ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р5-95-508

М.А.Назаренко

КОМПЛЕКСНЫЙ ВАРИАНТ ТЕОРЕМЫ ВАЛЛЕ ПУССЕНА

Направлено в журнал «Математические заметки»

1995

В 1910 году Валле Пуссен (La Vallée Poussin) в работе [1] доказал следующую теорему об оценке снизу величины равномерного уклонения рациональной функции, степень числителя и знаменателя которой не превосходят n:

если последовательность точек $\{x_j\}$, $j = 0, 1, \ldots, n+1$, *из замкнутого множества* $\mathcal{W} \in [a, b]$ *образует альтернанс, то для наилучшего приближения функции* f *полиномами вида*

$$P_n(x) = \sum_{j=0}^{n} c_j\, s_j(x),$$

где множество функций $\{s_j\}$, $j = 0, 1, \ldots, n$, *образует систему Чебышева, верна оценка*

$$\mathrm{e}_n(f) = \inf_{c_j} \sup_{x \in \mathcal{W}} \Big| f(x) - \sum_{j=0}^{n} c_j\, s_j(x) \Big| \geq \min_{0 \leq j \leq n+1} \Big| f(x_j) - P_n(x_j) \Big|.$$

По теореме Чебышева равенство достигается тогда и только тогда, когда P_n — полином наилучшего приближения. Вскоре появились различные обобщения этого утверждения, которые можно найти например в монографии [2] и для некоторых банаховых пространств в обзоре [3]. Обобщенная теорема Валле Пуссена об ценке снизу величины равномерного уклонения рациональной функции, степень числителя и знаменателя которой не превосходят n, можно найти, например, в книге [4]. Некоторые комплексные обобщения этой теоремы (для непрерывных комплекснозначных функций комплексного переменного) были доказаны А. Л. Левиным в работе [5] и использованы для решения обратной задачи теории равномерных рациональных аппроксимаций А. А. Пекарским в работе [6]. В работе [7] автором использовался комплексный вариант теоремы Валле Пуссена, доказательство которого приведено в этой работе.

Теорема. *Пусть существуют числа* $\{y_k\}_{k=1}^{2n+2}$, $|y_k| = 1$, $0 < \arg y_1 < \arg y_2 < \ldots < \arg y_{2n+2} < 2\pi$, *а также* $\{\eta_k\}_{k=1}^{2n+2}$, *причем* $\operatorname{Im} \eta_k \cdot \operatorname{Im} \eta_{k+1} < 0$, $k = 1, 2, \ldots, 2n+1$. *Тогда для любой рациональной функции* R *степени не выше* n *выполняется неравенство*

$$\max_{1 \leq k \leq 2n+2} |\eta_k - R(y_k)| \geq \min_{1 \leq k \leq 2n+2} |\operatorname{Im} \eta_k|.$$

Доказательство будем вести методом "от противного". Предположим, что существует такая рациональная функция R степени не выше n, что выполнено следующее неравенство:

$$\max_{1\le k\le 2n+2} |\eta_k - R(y_k)| < \min_{1\le k\le 2n+2} |\operatorname{Im} \eta_k|.$$

Так как рациональные функции степени не выше n инвариантны относительно дробно–линейной замены координат, произведем такую, чтобы образы точек y_k, $k = 1, 2, \ldots, 2n+2$, которые обозначим соответственно ψ_k, были расположены на отрезке $[-1, 1]$, где образ функции R, который обозначим $\hat{R}$, является рациональной функцией степени не выше n и непрерывной на этом отрезке. Получаем следующее неравенство для образов

$$\max_{1\le k\le 2n+2} |\eta_k - \hat{R}(\psi_k)| < \min_{1\le k\le 2n+2} |\operatorname{Im} \eta_k|.$$

Отдельно рассмотрим мнимую часть каждого числа, стоящего под знаком максимума и модуля, что дает следующее соотношение

$$\max_{1\le k\le 2n+2} |\operatorname{Im} \eta_k - \operatorname{Im} \hat{R}(\psi_k)| < \min_{1\le k\le 2n+2} |\operatorname{Im} \eta_k|. \tag{1}$$

Полученное неравенство является своего рода классическим при доказательстве теоремы Валле Пуссена, следствием из которого, как и положено, будет утверждение о количестве нулей функции $\operatorname{Im} \hat{R}$ на отрезке $[-1, 1]$.

Итак, в силу неравенства (1), мы имеем соотношения

$$\operatorname{Im} \hat{R}(\psi_k) \cdot \operatorname{Im} \hat{R}(\psi_k) < 0, \qquad k = 1, 2, \ldots, 2n+1,$$

то есть функция $\operatorname{Im} \hat{R}$ имеет на отрезке $[-1, 1]$ не менее, чем $2n+1$ нулей. Осталось воспользоваться тем, что исходная функция $\hat{R}$ была рациональной степени не выше n, то есть представима в виде отношения двух полиномов, степень каждого из которых не превосходит n:

$$\hat{R}(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}, \qquad x \in [-1, 1], \quad Q(x) \neq 0.$$

Учитывая неединственность такого представления, воспользуемся следующим видом знаменателя Q:

$$Q(x) = \prod_{j=1}^{n} (1 - q_j x), \qquad q_j \in \mathbf{C} \setminus \Big\{(-\infty, -1] \bigcup [1, \infty)\Big\}.$$

Вообще говоря, все нули знаменателя (и числа q_j соответственно) могут иметь ненулевое значение мнимой части. Введем обозначение сопряженного многочлена

$$Q^*(x) = \prod_{j=1}^{n} (1 - \overline{q_j}\, x), \qquad x \in [-1, 1], \quad Q^*(x) \neq 0.$$

нули которого комплексно сопряжены к нулям знаменателя Q.

Домножим и разделим рациональную функцию $\hat{R}$ на многочлен Q^*. В результате получим следующие выражения:

$$\hat{R}(x) = \frac{P(x) \cdot Q^*(x)}{\prod_{j=1}^{n} |1 - q_j x|^2}.$$

$$\operatorname{Im} \hat{R}(x) = \frac{\operatorname{Im} \Big\{P(x) \cdot Q^*(x)\Big\}}{\prod_{j=1}^{n} |1 - q_j x|^2}.$$

В числителе стоит многочлен степени не выше $2n$ с вещественными коэффициентами, который, согласно неравенству (1) имеет на отрезке $[-1, 1]$ не менее чем $2n+1$ нулей. Полученное противоречие полностью доказывает теорему.

Следствие. *Пусть функция f непрерывна на единичной окружности $\{|z| = 1\}$ комплексной плоскости, существуют такие числа $\{y_k\}_{k=1}^{2n+2}$, $|y_k| = 1$, $0 < \arg y_1 < \arg y_2 < \ldots < \arg y_{2n+2} < 2\pi$, что $\operatorname{Im} f(y_k) \cdot \operatorname{Im} f(y_{k+1}) < 0$, $k = 1, 2, \ldots, 2n+1$. Тогда для любой рациональной функции R степени не выше n выполняется неравенство*

$$\|f - R\| = \max_{|z|=1} |f(z) - R(z)| \ge \min_{1\le k\le 2n+2} |\operatorname{Im} f(y_k)|.$$

Доказательство. Несложно заметить выполнение следующего неравенства

$$\max_{|z|=1} |f(z) - R(z)| \ge \max_{1\le k\le 2n+2} |f(y_k) - R(y_k)|,$$

так как все рассматриваемые точки y_k лежат на единичной окружности комплексной плоскости. Полагая значения чисел $\eta_k = f(y_k)$, $k = 1, 2, \ldots, 2n+2$ и используя теорему, получаем доказательство следствия.

Автор выражает благодарность профессору В. Г. Зинову за дружеские и стимулирующие дискуссии, а также профессору МГУ Е. П. Долженко и доценту МГУ Н. С. Вячеславову за поддержку работы по данной тематике.

ЛИТЕРАТУРА

1. La Vallée Poussin, Sur le polynômes d'approximation et la représentation approchée d'un angle // Bul. Ac. Belgique 1910.
2. Бернштейн С. Н., Экстремальные свойства полиномов. Л.-М., 1937.
3. Гаркави А. Л., в сб.: Итоги науки. Математический анализ. 1967, М., 1969. С. 75–132.
4. Ахиезер Н. И., Лекции по теории аппроксимаций. М.: "Наука", 1965. С. 63–64.
5. Левин А. Л., Приближение рациональными функциями в комплексной плоскости // Матем. заметки 1971. **9**. 121–130.
6. Пекарский А. А., Существование функции с заданными наилучшими равномерными рациональными приближениями // Известия АН Белоруссии 1994. **1**, С. 23–26.
7. Назаренко М. А., Существование функции с заданными рациональными приближениями в пространстве AC // Препринт ОИЯИ, Р5-95-494, Дубна, 1994.

Рукопись поступила в издательский отдел
8 декабря 1995 года.

Назаренко М.А. Р5-95-508
Комплексный вариант теоремы Валле Пуссена

В случае непрерывных на единичной окружности $\{|z| = 1\}$ функций комплексного переменного доказан аналог известной теоремы Валле Пуссена об оценке снизу величины равномерного уклонения рациональной функции, степень числителя и знаменателя которой не превосходит n.

Работа выполнена в Лаборатории ядерных проблем ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна, 1995

Nazarenko M.A. P5-95-508
Complex Variant of La Vallee Poussin Theorem

In the case of continuous on the unit circle $\{|z| = 1\}$ functions of complex value the analog of well-known La Vallee Poussin theorem about the lower bound of ther rational function uniform deviation value, when numerator and denominator degree are not greater than n, is proved.

The investigation has been performed at the Laboratory of Nuclear Problems, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna, 1995