СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА

Р5 - 9512

Е.П.Жидков, И.В.Пузынин, Б.Н.Хоромский

ОБ ОДНОМ ИТЕРАЦИОННОМ ПРОЦЕССЕ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА

1976

Р5 - 9512

Е.П.Жидков, И.В.Пузынин, Б.Н.Хоромский

ОБ ОДНОМ ИТЕРАЦИОННОМ ПРОЦЕССЕ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА

1. Постановка задачи

В работе [1] изложен метод численного решения задачи на собственные значения для системы интегро-дифференциальных уравнений, возникающей в теории ядра, который был применен к вычислению формфакторов реакции однонуклонных передач с учетом принципа Паули [2].

Математическая постановка задачи, обсуждаемой в данной работе, формулируется следующим образом. Для системы интегро-дифференциальных уравнений

$$\phi^{(k)}(\lambda, \vec{y}(r)) \equiv \frac{d^2}{dr^2} y_k(r) + \sum_{j=1}^{N} (K_{kj}(r) y_j(r) + \int_0^{\ell} Q_{kj}(r,\xi) y_j(\xi) d\xi) - \lambda y_k(r) = 0, \qquad /1.1/$$

$$0 \le r \le \ell, \quad k = 1, 2, \ldots, N, \quad y_k(0) = y_k(\ell) = 0 \qquad /1.2/$$

с дополнительным условием нормировки

$$\phi^{(N+1)}(\lambda, \vec{y}(r)) \equiv \sum_{j=1}^{N} \int_0^{\ell} y_j^2(r) dr - 1 = 0 \qquad /1.3/$$

требуется вычислить собственное значение λ и соответствующее собственное решение $\vec{y}(r) = (y_1(r), \ldots, y_N(r))$. Предполагается, что решение задачи /1.1/-/1.3/ существует

$$\lambda = \lambda^*, \quad \vec{y}(r) = \vec{y}^*(r), \qquad /1.4/$$

матрица $\{K_{kj}(r)\}$ симметрическая, $Q_{kj}(r,\xi)=Q_{kj}(\xi,r)$ и коэффициенты $K_{kj}(r)$, $Q_{kj}(r,\xi)$ - заданные, достаточно гладкие функции. Задача /1.1/-/1.3/ аппроксимирует задачу для системы интегро-дифференциальных уравнений Шредингера, заданную на полуоси $0\le r<\infty$, причем выбор правой границы ℓ при вычислении конкретного решения /1.4/ может быть осуществлен методом проб в соответствии с общими идеями монографии [3].

Соотношения /1.1/-/1.3/ представляют нелинейное функциональное уравнение

$$\phi(z)=0,$$

$$z=(\lambda,\vec{y}(r))\in R\times L_2^N[0,\ell]=H, \qquad /1.5/$$

$$\phi(z)\equiv\{\phi^{(k)}(z)\},\quad k=1,2,\dots,N+1;\quad \phi: H\to H\times R.$$

Предполагается, что λ^* - изолированное простое собственное значение, а компоненты $y_k^*(r)$ собственной вектор-функции принадлежат банахову пространству B с нормой

$$\|y(r)\|_B=\sum_{n=0}^{2}\max_{0\le r\le\ell}|y^{(n)}(r)|+L_y,$$

где $L_y=\inf\{$ констант Липшица $y^{(n)}(r)\}$. Таким образом, $z^*=(\lambda^*,\vec{y}^*(r))\in R\times B^N=Z$, причем $B^N=Y$. При таких предположениях в работе [1] доказана локальная сходимость итерационного процесса

$$\phi'(\lambda_n,\vec{y}_n)(\mu_n,\vec{v}_n)=-\phi(\lambda_n,\vec{y}_n), \qquad /1.6/$$

$$\vec{y}_{n+1}=\vec{y}_n+\tau\vec{v}_n,\quad \lambda_{n+1}=\lambda_n+\tau\mu_n, \qquad /1.7/$$

/ ϕ' - производная Фреше оператора ϕ /, с заданными начальными условиями $\lambda_0,\vec{y}_0(r)$ в окрестности искомого решения, являющегося дискретным представлением непрерывного ньютоновского процесса на основе метода Эйлера с постоянным шагом интегрирования τ $(0<\tau\le 1)$. Введя операторы

$$D=\frac{d^2}{dr^2}+\sum_{j=1}^{N}K_{kj}(r),\quad S=\sum_{j=1}^{N}\int_0^{\ell}Q_{kj}(r,\xi)(\cdot)d\xi,$$

$$G=D+S$$

и опуская для краткости векторные обозначения, соотношение /1.6/-/1.7/ можно записать в виде

$$(D-\lambda_nE)v_n+Sv_n=-(G-\lambda_nE)y_n+\mu_ny_n,$$
$$/1.8/$$
$$2(y_n,v_n)=-[(y_n,y_n)-1],$$

$$y_{n+1}=y_n+\tau v_n,\quad \lambda_{n+1}=\lambda_n+\tau\mu_n. \qquad /1.9/$$

Решение первого уравнения системы /1.8/ можно представить как сумму

$$v_n=-y_n+\mu_nu_n, \qquad /1.10/$$

где u_n и μ_n находятся из системы

$$(G-\lambda_nE)u_n=y_n,$$
$$/1.11/$$
$$\mu_n=\frac{(y_n,y_n)+1}{2(y_n,u_n)}.$$

Поскольку при $\lambda_n\to\lambda^*$, $\|(G-\lambda_nE)^{-1}\|=|\lambda_n-\lambda^*|^{-1}$, [4] возникает вопрос о возможной потере точности при вычислениях с помощью соотношений /1.11/. В работе [1] показано, что оператор

$$\phi'(\lambda_n,y_n)(\mu,v)=\begin{Bmatrix}(G-\lambda_nE)v-\mu y_n\\ 2(y_n,v)\end{Bmatrix}$$

имеет равномерно ограниченный обратный оператор в окрестности решения (λ^*,y^*). Это означает, что в целом процесс /1.8/-/1.9/ корректен. В п.2 данной работы этот процесс, а также его модификация с помощью дополнительной нормировки волновой вектор-функции на каждом шаге будут исследованы более детально. Заметим, что похожие вопросы, связанные с решением "вырождающихся" уравнений, рассмотрены в работе [5].

При численной реализации процесса /1.11/, /1.10/, /1.9/ на основе метода конечных разностей решение на каждом шаге краевой задачи для системы интегро-дифференциальных уравнений связано с обращением матриц высокого порядка.

В работе [1] предложена и реализована модификация процесса /1.8/, /1.9/, в которой интегральный член Sv_n заменяется на Sv_{n-1}, вычисляемый на предыдущем шаге. Это приводит к тому, что в модифицированном процессе

$$\begin{aligned} &(D-\lambda_n E)v_n = -[(G-\lambda_n E)y_n + Sv_{n-1}] + \mu y_n, \\ &2(y_n, v_n) = -[(y_n, y_n)-1] \end{aligned} \qquad /1.12/$$

на каждом шаге необходимо решать краевую задачу для системы дифференциальных уравнений. В результате приходится оперировать с матрицами трехдиагональной структуры, а поиск решений этой задачи можно осуществить с помощью метода прогонки. В п. 3 настоящей работы рассмотрены локальные условия сходимости процесса /1.12/.

2. *Некоторые особенности реализации вычислительных процессов*

Рассмотрим итерационный процесс /1.11/, /1.10/, /1.9/ при условии, что он сходится, то есть

$$y_n \to y^*, \ \lambda_n \to \lambda^* \qquad \text{при} \quad n \to \infty, \ \|y^*\| = 1.$$

При использовании рассматриваемых соотношений возникает вопрос о возможной потере точности при вычислениях, поскольку в первом уравнении системы /1.11 величина $\|(G-\lambda_n E)^{-1}\| = |\lambda^* - \lambda_n|^{-1}$ неограниченно возрастает. Однако, поскольку правая часть этого уравнения y_n близка к y^*, можно показать, следуя идеям работы [5], что данная вычислительная процедура при правильной организации вычислений не приводит к большой потере знаков.

Обозначим через H_{y^*} ортогональное дополнение элемента y^* в Y. Представим элементы y_n и u_n в первом уравнении системы /1.11/ в виде разложений

$$\left.\begin{aligned} y_n &= a_n y^* + z_n, \\ u_n &= b_n y^* + g_n, \end{aligned}\right\} \quad z_n, g_n \in H_{y^*}. \qquad /2.1/$$

Определим компоненты b_n и g_n, для чего подставим выражение /2.1/ в рассматриваемое уравнение:

$$(G-\lambda_n E)(b_n y^* + g_n) = a_n y^* + z_n$$

или

$$(G-\lambda^* E)g_n + (\lambda^* - \lambda_n)(b_n y^* + g_n) = a_n y^* + z_n.$$

Последнее соотношение равносильно следующим двум:

$$\begin{aligned} &(G-\lambda_n E)g_n = z_n, \\ &(\lambda^* - \lambda_n)b_n y^* = a_n y^*. \end{aligned} \qquad /2.2/$$

Обозначим оператор G, рассматриваемый на $D_G \cap H_{y^*}$, через G^*. Тогда

$$b_n = \frac{a_n}{\lambda^* - \lambda_n}, \quad g_n = (G^* - \lambda_n E)^{-1} z_n \qquad /2.3/$$

и для u_n получим следующее выражение:

$$u_n = \frac{a_n}{\lambda^* - \lambda_n} y^* + (G^* - \lambda_n E)^{-1} z_n. \qquad /2.4/$$

В этом соотношении оператор $G^* - \lambda_n E$ не близок к особенному. Если обозначить через SpG спектр оператора G, то величина $\epsilon_n = \inf\limits_{\lambda \in SpG \setminus \lambda^*} |\lambda - \lambda_n|$ будет большой по сравнению с $|\lambda_n - \lambda^*|$, поскольку λ^*-изолированная точка спектра. При этом имеет место соотношение [4]

$$\|(G^* - \lambda_n E)^{-1}\|_{H_{y^*}} = \epsilon_n^{-1} \le \epsilon_0^{-1}. \qquad /2.5/$$

Таким образом, потеря точности возможна лишь при вычислении скалярной величины b_n в соотношениях /2.3/.

Введем обозначения

$$c_n = a_n^2 + (\lambda^* - \lambda_n)(z_n, (G^* - \lambda_n E)^{-1} z_n),$$
$$d_n = a_n^2 + \|z_n\|^2. \qquad /2.6/$$

Тогда очередной шаг рассматриваемого итерационного процесса осуществляется согласно следующим формулам:

$$\mu_n = (\lambda^* - \lambda_n) d_n c_n^{-1},$$
$$\lambda_{n+1} = \lambda_n + \tau(\lambda^* - \lambda_n) d_n c_n^{-1}, \qquad /2.7/$$
$$y_{n+1} = a_{n+1} y^* + z_{n+1},$$

где

$$a_{n+1} = a_n (1 - \tau + \tau d_n c_n^{-1}), \qquad /2.8/$$

$$z_{n+1} = [(1-\tau)E + \tau(\lambda^* - \lambda_n) d_n c_n^{-1} (G^* - \lambda_n E)^{-1}] z_n.$$

Заметим, что в близкой окрестности искомого решения итерационный процесс реализуется с шагом $\tau = 1$, поэтому вопрос о потере точности рассмотрим при этом значении шага. Тогда

$$a_{n+1} = a_n d_n c_n^{-1},$$

$$z_{n+1} = (\lambda^* - \lambda_n) d_n c_n^{-1} (G^* - \lambda_n E)^{-1} z_n.$$

Легко заметить, что величина a_n с ростом n не убывает, а из последнего соотношения и /2.5/ следует

$$\frac{\|z_{n+1}\|}{\|z_n\|} = |\lambda^* - \lambda_n| O(1).$$

Это означает, что в последовательных приближениях к собственному вектору компонента, ортогональная искомому решению, убывает, тогда как проекция на y^* не убывает. Поскольку коэффициенты a_{n+1} определяются формулой

$$a_{n+1} = \mu_n b_n,$$

а источником погрешности является величина b_n, данная в /2.3/, приведенные рассуждения показывают, что потеря точности в определении величины a_{n+1} приводит лишь к деформациям проекции y_{n+1} на y^*, оставляя норму этой проекции порядка 0(1). Таким образом, сходимость данного процесса означает стремление к нулю компоненты последовательных приближений, ортогональной искомому решению, и неубыванию проекции на собственный вектор, которую достаточно знать с точностью до скаляра.

В работе [1] в итерационный процесс была введена дополнительная нормировка элемента y_n, что, судя по вычислениям, привело к ускорению сходимости процесса. Поэтому рассмотрим итерации, определенные следующими формулами:

$$(G - \lambda_n E) u_n = y_n,$$
$$\tilde{y}_{n+1} = (1-\tau) y_n + \frac{\tau}{(y_n, u_n)} u_n,$$
$$\lambda_{n+1} = \lambda_n + \frac{\tau}{(y_n, u_n)}, \qquad /2.9/$$
$$y_{n+1} = \frac{\tilde{y}_{n+1}}{\|\tilde{y}_{n+1}\|}.$$

При этом в соотношениях /2.6/ $d_n = 1$, а $c_n \le 1$, поскольку $(\lambda^*-\lambda_n)\epsilon_n^{-1} \to 0$ при $\lambda^*-\lambda_n \to 0$ и в силу оценки /2.5/. Далее, из выражений /2.7/, /2.8/ находим $\|\tilde y_{n+1}\|$:

$$\|\tilde y_{n+1}\|^2 = (1-\tau+\tau c_n^{-1})^2 a_n^2 + \|(1-\tau)z_n + \tau(\lambda^*-\lambda_n)c_n^{-1}(G^*-\lambda_n E)^{-1} z_n\|^2.$$

Нормируем $\tilde y_{n+1}$ и покажем, что $a_{n+1} > a_n$ и $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$. Поскольку

$$\|(G^*-\lambda_n E)^{-1} z_n\|^2 \le \epsilon_0^{-2}\|z_n\|^2,$$

а $\|z_n\|^2 = 1-a_n^2$ и $c_n \le 1$, получим для a_{n+1} следующую оценку:

$$a_{n+1}^2 = \frac{a_n^2(1-\tau+\tau c_n^{-1})^2}{\|\tilde y_{n+1}\|^2} \ge$$

$$\ge \frac{a_n^2(1-\tau+\tau c_n^{-1})^2}{a_n^2(1-\tau+c_n^{-1})^2 + \|(1-\tau)E + c_n^{-1}\tau(\lambda^*-\lambda)(G^*-\lambda_n E)^{-1}\|^2(1-a_n^2)} =$$

$$= 1 - \frac{\|(1-\tau)E + c_n^{-1}\tau(\lambda^*-\lambda_n)(G^*-\lambda_n E)^{-1}\|^2(1-a_n^2)}{a_n^2(1-\tau+\tau c_n^{-1})^2 + \|(1-\tau)E + c_n^{-1}\tau(\lambda^*-\lambda_n)(G^*-\lambda_n E)^{-1}\|^2(1-a_n^2)} \ge$$

$$\ge 1 - \frac{(1-\tau+\tau c_n^{-1}|\lambda^*-\lambda_n|\epsilon_0^{-1})^2}{a_n^2 + (1-\tau-\tau c_n^{-1}|\lambda^*-\lambda_n|\epsilon_0^{-1})^2(1-a_n^2)}(1-a_n^2).$$

Окончательно получаем неравенство

$$\frac{(1-\tau+\tau(c_n\epsilon_0)^{-1}|\lambda^*-\lambda_n|)^2}{a_n^2}(1-a_n^2) \ge 1-a_{n+1}^2 \quad /2.10/$$

Далее, имеем

$$\lambda_{n+1} = \lambda_n + \frac{\tau(\lambda^*-\lambda_n)}{a_n^2 + (z_n, (G^*-\lambda_n E)^{-1} z_n)(\lambda^*-\lambda_n)},$$

и, следовательно,

$$\lambda^*-\lambda_{n+1} = (\lambda^*-\lambda_n)\left(1-\frac{\tau}{a_n^2+(z_n,(G^*-\lambda_nE)^{-1}z_n)(\lambda^*-\lambda_n)}\right) \quad /2.11/$$

Обозначим величину в последних скобках соотношения /2.11/ через γ_n, тогда

$$|\gamma_n| \le \left|1-\frac{\tau}{a_n^2+|\lambda^*-\lambda_n|\epsilon_0^{-1}(1-a_n^2)}\right|.$$

Пусть теперь величины λ_0 и a_0, характеризующие начальное приближение итерационного процесса /2.9/, таковы, что

$$\epsilon_0^{-1}|\lambda^*-\lambda_0| < 1, \quad /2.12/$$

$$\frac{[1-\tau+\tau\epsilon_0^{-1}|\lambda^*-\lambda_0|(a_0^2-\epsilon_0^{-1}|\lambda^*-\lambda_0|(1-a_0^2))^{-1}]}{a_0^2} = q_0 < 1. \quad /2.13/$$

Заметим, что последнее выражение представляет оценку коэффициента при $(1-a_n^2)$ в формуле /2.10/, если учесть, что

$$c_n \ge a_n^2 - |\lambda^*-\lambda_n|\epsilon_0^{-1}(1-a_n^2).$$

Теперь из /2.10/ следует, что $a_1^2 > a_0^2$. А поскольку $|\gamma_0| \le |1-\tau(1+\omega)|$ при выполнении /2.12/, причем $\omega > 0$ может быть достаточно мала, то из /2.11/ следует, что

$$|\lambda^*-\lambda_1| \le \gamma_0|\lambda^*-\lambda_0| < |\lambda^*-\lambda_0|.$$

Легко заметить, что соотношения /2.12/, /2.13/ будут справедливы и при всех последующих итерациях. Поэтому для всех n имеет место

$$|\gamma_n| \le |1-\tau(1+\omega)|.$$

Таким образом, справедливы оценки

$$1-a_n^2 \le q_0^n(1-a_0^2),$$

$$|\lambda^*-\lambda_n| \le |1-\tau(1+\omega)|^n |\lambda^*-\lambda_0|.$$

Отсюда следует сходимость последовательных итераций /2.9/, поскольку

$$||y^*-a_n y^*-z_n||^2 = (1-a_n)^2+1-a_n^2 = 2(1-a_n)$$

и $a_n > 0$.

Заметим, что вопрос о точности вычислений при реализации данного процесса можно рассмотреть с помощью рассуждений, аналогичных приведенным выше. Однако в этом случае можно оценить величину погрешности за один шаг. Для простоты ограничимся $\tau = 1$.

Пусть

$$y_n = (a_n+\Delta_n)y^*+z_n, \quad ||z_n||^2+a_n^2 = 1.$$

Аналогично тому, как вычислялась величина a_{n+1}^2, можно определить

$$(a_{n+1}+\Delta_{n+1})^2 =$$

$$= \frac{(a_n+\Delta_n)^2(c_n+\Delta c_n)^{-2}}{(a_n+\Delta_n)^2(c_n+\Delta c_n)^{-2}+(\lambda^*-\lambda_n)^2(c_n+\Delta c_n)^{-2}||(G^*-\lambda_n E)^{-1}z_n||^2}.$$

Далее, выполним следующие оценки:

$$|a_{n+1}^2-(a_{n+1}+\Delta_{n+1})^2| \le \left| \frac{a_n^2}{a_n^2+(\lambda^*-\lambda_n)||(G^*-\lambda_n E)^{-1}z_n||^2} - \right.$$

$$\left. - \frac{(a_n+\Delta_n)^2}{(a_n+\Delta_n)^2+(\lambda^*-\lambda_n)||(G^*-\lambda_n E)^{-1}z_n||^2} \right| \le$$

$$\le \frac{(\lambda^*-\lambda_n)^2 \, |a_n^2||(G^*-\lambda_n E)^{-1}z_n||^2-(a_n+\Delta_n)^2||(G^*-\lambda_n E)^{-1}z_n||^2|}{a_n^2(a_n+\Delta_n)^2} =$$

$$= \frac{(\lambda^*-\lambda_n)^2||(G^*-\lambda_n E)^{-1}z_n||^2(2a_n+\Delta_n)|\Delta_n|}{a_n^2(a_n+\Delta_n)^2}.$$

Таким образом,

$$(2a_{n+1}+\Delta_{n+1})|\Delta_{n+1}| \le \frac{(\lambda^*-\lambda_n)^2||(G^*-\lambda_n E)^{-1}z_n||^2}{a_n^2(a_n+\Delta_n)^2}(2a_n+\Delta_n)|\Delta_n|.$$

Учитывая, что правая часть последнего неравенства мала по сравнению с единицей, получим окончательную оценку

$$|\Delta_{n+1}| \le (\lambda^*-\lambda_n)^2 \epsilon_0^{-2}(1-a_n^2)|\Delta_n|[1+O((\lambda^*-\lambda_n)^2)],$$

которая означает, что ошибка при определении величины a_n на следующем шаге быстро убывает.

Естественно, что все эти рассуждения справедливы только при условии, что вычисления ведутся с высокой точностью.

3. О локальной сходимости процесса /1.12/

Преобразуем /1.12/ к более удобному виду. Определим оператор $\bar{S} \in \{H \to H\}$ так, что $\bar{S}(\lambda, y) = (0, Sy)$. Ясно, что $||\bar{S}|| = ||S||$. Учитывая, что в окрестности решения $z^* = (\lambda^*, y^*)$ существует $\phi'(z_n)^{-1}$, где $z_n = (\lambda_n, y_n)$, получим

$$\tau^{-1}(z_{n+1}-z_n)-\phi'(z_n)^{-1}\bar{S}\tau^{-1}(z_{n+1}-z_n) = -\phi'(z_n)^{-1}(\phi(z_n)+$$

$$+\bar{S}\tau^{-1}(z_n-z_{n-1})). \qquad /3.1/$$

$$(z_{n+1}-z_n) = -[E-\phi'(z_n)^{-1}\bar{S}]^{-1}(\phi'(z_n)^{-1}\phi(z_n)\tau +$$

$$+\phi'(z_n)^{-1}\bar{S}(z_n-z_{n-1})).$$

Обратимость оператора $E - \phi'(z_n)^{-1}\bar{S}$ в некоторой окрестности z^* является необходимым условием осуществимости процесса /1.12/.

Процесс /3.1/ имеет вид

$$z_{n+1} = F(z_n, z_{n-1}), \qquad /3.2/$$

где нелинейный оператор $F: H\times H \to H$ непрерывно дифференцируем по обоим аргументам в окрестности z^*, если $\phi(z)$ дважды непрерывно дифференцируем в этой окрестности. Если в шаре $S_{z^*,r}$ оператор $F(\cdot,\cdot)$ непрерывно дифференцируем по обоим аргументам и $F(z^*, z^*) = z^*$, то в $S_{z^*,r}$ /3.2/ можно представить в виде

$$z_{n+1} - z^* = F_1'(z^*, z^*)(z_n - z^*) + F_2'(z^*, z^*)(z_{n-1} - z^*) + \Psi(z_n, z_{n-1})$$

$$\|\Psi(z_n, z_{n-1})\| \le c_1(z_n, z_{n-1})\|z_n - z^*\| + c_2(z_n, z_{n-1})\|z_{n-1} - z^*\|, \qquad /3.3/$$

$$\lim_{z_i \to z^*} c_i(z_n, z_{n-1}) = 0, \quad i = 1, 2.$$

Здесь $F_1'(\cdot,\cdot)$ и $F_2'(\cdot,\cdot)$ есть производные от F по соответствующим аргументам.

Далее, в произвольном B-пространстве H рассмотрим итерационный процесс при заданных $y_0, y_1 \in H$:

$$y_{n+1} = Ay_n + By_{n-1} + \Phi(y_n, y_{n-1}), \qquad /3.4/$$

где A и B линейные ограниченные операторы из H в H, а Φ - нелинейный оператор, Φ: $H \times H \to H$. Пусть в шаре $\|y_i\| \le r$, $i = 1,2$ Φ обладает свойством

$$\|\Phi(y_n, y_{n-1})\| \le q_1\|y_n\| + q_2\|y_{n-1}\|. \qquad /3.5/$$

Наряду с процессом /3.4/, рассмотрим в H процесс

$$u_{n+1} = Au_n + Bu_{n-1}, \quad u_0, u_1 \text{ - заданы.} \qquad /3.6/$$

Пусть A и B таковы, что существуют M, ϵ, $0 < \epsilon < 1$, такие, что для любых $u_0, u_1 \in H$ имеет место

$$\|u_n\| \le M\epsilon^n(\|u_0\| + \|u_1\|). \qquad /3.7/$$

Заметим, что /3.7/ означает сходимость к нулю последовательности u_n.

Справедлива следующая теорема о локальной сходимости процесса /3.4/ к нулю.

Теорема. Пусть выполнено свойство /3.7/. Тогда для любых M_1, ϵ_1, удовлетворяющих условиям $M_1 > M$, $\epsilon < \epsilon_1 < 1$, существуют достаточно малые $q_1, q_2 > 0$, такие, что если неравенство /3.5/ выполняется с этими q_1, q_2 и

$$\max(\|y_0\|, \|y_1\|) \le \delta = \frac{r}{2M_1 \max(1, \epsilon_1 M)}$$

то для процесса /3.4/ будет справедлива оценка

$$\|y_n\| \le 2M_1\epsilon_1^n \max(\|y_0\|, \|y_1\|)\max(1; \epsilon_1 M).$$

Доказательство этой теоремы основывается на идеях, использованных в [6] при доказательстве аналогичной теоремы об устойчивости нелинейных дифференциальных уравнений в B-пространствах.

Возвратимся к процессу /3.1/. Этот процесс локально сходится, если локально сходится /3.3/. О локальной сходимости /3.3/ можно заключить на основании сформулированной теоремы, если этот процесс удовлетворяет ее условиям. Прежде всего заметим, что константы $q_1 = c_1(z_n, z_{n-1})$ и $q_2 = c_2(z_n, z_{n-1})$, упоминавшиеся в теореме, можно сделать сколь-угодно малыми и тем самым удовлетворить одному из условий теоремы. Теперь рассмотрим условия сходимости линеаризованного процесса, имея в виду удовлетворить условию /3.7/.

Обозначим $\omega_n = z_n - z^*$. Вычислим производную Фреше правой части /3.1/ в точке $\omega = 0$.

Поскольку

$$[\phi'(z)^{-1}\phi(z)]'(z^*) = [E + [\phi'^{-1}(z^*)]'\phi(z^*)] = E,$$

то для линеаризованного уравнения получим выражение

$$u_{n+1} - u_n = -[E - \phi'(z^*)\bar{S}]^{-1}(\tau u + \phi'(z^*)^{-1}\bar{S}(u_n - u_{n-1})).$$

При этом использовались следующие выражения:

$$\frac{d}{dz_n}[\phi'(z_n)^{-1} S(z_n - z_{n-1})](z^*, u_n) =$$

$$= \phi'(z^*)^{-1}\bar{S}u_n + [\phi'(z_n)^{-1}]'\bar{S}(z_n - z_{n-1}, u_n)|_{z_n = z_{n-1} = z^*} =$$

$$= \phi'(z^*)^{-1}\bar{S}u_n,$$

$$\frac{d}{dz_{n-1}}[\phi'(z_n)^{-1}\bar{S}(z_n - z_{n-1})]|_{z_n = z_{n-1} = z^*} u_{n-1} =$$

$$= -\phi'(z^*)^{-1}\bar{S}u_{n-1}.$$

Полагая далее $\phi'(z^*)^{-1}\bar{S} = U, (E-U)^{-1} = T$, получим

$$u_{n+1} - u_n = -[E-U]^{-1}((\tau E + U)u_n - Uu_{n-1}) =$$

$$= [E-U]^{-1}(-(E-U)u_n + (E-U)u_{n-1} +$$

$$+(1+\tau)u_n - u_{n-1}) = u_n - u_{n-1} - [E-U]^{-1}((1+\tau)u_n -$$

$$-u_{n-1}) = (T-E)u_{n-1} - (1+\tau)Tu_n + u_n$$

$$u_{n+1} = (E-T)(u_n - u_{n-1}) + u_n - \tau Tu_n = (2E - T - \tau T)u_n -$$

$$-(E-T)u_{n-1}.$$

Полагая $E - T = A$, окончательно получаем

$$u_{n+1} = ((1-\tau)E + (1+\tau)A)u_n - Au_{n-1}. \qquad /3.8/$$

Найдем ограничения на оператор A, при которых процесс /3.8/ удовлетворяет условию /3.7/.

При некоторых условиях, о которых будет сказано ниже, общее решение /3.8/ имеет вид

$$u_n = \mathcal{E}_1^n e_1 + \mathcal{E}_2^n e_2, \qquad /3.9/$$

где операторы $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$ определяются равенством

$$\mathcal{E}_{1,2} = \frac{(1-\tau)E + (1+\tau)A}{2} \pm \sqrt{\frac{((1-\tau)E + (1+\tau)A)^2}{4} - A},$$

а элементы e_1 и e_2 есть решения системы

$$e_1 + e_2 = u_0$$

$$\mathcal{E}_1 e_1 + \mathcal{E}_2 e_2 = u_1. \qquad /3.10/$$

Таким образом, формула /3.9/ имеет место, по крайней мере, когда $((1-\tau)E + (1+\tau)A)^2 - 4A \ge 0$, и система /3.10/ разрешима для всех u_0, u_1 то есть оператор $\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2$ обратим. Для выполнимости /3.7/ достаточно, чтобы $\|\mathcal{E}_{1,2}\| < 1$.

Исследуем, когда выполняются три перечисленные условия.

1/ $((1-\tau)E + (1+\tau)A)^2 - 4A \ge 0$, отсюда имеем $A \le (\frac{1-\tau}{1+\tau})^2 E$, $A \ge E$, и при этом $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$ существуют.

2/ $-E < \mathcal{E}_1 < E$; это неравенство выполняется при $-E < A < E$.

$-E < \mathcal{E}_2 < E$, откуда получаем $-(\frac{2-\tau}{2+\tau})E < A < E$.

Объединяя 1/ и 2/, получим, что при $-(\frac{1-\tau}{1+\tau})E < A < (\frac{1-\tau}{1+\tau})^2 E$ выполнено $\|\mathcal{E}_{1,2}\| < 1$, так как $\frac{2-\tau}{2+\tau} > (\frac{1-\tau}{1+\tau})$.

Далее, $\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2 = \sqrt{((1-\tau)E + (1+\tau)A)^2 - 4A} \ge \beta E$, $\beta > 0$, если $\|A\| < (\frac{1-\tau}{1+\tau})^2$ поскольку корень из положительного оператора есть обратимый оператор [7]. Итак, если $||A|| < \left(\frac{1-\tau}{1+\tau}\right)^2$, то процесс /3.8/ удовлетворяет условию /3.7/ и поэтому итерации /3.1/ локально сходятся в силу теоремы. Поскольку справедливо соотношение

$$E-(E-U)^{-1} = -U(E-U)^{-1},$$

то окончательное условие сходимости таково:

$$||\phi'(z^*)^{-1}\bar{S}(E-\phi'(z^*)^{-1}\bar{S})^{-1}|| < \left(\frac{1-\tau}{1+\tau}\right)^2.$$

Видно, что этому условию можно удовлетворить за счет малости интегрального оператора. В частности, это условие выполняется, если $||U|| < \frac{\epsilon}{1+\epsilon}$, $\epsilon = \left(\frac{1-\tau}{1+\tau}\right)^2$.

Уменьшение шага τ также улучшает сходимость процесса. Практические расчеты [1,2] показывают, что приведенные ограничения могут быть ослаблены.

Авторы выражают благодарность А.А.Абрамову за полезные обсуждения.

Литература

1. *Ф.А.Гареев и др. Сообщение ОИЯИ, Р4-8751, Дубна, 1975.*
2. *Ф.А.Гареев и др. Препринт ОИЯИ, Р4-9319, Дубна, 1975.*
3. *И.М.Глазман. Прямые методы качественного спектрального анализа сингулярных дифференциальных операторов. М., Физматгиз, 1963.*
4. *Т.Като. Теория возмущений линейных операторов. М., Мир, 1972.*
5. *М.К.Гавурин. Решение "почти-особенных" операторных уравнений. Усп. матем. наук, вып. 5/95/, 1960, 151-154.*
6. *Ю.Л.Далецкий, М.Г.Крейн. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М., Наука, 1970.*
7. *Л.В.Канторович, Г.П.Акилов. Функциональный анализ в нормированных пространствах. М., Физматгиз, 1959.*

Рукопись поступила в издательский отдел 2 февраля 1976 года.