1995.

[7] Канторович Л. В., Акилов Г. П. *Функциональный анализ.* М.: Наука. 1977. С. 616–619.

Рукопись поступила в издательский отдел
22 апреля 1996 года.