СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р5-95-69

В.М.Лебеденко

О (k, G)-АЛГЕБРАХ

1995

1. Введение

В теоретической физике встречаются алгебры с компактными и изящными соотношениями, которые мы назовем $(k, \mathbf{G})$-алгебрами (определение дано в разделе 2). Наиболее известными среди них являются алгебры Ли группы $SO(3)$ и группы Лоренца, алгебра Гейзенберга, конформная алгебра, супералгебра $sl(2)$ и алгебры Клиффорда.

В настоящей работе будут рассмотрены отдельные семейства $(k, \mathbf{G})$-алгебр. Работа носит обзорный характер и в то же время содержит ряд оригинальных результатов, полученных автором.

2. Обозначения и терминология

Мы пользуемся общепринятыми в алгебре обозначениями и терминологией (см. [1], [2], [3], [4]).

В частности, группоидом будем называть множество с одной бинарной операцией (см. [3], стр.15). Отметим, что $\langle A \rangle$ ($\langle a \rangle$) будет означать линейную оболочку множества A (элемента a).

Определение: Пусть L-алгебра над полем K вида

$$L = \bigoplus_{\alpha \in \mathbf{G}} \langle x_\alpha \rangle,$$

где $\mathbf{G}$ — некоторый абелев группоид (в частности, группа) и

$$x_\alpha \circ x_\beta = k(\alpha, \beta) x_{\alpha + \beta},$$

$$k(\alpha, \beta) \in K, \quad \alpha, \beta, \alpha + \beta \in \mathbf{G}$$

(здесь «$\circ$» — знак мультипликативной операции в L, в частности, «[,]»). В этом случае будем называть L $(k, \mathbf{G})$-алгеброй, а (канонический) базис $\left\{x_\alpha\right\}_{\alpha \in \mathbf{G}}$ —$(k, \mathbf{G})$ — базисом алгебры L.

Рассмотрим примеры $(k, \mathbf{G})$-алгебр.

1) Конформная алгебра, определяемая соотношениями

$$[x_m, x_n] = (m - n) x_{m+n}, \quad m, n \in Z$$

$$(\mathbf{G} = Z, \ \ k(m, n) = m - n, \ \ K = C).$$

Она содержит подалгебру, определяемую теми же соотношениями, но при $m, n \in N(\mathrm{G} = N)$*.

2) Алгебра Ли группы $SO(3)$.

Если обозначить $x = a_\alpha$, $y = a_\beta$, $z = a_\gamma$, где $\{x, y, z\}$ — ее канонический базис, то на множестве $\mathrm{G} = \{\alpha, \beta, \gamma\}$ можно ввести бинарную операцию так:

$$\alpha + \beta = \gamma = \beta + \alpha,$$

$$\alpha + \gamma = \beta = \gamma + \alpha,$$

$$\beta + \gamma = \alpha = \gamma + \beta.$$

Оставшиеся суммы $\alpha + \alpha, \beta + \beta, \gamma + \gamma$ можно определить произвольно.

3. (k, G)-алгебры Ли.

3.1. Основные соотношения.

Пусть G — абелева полугруппа (в частности, группа) и L — (k, G) — алгебры Ли, т.е.

$$L = \bigoplus_{\alpha \in \mathrm{G}} \langle x_\alpha \rangle,$$

$$[x_\alpha, x_\beta] = k(\alpha, \beta) x_{\alpha + \beta}.$$

Тогда из антисимметричности коммутаторов и из тождества Якоби вытекают соотношения для L:

$$k(\beta, \alpha) = -k(\alpha, \beta), \tag{1}$$

$$k(\beta, \gamma) k(\alpha, \beta + \gamma) = k(\alpha, \beta) k(\alpha + \beta, \gamma) + k(\alpha, \gamma) k(\beta, \alpha + \gamma),$$

$$\alpha, \beta, \gamma \in \mathrm{G}. \tag{2}$$

Если полугруппа G содержит нейтральный элемент — $o (o \in \mathrm{G})$, то для любых элементов β и γ из G, в силу соотношений (2) (полагая $\alpha = o$) получаем соотношение

* Такими соотношениями определяется, например, алгебра операторов $e_n = -x^{n+1} \frac{d}{dx}$ $(n = 1, 2, \ldots)$

$$k(\beta, \gamma)(k(o, \beta + \gamma) - k(o, \beta) - k(o, \gamma)) = 0. \tag{3}$$

В дальнейшем мы увидим, что уравнение (2) имеет много дискретных решений разных типов, и обозреть все его решения нам пока не представляется возможным. Однако для отдельных случаев такие результаты получены ([5], [6]). В работе [5] классифицированы все (k, G)-алгебры, где $\mathrm{G} = N$, с двумя образующими над полями нулевой характеристики.

В работе [6] получена классификация всех аналитических (по двум переменным) из C^n решений уравнения (2).

3.2. ε-алгебры.

(k, G)-алгебру Ли L назовем ε-алгеброй, если $k(\alpha, \beta) = 0$, тогда и только тогда, когда

$$\alpha = \beta. \tag{4}$$

Алгебры, приведенные в разделе 2 (см. пример 1), являются алгебрами ε-типа. Сюда можно добавить и алгебры типа $L_K(\mathrm{G})$. Это введенные нами алгебры Ли, определяемые соотношениями

$$[x_\alpha, x_\beta] = (\alpha - \beta) x_{\alpha + \beta} \quad (\text{или} \quad [y_\alpha, y_\beta] = (\beta - \alpha) y_{\alpha + \beta}), \quad \alpha, \beta \in \mathrm{G},$$

где G — полугруппа (группа), содержащаяся в аддитивной группе поля K. Таким образом, конформная алгебра и ее подалгебра (см. пример 1 в разделе 2) являются соответственно, алгебрами $L_C(Z)$ и $L_C(N)$.

Для ε-алгебр при $o \in \mathrm{G}$ соотношения (3) принимают вид:

$$k(o, \beta + \gamma) = k(o, \beta) + k(o, \gamma) \tag{5}$$

для любых β и γ из $\mathrm{G} (\beta \neq \gamma)$. В частности, $k(o, s) = 0$ только при $s = o$. То есть отображение $\alpha \to k(o, \alpha)$ — «частичный» гомоморфизм полугруппы G в аддитивную группу поля K. На самом деле, как нами показано, это отображение — обычный («полный») изоморфизм (то есть, соотношения (5) выполняются и при $\beta = \gamma$, см. [3]).

Приведем сильную формулировку этого утверждения для того случая, когда G — группа, и ослабленную (ввиду технических сложностей) для случая произвольной абелевой полугруппы G, не являющейся группой, и соответствующие обоснования.

Теорема 1.

Если алгебра Ли

$$L = \bigoplus_{\alpha \in \mathrm{G}} \langle x_\alpha \rangle, \quad \dim L > 3 \quad (\approx |\mathrm{G}| > 3)$$

является ε-алгеброй:

$$[x_\alpha, x_\beta] = k(\alpha,\beta)x_{\alpha+\beta}, \quad \alpha,\beta \in \mathbf{G}, \ o \in \mathbf{G},$$

то отображение является изоморфизмом, если

1) **G** является группой;

2) если **G** — полугруппа и оно взаимно однозначно $(o \in \mathbf{G})$.

Доказательство.

Рассмотрим соотношения:

$$k(o, 2x+y) = k(o,2x) + k(o,y) = k(o, x+(x+y)) =$$

$$= k(o,x) + k(o,x+y) = (k(o,x) + k(o,x)) + k(o,y).$$

Они (в силу свойств $k(\alpha,\beta)$) заведомо выполняются, если $o \neq y \neq 2x$, $x \neq x+y$, $x \neq y$ $(x, y \in \mathbf{G})$. Если **G** — группа, то при $y \neq 0$ уже $x \neq x+y$. Но если **G** — лишь полугруппа, то при $x \neq y$ в силу соотношений (4)

$$k(o, x+y) = k(o,x) + k(o,y) \neq k(o,x)$$

т.к. $k(o,y) \neq 0$. Поэтому $x \neq x+y$ (иначе $k(o,x) = k(o,x+y)$). Для произвольного $x \in \mathbf{G}(x \neq o)$ если только **G** кроме элементов o, x, $2x$ содержит хотя бы один элемент y, а это заведомо выполняется, если $dim L > 3$. Наши выкладки подходят и для того случая, когда **G** — полугруппа.

Теперь мы уже доказали, что отображение $\alpha \to k(o,\alpha)$ — гомоморфизм (в обоих случаях). Для случая, когда **G** — абелева группа, вопрос решается просто (см. [3]): $\alpha \to k(o,\alpha)$ — изоморфизм (т.е. гомоморфизм с нулевым ядром). Но для случая произвольной абелевой полугруппы **G** из наших рассуждений непосредственно не вытекает взаимная однозначность отображения $\alpha \to k(o,\alpha)$. Однако, если заранее известно, что отображение $\alpha \to k(o,\alpha)$ взаимно однозначно, то и тут мы получаем требуемое утверждение. Теорема доказана.

Замечание.

Требование того, что полугруппа (группа) **G** должна состоять более чем из трех элементов, существенно. Так, если группа $\mathbf{G} = Z_3 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}\}$, а поле $K = R$, то можно определить трехмерную алгебру Ли L следующим образом:

$$[x_{\bar{0}}, x_{\bar{1}}] = -2x_{\bar{1}}$$

$$[x_{\bar{0}}, x_{\bar{2}}] = 2x_{\bar{2}}$$

$$[x_{\bar{1}}, x_{\bar{2}}] = x_{\bar{0}}$$

Мы получили Z_3-интерпретацию расщепляемой трехмерной простой алгебры (см. [2], стр 23). Тут $k(\bar{1},\bar{2}) = 1$, $k(\bar{0},\bar{1}) = -2$, $k(\bar{0},\bar{0}) = 0$, $k(\bar{0},\bar{2}) = 2$.

Множество {-2, 0, 2} замкнуто относительно сложения разных его элементов. Здесь отображение $\alpha \to k(0,\alpha)$ — «частичный» изоморфизм:

$$k(\bar{0},\bar{0}) = 0$$

$$k(\bar{0},\bar{1}) = -2$$

$$k(\bar{0},\bar{2}) = 2$$

$$k(\bar{0}, \bar{1}+\bar{2}) = k(\bar{0},\bar{0}) = 0 \quad (\bar{2} = -\bar{1} \text{ в } Z_3)$$

Но («полным») изоморфизмом оно не является, так как поле R не содержит ненулевого элемента a, для которого $3a = 0$, но $3\cdot\bar{1} = \bar{0}$ в Z_3.

Аналогично можно поступить и с абелевой группой Z_2. Тут получается Z_2— интерпретация неабелевой двумерной алгебры $([a, b] = b)$.

Рассмотрим еще примеры.

Это введенные нами алгебры типа $L_K^\phi(\mathbf{G})$, т.е. алгебры, определяемые коммутационными соотношениями типа

$$[x_\alpha, x_\beta] = (\phi(\alpha) - \phi(\beta))x_{\alpha+\beta}, \quad \alpha,\beta \in \mathbf{G} \tag{6}$$

где **G** — некоторая полугруппа (группа), φ — некоторый гомоморфизм (изоморфизм) из **G** в аддитивную группу поля K, $k(\alpha,\beta) = \varphi(\alpha) - \varphi(\beta)$, $(= \varphi(\alpha-\beta)$ если **G** — группа). Алгебра $L_K^\varphi(\mathbf{G})$ является ε-алгеброй только тогда, когда φ — изоморфизм.

ε-алгебры не исчерпываются $L_K^\varphi(\mathbf{G})$-алгебрами (при $o \in \mathbf{G}$). Это подтверждает следующий пример:

$$\mathbf{G} = Z \oplus Z \ni \alpha_i = (n_i, m_i), \quad (K = R)$$

$$k(\alpha_1,\alpha_2) = \sqrt{2}(n_1 - n_2) + \sqrt{3}(m_1 - m_2) + n_1 m_2 - n_2 m_1.$$

Укажем одно полученное нами условие, гарантирующее принадлежность некоторой ε-алгебры Ли к семейству $L_K^\varphi(\mathbf{G})$-алгебр (в случае, когда **G** — группа):

$$k(\alpha+\gamma,\beta) = k(\alpha,\beta-\gamma)$$

для любых $\alpha,\beta,\gamma \in \mathbf{G}$. Одно из общих свойств ε-алгебр отражает

Теорема 2.

Если $(k, \mathbf{G})$-алгебра Ли L является ε-алгеброй, характеристика поля K не равна двум, и **G** — группа, то алгебра L — проста (то есть не имеет собственных идеалов).

Доказательство.

Пусть L — такая алгебра и H — ее идеал. В силу теоремы 1 группа $\mathbf{G}$ изоморфна некоторой подгруппе аддитивной группы поля K. Поэтому, так как по условию характеристика поля K не равна двум, то для любого элемента $\alpha \in \mathbf{G}$, $2\alpha \neq 0$. Пусть теперь некоторый элемент $x \in H$

$$x = lx_0 + \sum_{i=1}^{n} l_i x_{\alpha_i} \quad (l_i \neq 0,\ i = 1, 2, \ldots, n)\,.$$

Тогда все элементы $x_{\alpha_i} \in H$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Действительно, действуя на x элементом $x_0([x_0, x], [x_0, [x_0, x], \ldots$ и т.д.), мы получаем, что H, как идеал L, содержит все элементы вида

$$\sum_{i=1}^{n} l_i(k(0, \alpha_i))^s x_{\alpha_i} \quad (s = 1, 2, \ldots, n-1).$$

Так как тут отображение $\alpha \to k(0, \alpha)$ — изоморфизм (см. теорему 1), то коэффициенты $k(0, \alpha_i)$ попарно различны. Отсюда вытекает, ввиду свойств определителя Вандермонда, что все элементы x_{α_i} $(i = 1, 2, \ldots, n)$ содержатся в H.

Так как $x_{\alpha_1} \in H$ и $\alpha_1 \neq -\alpha_1$ (поскольку $2\alpha_1 \neq 0$), то $x_0 \in H$, ввиду того, что

$$[x_{-\alpha_1}, x_{\alpha_1}] = k(-\alpha_1, \alpha_1)x_0 \in H \quad \text{и} \quad k(-\alpha_1, \alpha_1) \neq 0$$

Аналогично получаем, что все элементы вида

$$x_{\alpha_1 + s} \in H,\ s \neq \alpha_1,\ s \in \mathbf{G}.$$

Это — все элементы базиса $L = \{x_t\}_{t \in \mathbf{G}}$ кроме (может быть) $x_{2\alpha_1}$. Покажем, что и $x_{2\alpha_1} \in H$. По тем же причинам, что и $2\alpha_1 \neq 0$, получаем, что $4\alpha_1 \neq 0$, т.е. $-\alpha_1 \neq 3\alpha$. Далее, так как $x_{3\alpha_1} \in H$, то и

$$[x_{-\alpha_1}, x_{3\alpha_1}] = k(-\alpha_1, 3\alpha_1)x_{2\alpha_1} \in H,$$

$$(k(-\alpha_1, 3\alpha_1) \neq 0), \quad \text{т.е.} \quad x_{2\alpha_1} \in H.$$

А отсюда уже вытекает, что $H = L$. Теорема доказана.

Отметим еще одно свойство ε-алгебр. Пусть L — такая алгебра и $\mathbf{G}$ — группа. Алгебра L порождается какими-то своими двумя элементами тогда и только тогда, когда $\mathbf{G}$ — группа с конечным числом образующих.

Укажем некоторые реализации алгебр типа $L_K^{\varphi}(\mathbf{G})$.

Если $\mathbf{G}$ — числовая полугруппа ($\mathbf{G} \subseteq R$ или $\mathbf{G} \subseteq C$) и $L = L_K^{\varphi}(\mathbf{G})$ ($K = R$ или $K = C$, φ — изоморфизм) $V = \bigoplus_{\alpha \in \mathbf{G}} \langle e^{\varphi(\alpha)t} \rangle (t \in K)$, то пространство V является алгеброй Ли, изоморфной L, относительно операции $[u, v] = \dot{u}v - u\dot{v}$.

Если полугруппа $\mathbf{G}$ не вложима в C, то мы предлагаем более абстрактные реализации для алгебр $L_K^{\varphi}(\mathbf{G})$. Пусть A — групповая алгебра KG (см. [7], стр. 15), т.е.

$$A = \bigoplus_{\alpha \in \mathbf{G}} \langle a_\alpha \rangle,$$

$$a_\alpha \cdot a_\beta = a_{\alpha+\beta}, \quad \alpha, \beta \in \mathbf{G}.$$

Легко проверить, что здесь операция $\dot{a}_\alpha = \varphi(\alpha)a_\alpha$ является дифференцированием. Аналогично предыдущему случаю определим коммутатор:

$$[a_\alpha, a_\beta] = \dot{a}_\alpha \cdot a_\beta - a_\alpha \cdot \dot{a}_\beta = (\varphi(\alpha) - \varphi(\beta))a_{\alpha+\beta}\,.$$

В связи с этим отметим, что тот же результат можно интерпретировать как «лиевизацию» неассоциативной алгебры с операцией, определяемой соотношениями:

$$a_\alpha \circ a_\beta = \varphi(\alpha)a_{\alpha+\beta} \quad (\alpha, \beta \in \mathbf{G})$$

3.3. О линейных представлениях алгебр $L_K^{\varphi}(\mathbf{G})$.

Приведем серию T_α^r линейных представлений произвольной алгебры $L_K^{\varphi}(\mathbf{G})$ в абстрактном пространстве $V = \bigoplus_{\alpha \in \mathbf{G}} \langle e_\alpha \rangle$:

$$T_\alpha^r(e_s) = (\varphi(s + \alpha) + r)e_{s+\alpha}, \quad s, \alpha \in \mathbf{G}, \quad r \in K$$

(r — параметр представления). Если φ — изоморфизм, то это представление точное, а в случае, когда $\mathbf{G}$ — группа и неприводимое (обоснования аналогичны доказательству теоремы 2).

3.4. δ-алгебры.

δ-алгебрами мы называем такие $(k, \mathbf{G})$-алгебры Ли, для которых функции $k(\alpha, \beta)$ представимы в виде разности

$$k(\alpha, \beta) = \delta(\alpha) - \delta(\beta), \quad \alpha, \beta \in \mathbf{G}$$

Сюда, в частности, относятся все алгебры типа $L_K^{\varphi}(\mathbf{G})$ (см. раздел 3.2). Приведем пример другого рода. Пусть $\mathbf{G}$ — некоторая конечная абелева группа (например, подгруппа группы подстановок) и σ — ее гомоморфизм в подгруппу $\{-1, 1\}$ мультипликативной группы поля K (для случая группы подстановок $\sigma(\alpha) = 1$ для четных и $\sigma(\alpha) = -1$ для нечетных подстановок). Тогда соотношения

$$[x_\alpha, x_\beta] = (\sigma(\alpha) - \sigma(\beta))x_{\alpha+\beta}; \quad \alpha, \beta \in \mathbf{G} \tag{7}$$

определяют δ-алгебру конечной размерности ($= |\mathbf{G}|$).

Для произвольных δ-алгебр из соотношений (2) вытекают такие соотношения:

$$\delta(\alpha+\beta)(\delta(\alpha) - \delta(\beta)) + \delta(\beta+\gamma)(\delta(\beta) - \delta(\gamma)) + \delta(\gamma+\alpha)(\delta(\gamma) - \delta(\alpha)) = 0 \tag{8}$$

Сразу видны такие простые случаи:

a) $\delta(\alpha+\beta) \equiv \text{const}$;

b) $\delta(\alpha+\beta) = \delta(\alpha) + \delta(\beta)$ —

Эти условия определяют $L_K^{\varphi}(\mathbf{G})$-алгебры ($\varphi(s) = \delta(s)$).

Обобщая соотношение (7), получаем условия

$$\text{c)} \quad \delta(s+t) = \delta(s)\delta(t) \tag{9}$$

Для этого случая из уравнения (8) получаем соотношения

$$\delta^2(\alpha)(\delta(\beta) - \delta(\gamma)) + \delta^2(\beta)(\delta(\gamma) - \delta(\alpha)) + \delta^2(\gamma)(\delta(\alpha) - \delta(\beta)) = 0 \tag{10}$$

Теорема 3.

Если $(k, \mathbf{G})$-алгебра L является δ-алгеброй, удовлетворяющей условию (9), то либо $\delta^2 \equiv 1$ (т.е. $\delta = \pm 1$), либо $\delta^2 = \delta$ ($\delta = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$).

Доказательство.

Сразу видно, что указанные случаи дают решения уравнения (10). Теперь, пусть $\delta(\alpha)$ — решение уравнения (10) и среди его значений есть ноль:

$\delta(\alpha) = 0, \delta(\beta) = a, \delta(\gamma) = a^2 (\gamma = 2\beta)$. Подставляя эти выражения в уравнения (10), получаем соотношение $a^2(1-a) = a$. Отсюда вытекает, что $a = 0$ или $a = 1$. Аналогично поступим в том случае, когда среди значений $\delta(t)$

нет нулей. Полагая $\delta(\alpha) = a, \delta(\beta) = a^2, \delta(\gamma) = a^3$ ($\beta = 2\alpha, \gamma = 3\alpha$) и подставляя эти выражения в уравнения (10), получим, что

$$a^4(1-a)(1-a^2)(1-a) = 0.$$

Отсюда (т.к. $a \neq 0$) вытекает, что $a = \pm 1$. Теорема доказана.

Теперь рассмотрим ряд примеров.

Пример к случаю a) ($\delta(\alpha+\beta) \equiv c$).

Пусть $\mathbf{G} = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \gamma\}$ ($n \geq 2$. $\alpha_i + \alpha_j = \gamma, \alpha_i + \gamma = \gamma = \gamma + \alpha_i$, $\gamma + \gamma = \gamma$. Это абелева полугруппа. Если считать $\delta(\alpha_i) = 1$, $i = 1, \ldots, n$, а $\delta(\gamma) = c$ ($c \neq 1$), то положим

$$L = \bigoplus_{t \in \mathbf{G}} \langle x_t \rangle, \ [x_s, x_t] = (\delta(s) - \delta(t))x_{s+t}, \quad s, t \in \mathbf{G}.$$

Тогда $[x_{\alpha_i}, x_{\alpha_j}] = 0$, $[x_{\alpha_i}, x_\gamma] = (1-c)x_\gamma$, $[x_\gamma, x_\gamma] = 0$.

Это разрешимая ступени 2 алгебра Ли.

Пример к случаю c) ($\delta(s+t) = \delta(s)\,\delta(t)$).

Пусть $L = \bigoplus_{\alpha \in \mathbf{G}} \langle x_\alpha \rangle$, где $\mathbf{G}$ — абелева полугруппа и

$$[x_\alpha, x_\beta] = (\delta(\alpha) - \delta(\beta))x_{\alpha+\beta}$$

$$\delta(s+t) = \delta(s)\delta(t) \quad (s, t \in \mathbf{G}), \quad \delta = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}.$$

Тогда $\mathbf{G} = \mathbf{G}_0 \cup \mathbf{G}_1$ и $\delta(s) = 0$ на $\mathbf{G}_0$, а на $\mathbf{G}_1$ $\delta(s) = 1$, $\mathbf{G}_0$ и $\mathbf{G}_1$ — подполугруппы $\mathbf{G}$, причем $\mathbf{G}_0$ — ее идеал. Соответственно $\bigoplus_{\alpha \in \mathbf{G}_0} \langle x_\alpha \rangle$ и $\bigoplus_{\alpha \in \mathbf{G}_1} \langle x_\alpha \rangle$ абелевы подалгебры L и $\bigoplus_{\alpha \in \mathbf{G}_0} \langle x_\alpha \rangle$ — идеал L. Т.е. L — разрешимая ступени 2 δ-алгебра Ли.

Приведем пример полугруппы указанного типа. Пусть A — произвольная абелева полугруппа,

$$\mathbf{G}_0 = \{a_s\}_{s \in A} \quad \text{и} \quad \mathbf{G}_1 = \{b_s\}_{s \in A}.$$

Положим $\mathbf{G} = C_0 \cup C_1$ и что $a_s + a_t = a_{s+t}$, $b_s + b_t = b_{s+t}$, $a_s + b_t = a_{s+t}$ ($s, t \in A$).

Пример к случаю $\delta(\alpha+\beta) = \delta(\alpha)\cdot\delta(\beta)$, $\delta(s) = \begin{cases} -1 \\ 1 \end{cases}$, ($s, t \in \mathbf{G}$)..

Здесь $\mathbf{G} = \mathbf{G}_{-1} \cup \mathbf{G}_1$, где $\delta(s)$ на $\mathbf{G}_{-1}$ принимает одно значение: $\delta(s) = -1$, а на $\mathbf{G}_1 - \delta(s) = 1$. Поэтому $\mathbf{G}_{-1} + \mathbf{G}_{-1} \subseteq \mathbf{G}_1$, $\mathbf{G}_1 + \mathbf{G}_1 \subseteq \mathbf{G}_1$, $\mathbf{G}_1 + \mathbf{G}_{-1} \subseteq \mathbf{G}_{-1}$.

Если $L = \bigoplus_{\alpha \in \mathbf{G}} \langle x_\alpha \rangle$, то при $L_1 = \bigoplus_{\alpha \in \mathbf{G}_1} \langle x_\alpha \rangle$, $L_{-1} = \bigoplus_{\alpha \in \mathbf{G}_{-1}} \langle x_\alpha \rangle$

$$[L_1, L_1] = [L_{-1}, L_{-1}] = 0, \quad [L_1, L_{-1}] \subseteq L_{-1}$$

т.е. L_{-1} — абелев идеал L и L — разрешимая (ступени 2) δ-алгебра. В некоторых исследованиях может быть полезен следующий найденный нами критерий:

Функция $P(\alpha, \beta)(\mathbf{G}\times\mathbf{G} \to K)$ представима в виде разности

$$P(\alpha, \beta) = q(\alpha) - q(\beta) \quad (q(s)\colon \mathbf{G} \to K)$$

тогда и только тогда, когда

$$P(\alpha, \beta) + P(\beta, \gamma) = P(\alpha, \gamma)$$

для любых $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{G}$.

3.5. B и $\varphi + B$-алгебры.

Если $B(\alpha, \beta)(\mathbf{G} \times \mathbf{G} \to K)$ — кососимметрическая билинейная форма на $\mathbf{G}$ (в дискретном смысле: $B(\alpha + \beta, \gamma) = B(\alpha, \gamma) + B(\beta, \gamma)$), то соотношения типа:

$$[x_\alpha, x_\beta] = B(\alpha, \beta)x_{\alpha+\beta}, \quad \alpha, \beta \in \mathbf{G}$$

определяют алгебры Ли. Например, $\mathbf{G} = Z \oplus Z \ni \alpha = (n, m)$ для соотношения

$$[x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}] = (n_1 m_2 - n_2 m_1)x_{\alpha_1 + \alpha_2}$$

задают одну из алгебр Каца—Муди. Если $\Psi_1(s)$ и $\Psi_2(t)$ — два линейно независимых гомоморфизма $\mathbf{G} \to K$, то, аналогично, соотношения

$$[x_\alpha, x_\beta] = (\Psi_1(\alpha)\Psi_2(\beta) - \Psi_1(\beta)\Psi_2(\alpha))x_{\alpha+\beta}$$

задают алгебру Ли.

Если φ — гомоморфизм $\mathbf{G} \to K$, то в ряде случаев соотношения

$$[x_\alpha, x_\beta] = (\varphi(\alpha) - \varphi(\beta) + B(\alpha, \beta))x_{\alpha+\beta}$$

задают алгебру Ли (см. пример в разделе 3.2).

В работе [6] получена классификация всех аналитических по двум переменным из C^n решений уравнения (2). Эти результаты можно интерпретировать как описание всех $(k, \mathbf{G})$-алгебр с $\mathbf{G} = C^n$ и $k(\alpha, \beta)$ из указанного класса функций.

В результате этого исследования получилось два семейства (k, C)-алгебр. В одном случае

$$k(\alpha, \beta) = \varphi(\alpha - \beta) + B(\alpha, \beta) \text{ —}$$

— функции полиномиального типа при любом $n \geq 2$. В частности, при $n = 2$

$$k(\alpha, \beta) = l_1(x_1 - y_1) + l_2(x_2 - y_2) + l_3(x_1 y_2 - x_2 y_1),$$

где $\alpha = (x_1, y_1), \beta = (x_2, y_2), x_s, y_s, l_s \in C$.

В другом случае

$$k(\alpha, \beta) = e^{B(\alpha, \beta)} - e^{B(\beta, \alpha)},$$

где $\alpha, \beta \in C^n$.

3..6. «$\lambda(\alpha, \beta) - \lambda(\beta, \alpha)$»-алгебры.

Если некоторая ассоциативная алгебра задается соотношениями

$a_\alpha \cdot a_\beta = \lambda(\alpha, \beta)a_{\alpha+\beta}, \quad \alpha, \beta \in \mathbf{G}$

то

$$[x_\alpha, x_\beta] = (\lambda(\alpha, \beta) - \lambda(\beta, \alpha))x_{\alpha+\beta}, \quad \alpha, \beta \in \mathbf{G}$$

— коммутационные соотношения для некоторой алгебры Ли, в частности, если

$$\lambda(\alpha + \beta, \gamma) = \lambda(\alpha, \gamma)\cdot(\beta, \gamma),$$

$$\lambda(\alpha, \beta + \gamma) = \lambda(\alpha, \beta)\lambda(\alpha, \gamma), \quad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{G}$$

(см. предыдущий раздел).

3.7. «Частичный» подход.

Соотношения (2) можно рассматривать только для попарно различных элементов $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{G}$ (соответственно, $\mathbf{G}$ — «частичная» полугруппа).

Проиллюстрируем сказанное на примере алгебры Ли группы $SO(3)$—

$$[x, y] = z, \ [y, z] = x, \ [z, x] = y$$

Пусть $A = (\langle a \rangle \oplus \langle b \rangle)\backslash\{0\}$, где $\langle a \rangle \oplus \langle b \rangle \cong Z_2 \oplus Z_2$, $2a = 2b = 0$. Положим $\alpha = a, \beta = b, \gamma = a + b$. Тогда

$$\alpha + \beta = \gamma$$

$$\alpha + \gamma = \beta$$

$$\beta + \gamma = \alpha$$

и рассматриваемая алгебра задается такими соотношениями:

$$[x_s, x_t] = k(s, t)x_{s+t} \quad (k(s, t) = \pm 1), \quad s, t \in A, s \neq t$$

Можно рассматривать δ-алгебры с «частичными» полугруппами в качестве индексов. В частности, если $\delta(\alpha + \beta) = \delta(\alpha) + \delta(\beta)$ $(\alpha \neq \beta)$ и $\delta(t)$ принимает только конечное число значений, то все они содержатся в некотором множестве типа $\{-c,0,c\}$ $(c \in K)$, если K — поле характеристики ноль.

3.8 Z_2- и другие расширения.

Пусть L — $(k,\mathbf{G})$-алгебра Ли с $k = k(\alpha, \beta)$, $[x_\alpha, x_\beta] = k(\alpha, \beta)x_{\alpha+\beta}$. Построим новую алгебру $\hat{L}$ — Z_2— расширение L, вводя такие соотношения:

$$\hat{L} = ((\bigoplus_{\alpha \in \mathbf{G}} \langle x_\alpha \rangle) \oplus (\bigoplus_{\alpha \in \mathbf{G}} \langle y_\alpha \rangle))$$

$$[x_\alpha, x_\beta] = k(\alpha, \beta)x_{\alpha+\beta}$$

$$[x_\alpha, y_\beta] = k(\alpha, \beta)y_{\alpha+\beta}$$

$$[y_\alpha, y_\beta] = k(\alpha, \beta)x_{\alpha+\beta}$$

$$[x_\alpha, y_\alpha] = 0, \quad (\alpha, \beta \in \mathbf{G})$$

Можно рассматривать соотношения этого типа в «частичном» смысле (см. раздел 3.7)

Можно рассматривать и другой вариант Z_2-расширения вида:

$$[x_\alpha, x_\beta] = k(\alpha, \beta)x_{\alpha+\beta}$$

$$[y_\alpha, y_\beta] = -k(\alpha, \beta)x_{\alpha+\beta}$$

$$[x_\alpha, y_\beta] = k(\alpha, \beta)y_{\alpha+\beta}$$

$$[x_\alpha, y_\alpha] = 0, \quad (\alpha, \beta \in \mathbf{G})$$

как в «полном», так и в «частичном» смысле. В качестве важного примера приведем (см. раздел 3.7) $(Z_2 + Z_2)\backslash\{0\}$-интерпретацию алгебры Ли группы Лоренца, коммутационные соотношения которой в табличном виде приведены в работе [8]. Алгебра Ли группы Лоренца является $(k, \mathbf{G})$-алгеброй. Воспользуемся $(Z_2 \oplus Z_2)\backslash\{0\}$-параметризацией («частичной») алгебры Ли группы $SO(3)$:

$$[x_s, x_t] = k(s, t)x_{s+t}, \quad s, t \in (Z_2 \oplus Z_2)\backslash\{0\},$$

$$s \neq t, \quad (Z_2 \oplus Z_2)\backslash\{0\} = \{\alpha, \beta, \gamma\} = A$$

Соотношения для алгебры Ли группы Лоренца можно (в частичном виде) интерпретировать так: $L = \langle x_\alpha \rangle \oplus \langle x_\beta \rangle \oplus \langle x_\gamma \rangle \oplus \langle y_\alpha \rangle \oplus \langle y_\beta \rangle \oplus \langle y_\gamma \rangle$

$$[x_s, x_t] = k(s, t)x_{s+t} \quad (s \neq t)$$

$$[y_s, y_t] = -k(s, t)x_{s+t} \quad (s \neq t)$$

$$[x_s, y_t] = k(s, t)y_{s+t} \quad (s \neq t)$$

$$[x_s, y_s] = 0, \quad s, t \in A.$$

Конструкция Z_2-расширения $(k, \mathbf{G})$-алгебр (как в полном, так и в «частичном» смысле) допускает обобщения на случай произвольной абелевой полугруппы A (вместо $Z_2 \to A$) следующим образом:

Пусть $(k, \mathbf{G})$-алгебра Ли L задается соотношением

$$[x_\alpha, x_\beta] = k(\alpha, \beta)x_{\alpha+\beta}, \quad \alpha, \beta \in \mathbf{G}$$

и A — некоторая абелева полугруппа. Тогда в качестве A-расширения L можно рассматривать новую алгебру (A, L), определяемую соотношениями типа:

$$(A, L) = \bigoplus_{\substack{\alpha \in \mathbf{G} \\ s \in A}} \langle x_\alpha^{(s)} \rangle, \quad [x_\alpha^{(s)}, x_\beta^{(t)}] = k(\alpha, \beta)x_{\alpha+\beta}^{(s+t)} \quad (\alpha, \beta \in \mathbf{G}, \; s, t \in A).$$

3.9 Другие типы $(k, \mathbf{G})$-алгебр Ли.

1) PR-алгебры (см. [9], [10], [11]). Каждая такая алгебра L задается соотношениями типа

$$L = (\bigoplus_{\alpha \in H} \langle a_\alpha \rangle) \oplus (\bigoplus_{s \in M} \langle b_s \rangle)$$

$$[a_\alpha, a_\beta] = 0 = [b_s, b_t]$$

$$[a_\alpha, b_s] = r(\alpha, s)a_\alpha, \quad \alpha, \beta \in H, \; s, t \in M \quad (r(\alpha, s) \not\equiv 0)$$

(где H и M конечны). Каждая неабелева подалгебра PR-алгебры — сама является PR-алгеброй (см. [10]). Все PR-алгебры являются разрешимыми ступени 2.

2) Алгебра Гейзенберга и ее обобщения.

Классическая алгебра Гейзенберга задается соотношениями:

$$[a, b] = c, \quad [a, c] = 0 = [b, c]$$

Это нильпотентная алгебра. Простейшие обобщения этой алгебры задаются так:

$$L = \langle a_1, a_2, \ldots, a_n, c \rangle, \quad n \geq 2$$

$$[a_i, a_j] = k_{ij} c, \quad [a_s, c] = 0, \quad (c, c) = 0$$

Это тоже нильпотентные алгебры. Алгебра Гейзенберга допускает еще и такие обобщения:

$$L = \langle a_1, a_2, \ldots, a_n, l_1, l_2, \ldots, l_m \rangle$$

$$[a_i, a_j] = k_{ij} l_{ij}, \quad \text{где} \quad l_{ij} \in \{l_1, l_2, \ldots, l_m\}$$

$$[a_s, l_t] = 0, \quad 1 \leq s \leq n, \quad 1 \leq t \leq m$$

Заметим, что все указанные алгебры (наряду с алгеброй Ли группы $SO(3)$) обладают следующими свойствами:

$$[P_1, [P_2, P_3]] = 0 \tag{11}$$

если среди P_i (элементов (k, G)-базиса) нет одинаковых элементов. Алгебры с такими свойствами мы называем вырожденными,

3) Вырожденные алгебры.

Вырожденными (k, G)-алгебрами мы называем алгебры Ли со свойством (11). Как уже было отмечено в предыдущем разделе, алгебра Ли группы $SO(3)$ и обобщенные алгебры Гейзенберга являются вырожденными алгебрами. Кроме этого — всевозможные их прямые суммы также являются вырожденными. Всевозможные прямые суммы этих алгебр, абелевых алгебр и нескольких алгебр типа двумерной неабелевой алгебры ($[a, b] = b$) являются вырожденными.

У нас есть предложение, что класс конечномерных вырожденных алгебр исчерпывается указанными алгебрами.

4. Супералгебры (k, G)-типа (см. [4]).

В этом разделе мы ограничимся пока лишь примерами.

1) Четырехмерная супералгебра (k, G)-типа:

$$[b, b] = a_1, \quad [a_1, b] = 0, \quad [a, b] = b_1$$

$$[a_1, a] = 2a, \quad [a, b_1] = 0, \quad [b_1, b_1] = 0,$$

$$[b, b_1] = -a$$

(см. [12]). Это разрешимая (ступени 2) супералгебра. Заметим, что она порождается двумя однородными элементами a и b. Более того. она порождается и одним неоднородным элементом $g = a + b$.

2) Пятимерная биспинорная супералгебра $sl(2)$ является (k, G)-алгеброй. Эта простая алгебра Ли с каноническим базисом $\{l, f, h, x, y\}$ задается соотношениями:

$$[h, l] = 2l, \quad [l, f] = h, \quad [h, f] = 2f$$

$$[h, x] = x, \quad [x, x] = l, \quad [h, y] = y$$

$$[y, y] = f, \quad [f, x] = y, \quad [h, y] = \frac{1}{2} h,$$

$$[l, y] = 0, \quad [l, x] = 0$$

Эта алгебра порождается одним неоднородным элементом $g = t + x$ (см. [12]).

3) Шестимерная (k, G)-супералгебра (см. [12]):

$$[b, b] = a_1, \quad [a_2, b] = b_1, \quad [b_1, b_1] = x$$

$$[a_2, b_1] = y, \quad [a_1, b] = 0, \quad [a_1, a_2] = 2a_2$$

$$[a_1, b_1] = 2b_1, \quad [b, b_1] = -a_2$$

$$[x, x] = [x, y] = [y, y] = 0$$

$$[a_2, x] = [a_2, y] = 0, \quad [b_1, x] = [b_1, y] = 0$$

$$[b, x] = -2y, \quad [b, y] = -x, \quad [a_1, x] = -4x$$

$$[a_1, y] = 4y, \quad [a_2, x] = [a_2, y] = 0, \quad [b_1, x] = [b_1, y] = 0,$$

$$[b, x] = -2y, \quad [b, y] = -x, \quad [a_1, x] = -4x, \quad [a_1, y] = 4y$$

Это разрешимая ступени 4 $(k,\ \mathbf{G})$-супералгебра Ли и порождается одним элементом $g = a_2 + b$

4) Семейство разрешимых ступени 3 супералгебр Ли (см. [12]).
Каждая алгебра этого семейства задается соотношениями

$$[b, b] = a, \quad [a, b] = 0$$

$$[\alpha_i, b] = \beta_i, \quad (i = 1, \dots, n)$$

$$[a, \alpha_i] = \alpha_{i+1} \quad (i \leq n-1)$$

$$[a, a_n] = q\alpha_1 \quad (q \neq 0)$$

$$[b, \beta_i] = -2^{-1}\alpha_{i+1} \quad (i \leq n-1)$$

$$[a\beta_n] = q\beta_1$$

$$[b, b_n] = -2^{-1}q\beta_1$$

$$[\alpha_i, \alpha_j] = [\beta_i, \beta_j] = [\alpha_i, \beta_j] = 0 \quad (i, j \leq n)$$

(q — параметр семейства).

Здесь в качестве образующего элемента можно взять элемент $\alpha_1 + b$.

5. Об ассоциативных $(k,\ \mathbf{G})$-алгебрах.

Ассоциативные $(k,\ \mathbf{G})$-алгебры задаются соотношениями:

$$X(\alpha)\cdot X(\beta) = \lambda(\alpha, \beta)X(\alpha + \beta) \tag{12}$$

где $\mathbf{G}$ — полугруппа (группа). Тут структурные константы $\lambda(\alpha, \beta)$, в силу ассоциативности, удовлетворяют уравнению

$$\lambda(\alpha, \beta)\cdot\lambda(\alpha + \beta, \gamma) = \lambda(\alpha, \beta + \gamma)\lambda(\beta, \gamma) \quad (\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{G}). \tag{13}$$

Ниже мы приведем описание всех ассоциативных $(k,\ \mathbf{G})$-алгебр, для которых $\mathbf{G}$ — конечная абелева группа и $\lambda(\alpha, \beta) \neq 0$, полученное нами в работе [13]. В частности, для алгебр Клиффорда K_n мы приведем полученную нами $Z_2 \oplus Z_2 \oplus \dots \oplus Z_2$-параметризацию ($\mathbf{G} = Z_2 \oplus Z_2 \oplus \dots \oplus Z_2$).

Пусть $K_n (n \geq 2)$ — алгебра Клиффорда с каноническими образующими $e_1, e_2, \dots, e_n$ $(K = C)$.

$$e_j^2 = 1 \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

$$e_j \cdot e_k = -e_k e_j \quad (k \neq j)$$

Здесь в качестве группы $\mathbf{G}$ мы возьмем прямую сумму

$$\underbrace{Z_2 \oplus Z_2 \oplus \dots \oplus Z_2}_{n} \quad (Z_2 = \{\bar{0}, \bar{1}\}, \bar{0} + \bar{0} = \bar{0},\ \bar{0} + \bar{1} = \bar{1},\ \bar{1} + \bar{1} = \bar{0})$$

Естественным образом сопоставляя базисным элементам K_n элементы $X(\alpha)$, где α — n-мерный вектор с компонентами $\bar{0}$ или $\bar{1}$ из Z_2: например, $e_1 \cdot e_2 \cdot e_5 = X(\bar{1}, \bar{1}, \bar{0}, \bar{0}, \bar{1}, \bar{0}, \bar{0},)$ $(n = 7)$ и т.п. Очевидно, что для любых α и β из $\mathbf{G}$

$$X(\alpha)\cdot X(\beta) = \lambda(\alpha, \beta)X(\alpha + \beta) = \pm X(\alpha + \beta) \quad (\lambda(\alpha, \beta) = \pm 1)$$

Выпишем выражение $\lambda(\alpha, \beta)$ в явном виде:

$$\lambda(\alpha, \beta) = (-1)^{(\sigma(\alpha),\, \gamma(\beta))}$$

Здесь $(\sigma(\alpha), \gamma(\beta))$ — билинейная форма вида

$$\sigma_1(\alpha)\,\gamma_1(\beta) + \sigma_2(\alpha)\,\gamma_2(\beta) + \dots + \sigma_{n-1}\gamma_{n-1}(\beta).$$

где $\gamma_r(\beta)$ — компонента вектора β с номером r, $Z_2\sigma_m(\alpha)$, — сумма всех компонент (из Z_2) вектора α стоящих за его компонентой с номером m. Мы полагаем

$$(-1)^{\bar{0}} = 1, \quad (-1)^{\bar{1}} = -1$$

Рассмотрим общий случай. Пусть $\mathbf{G}$ — некоторая конечная абелева группа, тогда (см. [3]) $\mathbf{G} = \bigoplus\limits_{i=1} \langle \alpha_i \rangle$ — прямая сумма q циклических подгрупп и ее можно отождествить с совокупностью всех векторов

$$\alpha = (n_1, n_2, \dots, n_q), \ n_i \in Z, \ 0 \leq n_i \leq r_i \ (r_i \text{ — порядок подгруппы } \langle \alpha_i \rangle)$$

по компонентным (по модулю r_i) сложением.

Если L — ассоциативная $(k,\ \mathbf{G})$-алгебра и

$$L = \bigoplus_{\alpha \in \mathbf{G}} \langle X(\alpha) \rangle \ (K = C, X(0) = 1)$$

то (с точностью до нормирования элементов базиса) при

$$\alpha = (n_1, n_2, \dots, n_q), \ \ \beta = (m_1, m_2, \dots, m_q)$$

$$X(\alpha)\cdot X(\beta) = \lambda(\alpha, \beta)X(\alpha + \beta)$$

где

$$\lambda(\alpha, \beta) = \prod_{1 \le k < l \le q} (\lambda_{k,l}^{m_k n_l})$$

при

$$X_l \cdot X_k = \lambda_{k,l} X_k \cdot X_l, \ \lambda_{k,l}^{r_k} = \lambda_{k,l}^{r_l} = 1, \ X_s = X(\alpha_s) \ (s = 1, 2, \dots, q) .$$

Каждая такая алгебра обладает свойством:

$$\lambda(s + t, n) = \lambda(s, n) \cdot \lambda(t, n)$$

$$\lambda(v, s + t) = \lambda(v, s) \cdot \lambda(v, t)$$

Метод доказательства этого утверждения переносится на тот случай, когда группа G является произвольной прямой суммой циклических групп.

В заключение укажем некоторые (k, G)-ассоциативные алгебры близкого типа. Это — алгебры колчанов (см. [7]) (отличие заключается в некоммутативности G) и групповые алгебры — $K\mathrm{G}$ (для них $k(\alpha, \beta)$, см. [7]), которым посвящена широко развитая и глубокая теория.

Автор выражает глубокую признательность всем коллегам, принявшим участие в обсуждении этой работы.

Литература

1. Ван дер Варден Б.Л. — Алгебра. М.: Наука, 1976.
2. Джекобсон Н. — Алгебры Ли, М.: Мир, 1964.
3. Курош А.Г. — Теория групп, М.: Наука, 1970.
4. Scheunert M. — Theory of Superalgebras, Springer-Verlag, Berlin — Heidelberg — New York, 1978.
5. Фиаловски А. — О классификации градуированных алгебр Ли с двумя образующими, Вестник МГУ, серия 1. Математика, механика, №2, 1983, с.62-64.
6. Якжев А.В. — Об одном функциональном уравнении теоретической физики. Функциональный анализ и его приложения, 1982, т.16, вып.1, с.49—57.
7. Пирс Р. — Ассоциативные алгебры, М.: Мир, 1986.
8. Наймарк М.Н. — Линейные представления группы Лоренца, М.: Физматгиз, 1958.
9. Лебеденко В.М. — О *PR*-алгебрах. Р5-11595, Дубна, 1978.
10. Лебеденко В.М. — О подалгебрах *PR*-алгебр. Р5-11706, Дубна, 1978

11. Лебеденко В.М. — О принадлежности к классам *PR*-групп и *PR*-алгебр. Р5-11415, Дубна, 1978.
12. Лебеденко В.М. — Супералгебры с одним образующим элементом. Р5-87-462, Дубна, 1987.
    — Current analysis and its applications, 223(1989), 99-107, Naukova Dumka, Kiev.
13. Лебеденко В.М. — Градуированные ассоциативные алгебры близкие к алгебрам Клиффорда и их обобщениям. Р5-93-252, Дубна, 1993.

Рукопись поступила в издательский отдел
20 февраля 1995 года.

Лебеденко В.М. P5-95-69
О (k, G)-алгебрах

Рассматриваются алгебры (над полем K), обладающие очень простыми определяющими соотношениями, называемые автором (k, G)-алгебрами. Характерный пример дают известные соотношения:

$$[x_n, x_m] = (n - m)x_{n+m} \quad (n, m \in Z).$$

В общем случае всякая (k, G)-алгебра имеет такой базис $\{a_s\}_{s \in G}$, что произведение (в частности, коммутатор) любых его двух элементов a_α и a_β, $\alpha, \beta \in G$, равно ka_ν $(k \in K, \nu \in G)$. Если G — группа или полугруппа, то $k = k\ (\alpha, \beta)$, и можно записать это произведение в виде $k(\alpha, \beta)x_{\alpha+\beta}$. Для алгебр Ли такая запись выглядит так:

$$[x_\alpha, x_\beta] = k\,(\alpha, \beta)x_{\alpha+\beta} \quad (\alpha, \beta \in G).$$

Указываются некоторые семейства (k, G)-алгебр и приводятся некоторые свойства их представителей.

Наряду с обзорной частью и обобщениями, наблюдениями автора, работа содержит ряд его оригинальных результатов.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики им. Н.Н.Боголюбова ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна, 1994

Перевод автора

Lebedenko V.M. P5-95-69
About (k, G)-Algebras

The algebras (over field K) with very simple defining relations called by the author (k, G)-algebras are considered. A typical example is illustrated by the known relations:

$$[x_n, x_m] = (n - m)x_{n+m} \quad (n, m \in Z).$$

In the general case, every (k, G)-algebra has such a basis that a product (in particular, a commutator) of any of its two elements a_α and a_β, $\alpha, \beta \in G$, is equal to ka_ν $(k \in K, \nu \in G)$. If G is a group or a semigroup, then $k = k(\alpha, \beta)$, and this product can be written in the form $k(\alpha, \beta)x_{\alpha+\beta}$. For Lie algebras, this can be written as follows:

$$[x_\alpha, x_\beta] = k(\alpha, \beta)x_{\alpha+\beta} \quad (\alpha, \beta \in G).$$

Some families of (k, G)-algebras are pointed out and certain characteristics of their representatives are given. Together with a review part and generalizations by the author, the paper contains a number of original results.

The investigation has been performed at the Bogoliubov Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna, 1994