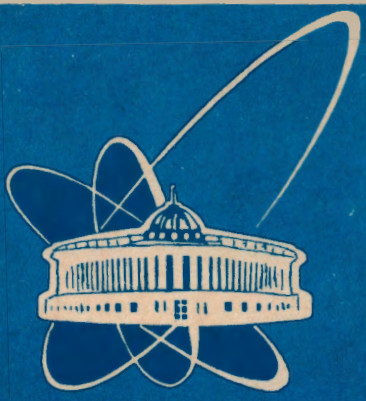


95-508



ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

95-508

P5-95-508

М.А.Назаренко

КОМПЛЕКСНЫЙ ВАРИАНТ
ТЕОРЕМЫ ВАЛЛЕ ПУССЕНА

Направлено в журнал «Математические заметки»

1995

В 1910 году Валле Пуссен (La Vallée Poussin) в работе [1] доказал следующую теорему об оценке снизу величины равномерного отклонения рациональной функции, степень числителя и знаменателя которой не превосходят n :

если последовательность точек $\{x_j\}$, $j = 0, 1, \dots, n+1$, из замкнутого множества $W \in [a, b]$ образует альтернанс, то для наилучшего приближения функции f полиномами вида

$$P_n(x) = \sum_{j=0}^n c_j s_j(x),$$

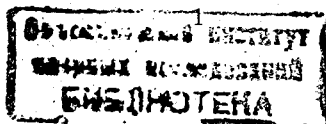
где множество функций $\{s_j\}$, $j = 0, 1, \dots, n$, образует систему Чебышева, верна оценка

$$e_n(f) = \inf_{c_j} \sup_{x \in W} \left| f(x) - \sum_{j=0}^n c_j s_j(x) \right| \geq \min_{0 \leq j \leq n+1} \left| f(x_j) - P_n(x_j) \right|.$$

По теореме Чебышева равенство достигается тогда и только тогда, когда P_n — полином наилучшего приближения. Вскоре появились различные обобщения этого утверждения, которые можно найти например в монографии [2] и для некоторых банаховых пространств в обзоре [3]. Обобщенная теорема Валле Пуссена об оценке снизу величины равномерного отклонения рациональной функции, степень числителя и знаменателя которой не превосходят n , можно найти, например, в книге [4]. Некоторые комплексные обобщения этой теоремы (для непрерывных комплекснозначных функций комплексного переменного) были доказаны А. Л. Левиным в работе [5] и использованы для решения обратной задачи теории равномерных рациональных аппроксимаций А. А. Пекарским в работе [6]. В работе [7] автором использовался комплексный вариант теоремы Валле Пуссена, доказательство которого приведено в этой работе.

ТЕОРЕМА. Пусть существуют числа $\{y_k\}_{k=1}^{2n+2}$, $|y_k| = 1$, $0 < \arg y_1 < \arg y_2 < \dots < \arg y_{2n+2} < 2\pi$, а также $\{\eta_k\}_{k=1}^{2n+2}$, причем $\operatorname{Im} \eta_k \cdot \operatorname{Im} \eta_{k+1} < 0$, $k = 1, 2, \dots, 2n+1$. Тогда для любой рациональной функции R степени не выше n выполняется неравенство

$$\max_{1 \leq k \leq 2n+2} |\eta_k - R(y_k)| \geq \min_{1 \leq k \leq 2n+2} |\operatorname{Im} \eta_k|.$$



Доказательство будем вести методом "от противного". Предположим, что существует такая рациональная функция R степени не выше n , что выполнено следующее неравенство:

$$\max_{1 \leq k \leq 2n+2} |\eta_k - R(y_k)| < \min_{1 \leq k \leq 2n+2} |\operatorname{Im} \eta_k|.$$

Так как рациональные функции степени не выше n инвариантны относительно дробно-линейной замены координат, произведем такую, чтобы образы точек y_k , $k = 1, 2, \dots, 2n+2$, которые обозначим соответственно ψ_k , были расположены на отрезке $[-1, 1]$, где образ функции R , который обозначим \hat{R} , является рациональной функцией степени не выше n и непрерывной на этом отрезке. Получаем следующее неравенство для образов

$$\max_{1 \leq k \leq 2n+2} |\eta_k - \hat{R}(\psi_k)| < \min_{1 \leq k \leq 2n+2} |\operatorname{Im} \eta_k|.$$

Отдельно рассмотрим мнимую часть каждого числа, стоящего под знаком максимума и модуля, что дает следующее соотношение

$$\max_{1 \leq k \leq 2n+2} |\operatorname{Im} \eta_k - \operatorname{Im} \hat{R}(\psi_k)| < \min_{1 \leq k \leq 2n+2} |\operatorname{Im} \eta_k|. \quad (1)$$

Полученное неравенство является своего рода классическим при доказательстве теоремы Валле Пуссена, следствием из которого, как и положено, будет утверждение о количестве нулей функции $\operatorname{Im} \hat{R}$ на отрезке $[-1, 1]$.

Итак, в силу неравенства (1), мы имеем соотношения

$$\operatorname{Im} \hat{R}(\psi_k) \cdot \operatorname{Im} \hat{R}(\psi_k) < 0, \quad k = 1, 2, \dots, 2n+1,$$

то есть функция $\operatorname{Im} \hat{R}$ имеет на отрезке $[-1, 1]$ не менее, чем $2n+1$ нулей. Осталось воспользоваться тем, что исходная функция \hat{R} была рациональной степени не выше n , то есть представима в виде отношения двух полиномов, степень каждого из которых не превосходит n :

$$\hat{R}(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}, \quad x \in [-1, 1], \quad Q(x) \neq 0.$$

Учитывая неединственность такого представления, воспользуемся следующим видом знаменателя Q :

$$Q(x) = \prod_{j=1}^n (1 - q_j x), \quad q_j \in \mathbb{C} \setminus \{(-\infty, -1] \cup [1, \infty)\}.$$

Вообще говоря, все нули знаменателя (и числа q_j соответственно) могут иметь ненулевое значение мнимой части. Введем обозначение сопряженного многочлена

$$Q^*(x) = \prod_{j=1}^n (1 - \bar{q}_j x), \quad x \in [-1, 1], \quad Q^*(x) \neq 0.$$

нули которого комплексно сопряжены к нулям знаменателя Q .

Домножим и разделим рациональную функцию \hat{R} на многочлен Q^* . В результате получим следующие выражения:

$$\hat{R}(x) = \frac{P(x) \cdot Q^*(x)}{\prod_{j=1}^n |1 - q_j x|^2}.$$

$$\operatorname{Im} \hat{R}(x) = \frac{\operatorname{Im} \{P(x) \cdot Q^*(x)\}}{\prod_{j=1}^n |1 - q_j x|^2}.$$

В числителе стоит многочлен степени не выше $2n$ с вещественными коэффициентами, который, согласно неравенству (1) имеет на отрезке $[-1, 1]$ не менее чем $2n+1$ нулей. Полученное противоречие полностью доказывает теорему.

Следствие. Пусть функция f непрерывна на единичной окружности $\{|z| = 1\}$ комплексной плоскости, существуют такие числа $\{y_k\}_{k=1}^{2n+2}$, $|y_k| = 1$, $0 < \arg y_1 < \arg y_2 < \dots < \arg y_{2n+2} < 2\pi$, что $\operatorname{Im} f(y_k) \cdot \operatorname{Im} f(y_{k+1}) < 0$, $k = 1, 2, \dots, 2n+1$. Тогда для любой рациональной функции R степени не выше n выполняется неравенство

$$\|f - R\| = \max_{|z|=1} |f(z) - R(z)| \geq \min_{1 \leq k \leq 2n+2} |\operatorname{Im} f(y_k)|.$$

Доказательство. Несложно заметить выполнение следующего неравенства

$$\max_{|z|=1} |f(z) - R(z)| \geq \max_{1 \leq k \leq 2n+2} |f(y_k) - R(y_k)|,$$

так как все рассматриваемые точки y_k лежат на единичной окружности комплексной плоскости. Полагая значения чисел $\eta_k = f(y_k)$, $k = 1, 2, \dots, 2n + 2$ и используя теорему, получаем доказательство следствия.

Автор выражает благодарность профессору В. Г. Зинову за дружеские и стимулирующие дискуссии, а также профессору МГУ Е. П. Долженко и доценту МГУ Н. С. Вячеславу за поддержку работы по данной тематике.

ЛИТЕРАТУРА

1. La Vallée Poussin, Sur le polynômes d'approximation et la représentation approchée d'un angle // Bul. Ac. Belgique 1910.
2. Бернштейн С. Н., Экстремальные свойства полиномов. Л.-М., 1937.
3. Гаркави А. Л., в сб.: Итоги науки. Математический анализ. 1967, М., 1969. С. 75-132.
4. Ахизер Н. И., Лекции по теории аппроксимаций. М.: "Наука", 1965. С. 63-64.
5. Левин А. Л., Приближение рациональными функциями в комплексной плоскости // Матем. заметки 1971. 9. 121-130.
6. Пекарский А. А., Существование функции с заданными наилучшими равномерными рациональными приближениями // Известия АН Белоруссии 1994. 1, С. 23-26.
7. Назаренко М. А., Существование функции с заданными рациональными приближениями в пространстве AC // Препринт ОИЯИ, P5-95-494, Дубна, 1994.

Рукопись поступила в издательский отдел
8 декабря 1995 года.

Назаренко М.А.

P5-95-508

Комплексный вариант теоремы Валье Пуссена

В случае непрерывных на единичной окружности $\{|z|=1\}$ функций комплексного переменного доказан аналог известной теоремы Валье Пуссена об оценке снизу величины равномерного отклонения рациональной функции, степень числителя и знаменателя которой не превосходит n .

Работа выполнена в Лаборатории ядерных проблем ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна, 1995

Nazarenko M.A.

P5-95-508

Complex Variant of La Vallée Poussin Theorem

In the case of continuous on the unit circle $\{|z|=1\}$ functions of complex value the analog of well-known La Vallée Poussin theorem about the lower bound of their rational function uniform deviation value, when numerator and denominator degree are not greater than n , is proved.

The investigation has been performed at the Laboratory of Nuclear Problems, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna, 1995