СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА

P5 - 9598

Е.П.Жидков, Б.Н.Хоромский

О ЛОКАЛЬНОЙ СХОДИМОСТИ ПРИБЛИЖЕННЫХ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ

1976

P5 - 9598

Е.П.Жидков, Б.Н.Хоромский

О ЛОКАЛЬНОЙ СХОДИМОСТИ ПРИБЛИЖЕННЫХ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ

ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим задачу о приближенном решении уравнения

$$P(x)=0, \tag{I}$$

где $P(x)$ - нелинейный оператор в банаховом пространстве H, комплексном или действительном. Из большого числа методов решения уравнения (I) наиболее изучены итеративные методы типа Ньютона и их непрерывные аналоги. Условия сходимости этих методов обычно формулируются в виде ограничений, справедливых в малой окрестности искомого решения. Такие условия мы называем локальными. Однако при практическом использовании этих методов теоремы о локальной сходимости (ввиду трудности проверки их условий) дают лишь некоторую априорную уверенность в успешном применении того или иного метода, тем более, что полная область сходимости обычно шире теоретически обоснованной. Поэтому при рассмотрении условий локальной сходимости вычислительных процессов оценки области сходимости не играют существенной роли.

В настоящей работе мы исследуем вопросы локальной сходимости как непрерывных, так и дискретных методов с помощью теории асимптотической устойчивости дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. Это оправдано тем, что локальная сходимость какого-либо непрерывного процесса есть не что иное, как асимптотическая устойчивость стационарного решения соответствующего дифференциального уравнения. Что касается теории устойчивости дифференциальных уравнений в банаховом пространстве для ограниченных операторов, то она получила уже достаточное развитие, причем во многом благодаря работам А.М.Ляпунова об устойчивости решений обыкновенных дифференциальных уравнений. В этой работе мы использовали некоторые результаты из /I/.

При рассмотрении дискретных процессов удается получить некоторые условия локальной сходимости и неустойчивости, аналогичные случаю непрерывных процессов. Рассмотрение вопроса об отсутствии сходимости позволяет заключить, насколько достаточные условия локальной сходимости близки к необходимым. При этом подходе можно получить и асимптотику скорости сходимости процесса.

Следует заметить, что везде в работе предполагается существование решения уравнения (I), а все условия сходимости фактически включают ограничение

$$\|P'(x)^{-1}\| \le L < \infty , \qquad (2)$$

гарантирующее невырожденность данного решения. Здесь $P'(x)$ – производная Фреше оператора $P(x)$. Конечно, многие методы могут сходиться и в случае, когда нарушается ограничение (2), но при практическом использовании этих методов требуется некоторая регуляризация.

С помощью полученных результатов рассматривается вопрос о локальной сходимости некоторых известных методов, а также о близости тех или иных условий к неулучшаемым. Здесь имеются в виду следующие непрерывные процессы: $\dot{x} = -P(x)$, $\dot{x} = -P'(x)^{-1}P(x)$, $\dot{x} = -P'(x)^{*}P(x)$, $\dot{x} = -P'(x_0)^{-1}P(x)$, а также их дискретные варианты.

В работе /2/ теорема I′ применяется при исследовании сходимости некоторой модификации метода Ньютона решения одной важной физической задачи на собственные значения для системы интегро-дифференциальных уравнений Шредингера.

§ I. Локальная сходимость непрерывных процессов

Для решения уравнения (I) рассмотрим в комплексном банаховом пространстве H задачу Коши для операторного дифференциального уравнения

$$\frac{dx}{dt} = -\Psi(x), \quad x(0) = x^0 \in H, \qquad (I.I)$$

решение которого обозначим через $x(t, x^0)$.

Здесь $\Psi(x)$ – нелинейный оператор (зависящий от $P(x)$, например $\Psi(x) = P(x)$), действующий из H в H. Предположим, что уравнение

$$\Psi(x) = 0$$

имеет решение $x^* \in H$, такое что $P(x^*) = 0$. Пусть в некотором шаре $S_{x^*, r} = \{x \in H \,/\, \|x - x^*\| \le r\}$ $\Psi(x)$ непрерывно дифференцируем по Фреше. Полагая $y(t) = x(t) - x^*$, для $y(t)$ получим уравнение

$$\frac{dy}{dt} = -\Psi'(x^*)y + F(y), \quad y(0) = x^0 - x^*, \qquad (I.2)$$

где $F(y)$ – некоторый нелинейный оператор, для которого

$$\|F(y)\| \le c(y)\|y\| \; ; \quad \lim_{y \to 0} c(y) = 0 .$$

Пусть теперь $A: H \to H$ – ограниченный линейный оператор. Тогда, согласно /I/, можно определить оператор-функцию e^{At} с помощью соотношения:

$$e^{At} = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_A} e^{\lambda t}(A - \lambda E)^{-1} d\lambda ,$$

где Γ_A – некоторый контур, охватывающий спектр оператора A (обозначим этот спектр $\sigma(A)$).

Если $Re\,\lambda < \rho$ при всех $\lambda \in \sigma(A)$, то существует N_ρ, что

$$\|e^{At}\| \leq N_\rho e^{\rho t}, \quad (t \geq 0).$$

Далее, согласно /I/, стр. 403, для уравнения

$$\frac{dx}{dt} = Ax + F(t,x), \tag{I.3}$$

где $F(t,x)$ удовлетворят условию

$$\|F(t,x)\| \leq q\|x\|, \quad (t \geq 0, \ \|x\| \leq \rho), \tag{I.4}$$

имеет место следующая

Теорема I. Пусть $\sigma(A)$ лежит внутри левой полуплоскости, так что $\|e^{At}\| \leq N_0 e^{-\nu_0 t}$, и выполняется условие (I.4) при $q < \frac{\nu_0}{N_0}$. Тогда для решения уравнения (I.3) имеет место оценка

$$\|x(t)\| \leq N e^{-\nu t}\|x(0)\|, \quad t \geq 0, \ \|x(0)\| \leq \rho_0; \ N, \nu, \rho_0 > 0.$$

Эта теорема решает вопрос о локальной сходимости траекторий (I.3) к точке $x = 0$.

Пользуясь этой теоремой и полагая $A = -\Psi'(x^*)$, можно сформулировать аналогичное утверждение о локальной сходимости процессов (I.2) и (I.I).

Далее, скажем, что процесс (I.I) локально не сходится (или неустойчив) если существует $C > 0$, такое что для всякого $\varepsilon > 0$ существует x^0; $\|x^0 - x^*\| \leq \varepsilon$ и существует T, что $\|x(T, x^0) - x^*\| \geq C$. В /I/ приводится следующая теорема о неустойчивости.

Теорема 2. Если спектр $\sigma(A)$ оператора A содержит точки, лежащие в правой полуплоскости и выполнено условие

$$\|F(t,x)\| \leq q\|x\|^{1+p} \quad (p > 0; \ \|x\| \leq \rho; \ t \geq 0), \tag{I.5}$$

то процесс (I.3) неустойчив.

Если для процесса типа (I.I) выполнены условия этой теоремы, то процесс, вообще говоря, не сходится к решению.

С помощью оператора $\Psi(x)$ реализуется тот или иной непрерывный процесс. Рассмотрим далее, как с помощью приведенных теорем решается вопрос о локальной сходимости (и неустойчивости) некоторых известных методов. Заметим, что условия неустойчивости помогают понять, насколько достаточные условия сходимости близки к необходимым.

I) $\Psi(x) = P(x)$, H – комплексное банахово пространство. Из теоремы I следует, что для локальной сходимости процесса $\dot{x} = -P(x)$ достаточно, чтобы

$$Re[\sigma(P'(x^*))] > \nu > 0. \tag{I.6}$$

Отметим, что все известные авторам рассмотрения этого процесса проводились в гильбертовом пространстве /3/,/4/ при условии

$$(P'(x)h, h) \geq c\|h\|^2, \quad c > 0, \qquad h \text{ – произвольно.}$$

Но известно, см. /I/, что даже в конечно-мерном случае это условие не эквивалентно условию (I.6). Далее, если $\sigma(P'(x^*))$ содержит точки левой полуплоскости и выполнено условие (I.5), то процесс (I.I) неустойчив. Таким образом, необходимое условие сходимости

$$Re[\sigma(P'(x^*))] \geq 0$$

близко к достаточному условию (I.6). Пример совпадения необходимых и достаточных условий дает следующий процесс. Пусть A – положительный оператор, для которого нуль не является собственным значением (но может принадлежать спектру). Для решения уравнения

$$\frac{dx(t)}{dt} = -Ax(t), \quad x(0) = x_0, \quad t \geq 0$$

в /5/ доказано соотношение $\lim\limits_{t \to \infty} \|x(t)\| = 0$, означающее сходимость к нулю этого процесса.

2) $\Psi(x) = P'^{*}(x)P(x)$.

Если $P(x^*)=0$ и существует $P''(x^*)$, то $\Psi'(x^*)=P'^{*}(x^*)P'(x^*)$. Поскольку оператор $P'^{*}(x)P'(x)$ не отрицательный, то для сходимости (I.I) достаточно, чтобы $0 \notin \sigma(\Psi'(x^*))$, то есть $\|\Psi'(x^*)^{-1}\| \le L$. Последнее условие эквивалентно оценке $\|P'(x^*)^{-1}\| \le M$, /6/, которая известна из многих работ (см., напр. /7/) и не улучшаема.

3) $\Psi(x) = P'(x)^{-1}P(x)$.

Пусть $P(x^*)=0$, $\|P'(x^*)^{-1}\| \le L$, $\|P''(x^*)\| \le M$, тогда $\Psi'(x^*) = E + [P'(x)^{-1}]'(P(x^*),\cdot) = E$, ($E$ – единичный оператор) откуда следует, что процесс (I.I) локально сходится.

4) Пусть $P: X \to Y$, $A: Y \to X$, A – линейный оператор. Для процесса $\dot{x} = -AP(x) \equiv -\Psi(x)$ находим $\Psi'(x^*) = AP'(x^*)$ и сходимость обеспечена, если $Re[\sigma(AP'(x^*))]>0$.

В частности, рассматривая непрерывный аналог модифицированного процесса Ньютона $(\Psi(x) = P'(x_0)^{-1}P(x))$, находим

$$\Psi'(x^*) = P'(x_0)^{-1}P'(x^*) = E + P'(x_0)^{-1}(P'(x^*) - P'(x_0)).$$

Поэтому для локальной сходимости достаточно условия

$$\|P'(x_0)^{-1}(P'(x^*) - P'(x_0))\| < 1.$$

Если $P'(x)$ удовлетворяет условию Липшица $\|P'(x) - P'(y)\| \le \le K\|x-y\|$, то условие сходимости следующее: $\|x^* - x_0\| < (\|P'(x_0)^{-1}\| \cdot K)^{-1}$. Конечно, процесс не обязан сходиться при $x(0) = x_0$.

§ 2. О сходимости итерационных процессов

В этом и следующих параграфах мы докажем две теоремы для итерационных процессов, аналогичные теоремам I и 2. Эти теоремы дадут возможность исследовать вопрос о локальной сходимости или, наоборот, об отсутствии сходимости различных дискретных методов.

В банаховом пространстве H (комплексном или действительном) рассмотрим итерационный процесс

$$x_{n+1} = Ax_n + Bx_{n-1} + F(x_n, x_{n-1}), \tag{2.I}$$

x_0, x_1 – заданы. A и B-линейные ограниченные операторы из H в H. F – нелинейный оператор, действующий из $H \times H$ в H. Будем предполагать, что в $S_{0,r}$ оператор F обладает свойством

$$\|F(x_n, x_{n-1})\| \le q_1\|x_n\| + q_2\|x_{n-1}\|, \tag{2.2}$$

где q_1 и q_2 – положительные числа.

Наряду с процессом (2.I), рассмотрим в H процесс

$$y_{n+1} = Ay_n + By_{n-1}, \quad y_0, y_1 \in H, \tag{2.3}$$

который является линейной частью (2.I). Сейчас мы докажем теорему, которая, по существу, будет означать, что если решения равенства (2.3) сходятся к нулю, то при достаточно малых q_1 и q_2 решения (2.I) также сходятся к нулю. Это очевидно, например, если $\|A\| + \|B\| < 1$. Тогда процесс (2.3) сходится к нулю, а при достаточно малых q_1 и q_2 (2.I) мажорируется числовой последовательностью

$$a_{n+1} = (\|A\| + q_1)a_n + (\|B\| + q_2)a_{n-1},$$

которая также сходится к нулю. Мы рассмотрим более общий случай. Пусть существуют числа ε и M, такие, что $1 > \varepsilon > 0$, $M > 0$, для которых выполнена оценка

$$\|y_n\| \le M\varepsilon^n(\|y_0\| + \|y_1\|), \qquad y_0, y_1 \text{ – произвольны}, \tag{2.4}$$

означающая сходимость к нулю процесса (2.3).

Теорема I'. Пусть для процесса (2,3) выполнено условие (2.4). Тогда для любого ε_1, такого, что $1 > \varepsilon_1 > \varepsilon$, существуют достаточно малые $q_1, q_2 > 0$, такие, что если $F(x_n, x_{n-1})$ подчиняется оценке (2.2) с этими q_1, q_2, то для решения x_n процесса (2.1) в малой окрестности нуля выполнена оценка

$$\|x_n\| \le C\,\varepsilon_1^n \max(\|x_0\|, \|x_1\|),$$

где C – некоторая положительная константа.

<u>Доказательство</u>. Проведем доказательство, имея в виду получить оценку для всякого $M_1 > M$

$$\|x_n\| \le 2M_1 \max(1, 2M_1)\cdot \max(\|x_0\|, \|x_1\|)\,\varepsilon_1^n,$$

которая выполняется, если $\max(\|x_0\|,\|x_1\|) \le \frac{r}{(2M_1)^2\varepsilon_1^2 \max(1,2M_1)} = \frac{\delta}{2M_1\varepsilon_1^2}$.

Справедливость вышеуказанных оценок будет означать, что теорема доказана.

Обозначим $m_{k,l} = \max\{\|x_i\|,\ i=k,k+1,\dots,l\}$. Достаточно показать, что существует целое N, такое, что для всяких $x_0, x_1 \in S_{0,r} \cap S_{0,\delta}$ будут справедливы неравенства

$$\|x_N\| \le \varepsilon_1^N m_{0,1} \qquad (2.5)$$

$$\|x_k\| \le 2M_1\,\varepsilon_1^k m_{0,1}, \quad k = 2,\dots,N-1. \qquad (2.6)$$

Действительно, из (2.5),(2.6) следует,что $\|x_n\| \le \delta,\ (k \ge 0)$

$$\|x_{2N}\| \le \varepsilon_1^N m_{N,N+1} \le \varepsilon_1^{2N} m_{0,2},$$

$$\|x_{3N}\| \le \varepsilon_1^N m_{2N,2N+1} \le \varepsilon_1^{3N} m_{0,3}$$, поскольку $\|x_{2N+1}\| \le \varepsilon_1^{2N} m_{1,3}$,

$m_{0,N} \le r$, $m_{0,N} \le \delta$.

Аналогично получаем

$$\|x_{N^2}\| \le \varepsilon_1^{N^2} m_{0,N}, \quad \|x_{N^2+1}\| \le \varepsilon_1^{N^2} m_{1,N+1} = \varepsilon_1^{N^2} m_{1,N}.$$

Поэтому для всех целых p и целых $k < N$ имеем

$$\|x_{pN}\| \le \varepsilon_1^{pN} m_{0,N}, \quad \|x_{pN+k}\| \le 2M_1\varepsilon_1^k m_{pN+1,pN} \le 2M_1\varepsilon_1^{pN+k} m_{0,N}.$$

Заметим, что $\|x_k\| \le 2M_1\varepsilon_1^k m_{0,1} \le 2M_1\ m_{0,1}$, поэтому

$$\|x_{pN+k}\| \le 2M_1\,\varepsilon_1^{pN+k} m_{0,1}\cdot\max\{1, 2M_1\}.$$

Теперь докажем неравенства (2.5), (2.6):

$$\|x_{n+1}\| \le a\|x_n\| + b\|x_{n-1}\| + q_1\|x_n\| + q_2\|x_{n-1}\|.$$

Здесь $a = \|A\|$, $b = \|B\|$.

Пусть δ_1, δ_2 есть корни уравнения

$$z^2 - (a+q_1)z - (b+q_2) = 0.$$

Поскольку $\delta_1 \ne \delta_2$, то полагая $h = \max(\delta_1, \delta_2)$, имеем

$$\|x_{n+1}\| \le |\delta_1|^{n+1}|\bar{x}_1| + |\delta_2|^{n+1}|\bar{x}_2| \le M_2 h^{n+1} m_{0,1},$$

где числа $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$ удовлетворяют системе

$$\begin{cases} \bar{x}_1 + \bar{x}_2 = \|x_0\| \\ \delta_1\bar{x}_1 + \delta_2\bar{x}_2 = \|x_1\|. \end{cases}$$

Пусть $q = \max(q_1, q_2)$, а последовательность $y_n \in H$ определяется следующим образом:

$$y_{n+1} = Ay_n + By_{n-1}, \quad y_0 = x_0, \quad y_1 = x_1.$$

Положим $\Delta_n = x_n - y_n$. Δ_n удовлетворяет соотношению

$$\Delta_{n+1} = A\Delta_n + B\Delta_{n-1} + F(x_n, x_{n-1}), \quad \Delta_0 = 0, \quad \Delta_1 = 0.$$

$$\|\Delta_{n+1}\| \le a\|\Delta_n\| + b\|\Delta_{n-1}\| + q_1\|\Delta_n\| + q_2\|\Delta_{n-1}\| \le$$

$$\le a\|\Delta_n\| + b\|\Delta_{n-1}\| + q M_2 (h^n + h^{n-1}) m_{0,1}.$$

Пусть $a + b \ne 1$. Обозначим $l = qM_2(h^n + h^{n-1})m_{0,1}$.

Из теории уравнений в конечных разностях следует, что при $k \le n+1$ выполнено неравенство

$$\|\Delta_{n+1}\| \le l\,\mathcal{L}(n) \le l\,\mathcal{L}(n)\,\varepsilon_1^{-(n+1)}\cdot\varepsilon_1^k,$$

где $\mathcal{L}(n)$ определяется равенством:

$$l\,\mathcal{L}(n) = c_1\eta_1^n + c_2\eta_2^n + l(1-a-b)^{-1},$$

а c_i, η_i, $i = 1,2$ удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} c_1 + c_2 + l(1-a-b)^{-1} = 0 \\ \eta_1 c_1 + \eta_2 c_2 + l(1-a-b)^{-1} = 0 \\ \eta_i^2 - a\eta_i - b = 0, \quad \eta_1 \ne \eta_2 \end{cases} \qquad (2.7)$$

Полагая $\mathcal{D}(n)=M_2(h^{n-1}+h^{n-2})\mathcal{L}(n-1)$, получим теперь следующую оценку для x_n:

$$\|x_n\|\le\|y_n\|+\|x_n-y_n\|\le(2M\varepsilon^n+q\mathcal{D}(n)\varepsilon_1^{-n}\cdot\varepsilon_1^n)m_{0,1}\le$$
$$\le(2M+q\mathcal{D}(n)\varepsilon_1^{-n})\varepsilon_1^n m_{0,1}.$$

Далее, пусть N таково, что $\zeta=1-2M\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_1}\right)^N>0$.

Пусть далее $\max\limits_{1<k<N}\mathcal{D}(k)\varepsilon_1^{-k}=Q(N)$.

Подчиним число $q>0$ условию:

$$q\,Q(N)=\min(2(M_1-M),\zeta).$$

Тогда при $k<N$ получим оценку

$$\|x_k\|\le 2M_1\varepsilon_1^k m_{0,1}.$$

При $k=N$ имеет место неравенство:

$$\|x_N\|\le\|y_N\|+\|y_N-x_N\|\le\left(2M\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_1}\right)^N+q\,Q(N)\right)\varepsilon_1^N m_{0,1}=$$
$$=(1-\zeta+q\,Q(N))\varepsilon_1^N m_{0,1}\le\varepsilon_1^N m_{0,1}.$$

Таким образом, в случае $a+b\ne1$ теорема доказана. Если $a+b=1$, то система, аналогичная (2.7), будет иметь вид

$$\begin{cases}c_1+c_2=0\\ \eta_1c_1+\eta_2c_2+\ell(2-a)^{-1}=0\\ \eta_i^2-a\eta_i-b=0,\quad \eta_1\ne\eta_2\end{cases}$$

$$\ell\mathcal{L}(n)=c_1\eta_1^n+c_2\eta_2^n+\ell n(2-a)^{-1}.$$

Дальнейшие рассуждения аналогичны первому случаю. Осталось заметить, что для справедливости всех рассуждений достаточно предположить, что

$$\max(\|x_0\|,\|x_1\|)\le\frac{\tau}{2M_1\max(1,2M_1)}=\delta.$$

Теорема доказана.

В [2] теорема I′ применяется при исследовании процесса типа (2.I), который возникает при решении задачи на собственные значения для системы интегро-дифференциальных уравнений Шредингера методом Ньютона. Далее мы рассмотрим важный частный случай теоремы: $B=0$, $F:H\to H$, при помощи которого исследуем вопросы сходимости нескольких известных процессов в комплексном банаховом пространстве H.

I) $x_{n+1}=x_n-\tau P'(x_n)^{-1}P(x_n)$, $1\ge\tau>0$.

Пусть $P(x^*)=0$, $P''(x^*)$ – ограничена. Полагая $y_n=x_n-x^*$, для малых y_n получим

$$y_{n+1}=(1-\tau)y_n+F(y_n),\quad \|F(y)\|=o(\|y\|).$$

Из теоремы I′ следует, что при всяком τ из промежутка [I,0) метод Ньютона-Канторовича локально сходится. Видно также, что метод очень быстро сходится при $\tau=1$.

2) $x_{n+1}=x_n-\tau P(x_n)$, $1\ge\tau>0$. (2.8)

Имеет место следующая

<u>Теорема 3</u>. Пусть $P(x^*)=0$, а $P'(x^*)$ – ограничена, тогда для процесса (2.8) справедливы утверждения:

а) Пусть $Re[\sigma(P'(x^*))]\ge M>0$, а $\tau<\frac{2M}{\|P'(x^*)\|^2}$, тогда процесс (2.8) локально сходится.

б) Если $(P'(x^*)h,h)\ge M(h,h)$, $M>0$, а $\tau<\frac{2}{\|P'(x^*)\|}$, то процесс (2.8) локально сходится (здесь H – гильбертово пространство).

<u>Доказательство</u>. а) Обозначим $y_n=x_n-x^*$. Тогда для малых по норме y_n процесс (2.8) имеет вид:

$$y_{n+1}=(E-\tau P'(x^*))y_n+F(y_n),\quad \|F(y)\|=o(\|y\|).$$

Полагая $P'(x^*)=A$, легко показать, что если спектральный радиус τ оператора $E-\tau A$ удовлетворяет условию $\tau<1$, то существуют ε и N такие, что $1>\varepsilon>0$, $N>0$, и для решения z_n уравнения $z_{n+1}=(E-\tau A)z_n$

справедлива оценка $\|z_n\| \le M\varepsilon^n \|z_0\|$. Поэтому из теоремы I′ следует, что при $r<1$ процесс (2.8) локально сходится. Пусть теперь спектр A лежит в правой полуплоскости, так что $Re(\sigma(A)) \geq M > 0$. Ясно, что $M \le \|A\|$. Учитывая последнее неравенство, из геометрических соображений легко получить следующую оценку для r :

$$r \le (\|A\|^2 - M^2)\tau^2 + (\tau M - 1)^2.$$

Поэтому условие $r<1$ будет выполнено, если

$$\tau^2(\|A\|^2 - M^2) + (\tau M - 1)^2 < 1 \quad \text{или} \quad \tau < \frac{2M}{\|A\|^2}. \qquad (2.9)$$

б) Поскольку $P'(x^*)$ положительно определен, то $\sigma(A)$ лежит на действительной оси. Поэтому условие $r<1$ будет выглядеть так: $1-\tau\|A\| > -1$, при $M>0$. Это приводит к искомому неравенству $\tau < \frac{2}{\|A\|}$. Теорема доказана.

Для сравнения приведем оценку для τ, которая получена в /3/ при условиях $(P'(x)h, h) \geq M(h,h)$, $M>0$, и $\|P'(x)\| \le C$: $0 < \tau \le \frac{2M}{M^2+C^2}$. Ввиду очевидных неравенств $\frac{2M}{M^2+C^2} < \frac{2M}{\|A\|^2} \le \frac{2}{\|A\|}$ заключаем, что даже в случае банахова пространства условие (2.9) менее ограничительно, нежели условие из /3/.

Тот же процесс (2.8) исследуется в работе /8/ в вещественном банаховом пространстве B с гладкой нормой при условиях $\|P'(x)\| \le A$ и

$$(\operatorname{grad}\|h\|, P'(x)h) \geq m\|h\|, \qquad (2.11)$$

где по определению $(\operatorname{grad}\|x\|, y) = \lim\limits_{t\to 0} \frac{\|x+ty\| - \|x\|}{t}$.
Здесь (z, x) определяет значение линейного функционала $z \in B^*$ на векторе $x \in B$. Покажем, что из условия (2.11) следует, что $Re[\sigma(P'(x))] \geq m$. Предположим, что $\lambda = m_0 + i\mu_0 \in \sigma(P'(x))$ и $m - m_0 = \alpha > 0$. Положим $\delta = \frac{\alpha}{2}$.

Тогда существует $h_\delta \in B$, $\|h_\delta\| = 1$ такой, что $\delta \geq \|P'(x)h_\delta - \lambda h_\delta\|$. Далее, по определению, (2.11) означает, что

$$\lim_{t\to 0} \frac{\|h + tP'(x)h\| - \|h\|}{t} \geq m\|h\|.$$

Пусть $\varepsilon = \frac{\alpha}{4}$, тогда для h_δ существует $T = T(\varepsilon)$ такое, что

$$\|h_\delta + tP'(x)h_\delta\| \geq (1 + t(m-\varepsilon)), \quad \text{при} \quad t \le T(\varepsilon).$$

Теперь имеем неравенство:

$$\delta t \geq \|h_\delta + tP'(x)h_\delta - (\lambda t + E)h_\delta\| \geq \|h_\delta + tP'(x)h_\delta\| - |t\lambda + 1| \geq$$
$$\geq 1 + t(m-\varepsilon) - (1 + tm_0 + o(t)) = t(\alpha - \varepsilon) + o(t) \geq 0.$$

Поэтому при малых $t>0$ справедливо неравенство:

$$\frac{\alpha}{2}t \geq \frac{3}{4}\alpha t + o(t) \quad \text{или} \quad -\frac{\alpha}{4}t + o(t) \geq 0,$$

что противоречиво. Итак, $Re[\sigma(P'(x))] \geq m$, поэтому справедлива оценка (2.9) для τ : $\tau < \frac{2m}{C^2}$. В /8/ доказано, что процесс (2.8) сходится при условии $\varepsilon_1 \le \tau \le \varepsilon_2$, где ε_1 и ε_2 - корни (положительные) уравнения

$$NA^2\varepsilon^2 - 2m\varepsilon + 1 - q^2 = 0$$
$$\left(1 - \frac{m^2}{NA^2}\right)^{1/2} < q < 1, \quad 1 \le N = const. \qquad (2.12)$$

Полагая $\varepsilon = \frac{2m}{A^2}$ и подставляя в (2.12), получаем

$$4\frac{m^2}{A^2}(N-1) + 1 - q^2 > 0. \qquad (2.13)$$

Производная от (2.12) в точке $\varepsilon = \frac{2m}{A^2}$ равняется $2m(2N-1)>0$, поэтому (2.13) вместе с последним неравенством дает: $\max(\varepsilon_1, \varepsilon_2) < \frac{2m}{A^2}$, то есть даже без предположения гладкости нормы, оценка $0 < \tau < \frac{2m}{A^2}$ менее ограничительна, чем оценка $\varepsilon_1 \le \tau \le \varepsilon_2$.

§ 3. Об условиях отсутствия локальной сходимости итерационных процессов

Рассмотрим процесс (2.I) в гильбертовом (действительном или комплексном) пространстве H.

Определение I. Скажем, что процесс типа (2.I) локально не сходится (или неустойчив) при $n \to \infty$, если существует такое C > 0, что для всякого достаточно малого $\varepsilon > 0$ найдутся такие x_0, $x_1 \in H$, что $\max\{\|x_0\|, \|x_1\|\} \le \varepsilon$, и такой номер N, для которых $\|x_N\| \geqslant C$.

Определение 2. Скажем, что операторы A и B удовлетворяют свойству (R), если из равенства $\lim\limits_{n\to\infty} \|Ax_n - \|A\|x_n\| = 0$ следует для той той же последовательности x_n равенство $\lim\limits_{n\to\infty}\|Bx_n - \|B\|x_n\| = 0$.

В этом параграфе мы докажем следующую теорему:

Теорема 2'. Пусть операторы A и B удовлетворяют свойству (R) и $A \geqslant \alpha E$, $B \geqslant \beta E$, $\alpha^2+\beta^2 > 0$, $\alpha, \beta \geqslant 0$, $\|A\| + \|B\| > 1$. Если нелинейный оператор $\Phi(x, z)$ таков, что $\|\Phi(x, z)\| \le q\,(\|x\|^{1+p} + \|z\|^{1+p})$, $(p > 0,\ \max\{\|x\|, \|z\|\} \le \tau)$, то процесс

$$y_{n+1} = Ay_n + By_{n-1} + \Phi(y_n, y_{n-1}) \qquad (3.I)$$

неустойчив.

Доказательству теоремы предпошлем несколько вспомогательных утверждений. Как обычно, скажем, что линейный оператор A связан с оператором B соотношением A $\geqslant$ B, если A–B – положительный оператор $(([A-B]x, x) \geqslant 0$ для всех $x \in H$). Пусть $A \geqslant \alpha E$, $B \geqslant \beta E$, $\alpha, \beta \geqslant 0$, $\alpha^2+\beta^2 \neq 0$. При этом условии рассмотрим процесс (2.3), полагая $\|y_i\| = 1$, $i = 0, 1$.

Обозначим $y_n(\xi)$ решение (2.3) с начальными данными $\xi = (y_0, y_1)$. Тогда $y_n(\xi) = \Delta_1^n z_1 + \Delta_2^n z_2$, где Δ_1 и Δ_2 – корни операторного уравнения $\Delta^2 - A\Delta - B = 0$, а элементы z_1, z_2 определяются равенствами $z_1 = (\Delta_1 - \Delta_2)^{-1}(y_1 - \Delta_2 y_0)$, $z_2 = (\Delta_2 - \Delta_1)^{-1}(y_1 - \Delta_1 y_0)$. Поскольку $\Delta_1 - \Delta_2 = 2\sqrt{\frac{A^2}{2} + B} \geqslant \gamma E$, $\gamma > 0$, то оператор $\Delta_1 - \Delta_2$ обратим. Если $\Delta_1 = \frac{A}{2} + \sqrt{\frac{A^2}{4} + B}$, то $\delta = \max\{\|\Delta_1\|, \|\Delta_2\|\} = \|\Delta_1\|$.

Лемма I. Для всяких N, $\gamma > 0$ и вышеуказанных A и B существуют y_0, y_1, $\|y_0\| = 1$, $\|y_1\| = \|\Delta_1 y_0\|$ такие, что для $y_n(\xi)$ выполнена оценка $(1-\gamma)\,\delta^n \le \|y_n(\xi)\| \le \delta^n$, $n \le N$.

Доказательство. Поскольку Δ_1 – положительный оператор, то число $\delta = \|\Delta_1\| \in \sigma(\Delta_1)$. Пусть $\varepsilon > 0$ – произвольное число. Выберем y_0 так, чтобы $\|y_0\| = 1$, $\|(\Delta_1 - \delta E)y_0\| \le \varepsilon\delta$. Положим $y_1 = \Delta_1 y_0$, тогда $z_2 = 0$, $z_1 = y_0$, поэтому $y_n(\xi) = \Delta_1^n y_0$ и $\|y_n(\xi)\| \le \delta^n$. Далее $\|\Delta_1 y_0\| \geqslant \delta(1-\varepsilon)$. Докажем по индукции, что тогда для всех n имеет место неравенство $\|(\Delta_1^n - \delta^n E)y_0\| \le n\,\delta^n\varepsilon$. Пусть для некоторого $k > 0$ выполнено неравенство $\|(\Delta_1^k - \delta^k E)y_0\| \le k\,\delta^k\varepsilon$, тогда $\|(\Delta_1^{k+1} - \delta^{k+1}E)y_0\| = \|[\Delta_1(\Delta_1^k - \delta^k E) + \delta^k(\Delta_1 - \delta E)]y_0\| \le \delta k \delta^k \varepsilon + \delta^k\delta\varepsilon = (k+1)\delta^{k+1}\varepsilon$. Поэтому для всякого $n > 0$ выполнено неравенство $\delta^n(1 - n\varepsilon) \le \|\Delta_1^n y_0\|$. Полагая при данном N, $\varepsilon = \frac{\gamma}{N}$, получим доказательство леммы.

Далее, пусть операторы A и B удовлетворяют свойству (R), тогда ясно, что $\|A+B\| = \|A\| + \|B\|$. Если $P_i(\lambda)$, i =I,2 есть многочлены с положительными коэффициентами, то для тех же операторов A и B свойству (R) удовлетворяет пара операторов A и C $= P_1(A) + P_2(B)$, а также операторы A и $\sqrt{C}$, что очевидно. При этом имеет место равенство $\|A + \sqrt{C}\| = \|A\| + \sqrt{P_1(\|A\|) + P_2(\|B\|)}$.

Теперь приступим к доказательству теоремы.

Доказательство. Согласно Лемме I выберем y_0, y_1 так, чтобы для решения уравнения

$$V_{n+1} = AV_n + BV_{n-1}, \quad V_0 = y_0, \quad V_1 = y_1$$

при некоторых $\gamma, N>0$ и для всех $n \le N$ выполнялось неравенство

$$(1-\gamma)\delta^n \le \|V_n(\xi)\| \le \delta^n, \quad \xi = (y_0, y_1), \quad \delta = \|\Delta_1\|.$$

Заметим, что из условий теоремы легко следует, что $\delta > 1$.
Пусть $y_n(\xi)$ есть решение (3.I) с начальными значениями y_0, y_1.
Представим его в виде

$y_n(\xi) = y_n = y_n^1 + y_n^2$, где y_n^1 и y_n^2 есть решения следующих уравнений:

$$y^1_{n+1} = Ay^1_n + By^1_{n-1}, \quad y_0^1 = y_0, \quad y_1^1 = y_1$$

$$y^2_{n+1} = Ay_n^2 + By^2_{n-1} + \Phi(y_n, y_{n-1}), \quad y_0^2 = y_1^2 = 0.$$

Пусть $\varepsilon>0$ есть произвольное, достаточно малое число. Положим $\xi_\varepsilon = \varepsilon\xi$. Пусть M – некоторое число, удовлетворяющее условию

$$1+\gamma < M < \min(2-\gamma, 1+\gamma+\gamma_1), \quad \gamma_1>0.$$

О выборе $\gamma_1>0$ скажем позднее. Поскольку $\varepsilon>0$ мало, то в силу малости ε^p существует N_1, $3\le N_1 < N$ такое, что

$$\|y_n(\xi_\varepsilon)\| \le \varepsilon M\delta^n, \quad n\le N_1. \qquad (3.2)$$

Для таких n оценим компоненты y_n^1 и y_n^2, предполагая, что $\varepsilon M\delta^n \le 2$.

$$y^2_{n+1} = Ay_n^2 + By^2_{n-1} + \Phi(y_n, y_{n-1}), \quad y_0^2 = y_1^2 = 0; \quad y_n = y_n(\xi_\varepsilon).$$

Так как

$$\|\Phi(y_n, y_{n-1})\| \le c(\beta^n + \beta^{n-1}),$$

где $c = (\varepsilon M)^{1+p} q$, $\beta = \delta^{1+p}$, то

$$\|y^2_{n+1}\| \le a\|y_n^2\| + b\|y^2_{n-1}\| + c(\beta^n+\beta^{n-1}).$$

Здесь $a = \|A\|$, $b=\|B\|$.
Таким образом, $\|y_n^2\| \le x_n$, где x_n есть решение уравнения

$$x_{n+1} = ax_n + bx_{n-1} + c(\beta^n + \beta^{n-1}), \quad x_0=0, \quad x_1=0 \qquad (3.3)$$

Будем искать x_n в виде $x_n = W_n + z_n$, где z_n – частное решение (3.3), а W_n – общее решение соответствующего однородного уравнения.

$$W_n = \varepsilon_1^n c_1 + \varepsilon_2^n c_2, \quad \varepsilon_{1,2} = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4}+b}.$$

z_n найдем в виде $z_n = zc\beta^n$, тогда

$$z\beta^{n+1} = az\beta^n + bz\beta^{n-1} + \beta^n + \beta^{n-1}.$$

Отсюда получим

$$z = (1+\beta)(\beta^2 - a\beta - b)^{-1}$$

Напомним, что $\beta = \left\|\frac{A}{2} + \sqrt{\frac{A^2}{4}+B}\right\|^{1+p} = \left(\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4}+b}\right)^{1+p}$ согласно замечаниям перед формулировкой теоремы. Поэтому $\beta^2 - a\beta - b \ne 0$, а также $|\varepsilon_2| < \varepsilon_1 < \beta = \delta^{1+p}$.

После того, как найдена величина z, константы c_1 и c_2 определяются из системы

$$\begin{cases} c_1 + c_2 + zc = 0 \\ \varepsilon_1 c_1 + \varepsilon_2 c_2 + zc\beta = 0\end{cases}$$

$$c_1 = cz(\varepsilon_2-\beta)(\varepsilon_2-\varepsilon_1)^{-1}, \quad c_2 = cz(\varepsilon_1-\beta)(\varepsilon_1-\varepsilon_2)^{-1}.$$

Перепишем эти выражения в виде

$c_1 = czm_1$, $c_2 = czm_2$, тогда

$$x_n = cz(\varepsilon_1^n m_1 + \varepsilon_2^n m_2 + \delta^{n(1+p)}).$$

$$x_n \le cz\delta^{(1+p)n}\left(1 + \frac{m_1-m_2}{\delta^{pn}}\right) \le cz\delta^{(1+p)n}(1+m_1-m_2),$$

поскольку $\delta > 1$. Обозначая $d = qz(1+m_1-m_2)$, окончательно получим

$$\|y_n^2\| \le x_n \le d(\varepsilon M \delta^n)^{1+p}$$

$$\|y_n^1\| \le \varepsilon \delta^n$$

Поэтому для $y_n(\xi_1)$ справедлива оценка

$$\|y_n(\xi_1)\| \le \|y_n^1\| + \|y_n^2\| \le (1 + d\varepsilon^p M^{1+p} \delta^{pn})\varepsilon\delta^n, \quad n \le N_1.$$

Если при этом

$$1 + d\varepsilon^p M^{1+p}\delta^{pn} \le M,$$

то неравенство (3.2) будет выполняться для тех n, для которых $n \le [N_2]$ ($[\alpha]$ - целая часть числа α), где N_2 есть решение уравнения

$$1 + d\varepsilon^p M^{1+p}\delta^{pN_2} = M$$

или

$$\varepsilon M \delta^{N_2} = \left(\frac{M-1}{Md}\right)^{1/p}.$$

Это уравнение имеет единственное решение $N_2(\varepsilon)$, не зависящее от N_1. Таким образом, можно положить $N_1(\varepsilon) = [N_2(\varepsilon)]$.

Далее

$$\varepsilon M \delta^{N_2} = \left(\frac{1}{Md}\right)^{1/p} (M-1)^{1/p} < \left(\frac{1}{d}\right)^{1/p} (\gamma_1)^{1/p}.$$

Теперь, полагая $\gamma_1 \le d z^p$, получим $\varepsilon M \delta^{N_2} \le z$. Этим обоснована справедливость изложенных выше рассуждений.

Имеем

$$\|y_{N_1}\| \ge \|y_{N_1}^1\| - \|y_{N_1}^2\| \ge (1-\gamma)\varepsilon\delta^{N_1} - d(\varepsilon M \delta^{N_1})^{1+p} =$$

$$= (1 - \gamma - dM^{1+p}\varepsilon^p \delta^{N_1 p})\varepsilon\delta^{N_1} =$$

$$= \left(1 - \gamma - Md\left[\left(\frac{M-1}{Md}\right)^{1/p}\right]^p \delta^{p(N_1-N_2)}\right)\left(\frac{M-1}{M^{1+p}d}\right)^{1/p}\delta^{(N_1-N_2)} \ge$$

$$\ge (2 - M - \gamma)\left(\frac{M-1}{M^{1+p}d}\right)^{1/p} \cdot \frac{1}{\delta} = const.$$

Для оправдания последнего неравенства достаточно заметить, что $\delta^{(N_1-N_2)} \ge \frac{1}{\delta}$, а $\delta^{p(N_1-N_2)} \le 1$, поскольку $\delta > 1$, а $-1 < N_1 - N_2 \le 0$.

Итак, неустойчивость процесса (3.1) доказана, так как для всякого $\varepsilon > 0$ существуют $N_1(\varepsilon)$, C, такие, что $\|y_{N_1(\varepsilon)}\| \ge C$, где C не зависит от ε, а $\max\{\|y_0\|, \|y_1\|\} \le \ell\varepsilon$, где ℓ также от ε не зависит.

Теорема доказана.

Из доказательства легко следует, что если $B \le -\beta E$, $A \le -\alpha E$, $\alpha, \beta \ge 0$, $\alpha + \beta > 1$, то процесс (3.1) также неустойчив. Действительно, положив $\bar{y}_0 = -y_0$, $\bar{y}_1 = -y_1$ и $\bar{y}_n = \bar{y}_n^1 + \bar{y}_n^2$, легко заметить, что $\bar{y}_n^1 = y_n^1$, а оценки для $\bar{y}_n^2$ совпадают с оценками для y_n^2.

В заключение остановимся на процессе

$$y_{n+1} = Ay_n + F(y_n). \tag{3.4}$$

Рассуждая аналогично доказательству теоремы 2', легко вывести следующую теорему.

<u>Теорема 2"</u>. Пусть оператор A самосопряженный и $\|A\| > 1$. Если нелинейный оператор $F: B \to B$ таков, что

$$\|F(x)\| \le q\|x\|^{1+p}, \quad p > 0, \quad \|x\| \le z,$$

то процесс (3.4) неустойчив.

Теперь мы можем закончить исследование процесса

$$x_{n+1} = x_n - \tau P(x_n), \tag{3.5}$$

применив теорему 2". Пусть $P(x^*) = 0$, оператор $P(x)$ дважды непрерывно дифференцируем в точке x^*, а $P'(x^*)$ - самосопряженный оператор, спектр которого содержит точку в левой полуплоскости. Поскольку линейная часть (3.5) имеет вид

$$y_{n+1} = y_n - \tau P'(x^*)y_n$$

и спектр оператора $E - \tau P'(x^*)$ содержит точку $1 + \varepsilon\tau$, $\varepsilon > 0$, то $\|E - \tau P'(x^*)\| \ge 1 + \varepsilon\tau > 1$. Поэтому по теореме 2" процесс (3.5) неустойчив. Учитывая теорему 3, теперь можно заключить, что локальная сходимость или неустойчивость процесса (3.5) определяется расположением спектра оператора $P'(x^{*})$, при достаточной гладкости $P(x)$.

По-видимому, теоремы 2', 2'' справедливы не только при условии, что спектр операторов A и B лежит на действительной оси, но и в более общей ситуации. Отметим, что некоторые близкие к тематике статьи вопросы рассмотрены в /9/.

В заключение авторы благодарят И.В.Пузынина за интерес к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ю.А.Далецкий, М.Г.Крейн."Устойчивость решения дифференциальных уравнений в банаховых пространствах". М.,Наука, 1970.
2. Е.П.Жидков, И.В.Пузынин, Б.Н.Хоромский. "Об одном итерационном процессе численного решения интегро-дифференциального уравнения Шредингера". ОИЯИ, Р5-9512 , Дубна, 1976.
3. Я.И.Альбер. "Непрерывные процессы ньютоновского типа". Дифференциальные уравнения. т.VII, 11, 1971.
4. И.Петерсен. "Методы типа Рунге-Кутта для решения нелинейных уравнений в гильбертовом пространстве". Известия АН Эстонской ССР, сер. физ.-мат. и техн. наук, 2, 1963.
5. С.А.Максимов."Стабилизация решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве и некоторые ее приложения". Матем. сборн., т.70(112), 3, 1966.
6. Л.В.Канторович, Г.П.Акилов. "Функциональный анализ в нормированных пространствах", М.Физматгиз, 1959.
7. М.К.Гавурин."Нелинейные функциональные уравнения и непрерывные аналоги итеративных процессов". Известия вузов, математика, № 5, 1958.
8. М.М.Вайнберг. Сиб. матем. журнал, том II,№2,1961.
9. Л.Александров. Совещание по программированию и математическим методам решения физических задач.ОИЯИ, Д10-7707, Дубна, 1973.

Рукопись поступила в издательский отдел
9 марта 1976 года.