ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна



Р5-95-507

М.А.Назаренко

# О ФУНКЦИЯХ ИЗ ПРОСТРАНСТВА ХАРДИ $H_2(\mathcal{D})$, ИМЕЮЩИХ НЕСКОЛЬКО РАЗЛИЧНЫХ РАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ НАИЛУЧШЕГО ПРИБЛИЖЕНИЯ

Направлено в журнал «Математические заметки»

1995

Основным результатом этой работы является следующая

Теорема. *Для любого целого неотрицательного $k$ существует $f \in H_2(\mathcal{D})$, имеющая четыре различные рациональные функции наилучшего приближения степени $(k, 1)$.*

Это утверждение является решением одной проблемы теории рациональных $L_2$–аппроксимаций, поставленной в 1976 году Браессом (D. Braess) [1, Problem 3.2], которая звучит следующим образом: возможно ли построить такую функцию, что бы она имела по крайней мере 3 различные рациональные функции наилучшего приближения какой–нибудь степени (но не локально наилучшего)?

Сперва вкратце опишем более или менее известные факты о рациональных аппроксимациях в метрике типа $L_2$. Во–первых, рациональная функция наилучшего приближения, разумеется, существует. Для рассматриваемого ниже комплексного случая доказательство содержится, например, в монографии [2].

Во–вторых, вообще говоря, рациональная функция наилучшего приближения любой степени в метриках типа $L_p$ неединственна, что было получено Н. В. Ефимовым и С. Б. Стечкиным [3] в 1961 году. В дальнейшем разными авторами строились примеры функций с двумя различными наилучшими рациональными аппроксимантами [4—7], с использованием свойств симметрии [8, 9]; отдельно отметим результат Чини (E. W. Cheney) и Голдстейна (A. A. Goldstein) [10]; и с бесконечным числом наилучших рациональных аппроксимантов [11, 12].

В–третьих, задача нахождения рациональной функции наилучшего приближения является нормальной в пространствах с нормой типа $L_p$ как по линейной мере, так и по площади (при, возможно, некоторых ограничениях): если приближаемая функция не является рациональной степени $(n, m)$, где $n$ и $m$ — натуральные числа, то наилучшее (даже локально наилучшее) рациональное приближение не может осуществляться рациональной функцией степени $(n-1, m-1)$, что в разные годы для разных пространств доказывалось в работах [9, 10, 12, 13, 14, 15, 16].

И, наконец, свойство неединственности наилучшего рационального аппроксиманта является исключительным, то есть те функции, наилучшее рациональное приближение которых осуществляется только одной рациональной функцией, образуют в исходном пространстве открытое всюду плотное множество [17]. В случае вещественного "внешнего" пространства Харди $H_{2,\mathbb{R}}(\{|z|>1\})$, образованного аналитическими во внешности единичного диска вещественными на вещественной оси функциями, интегралы Стилтьеса с носителем меры внутри некоторого подотрезка множества $(-1,\ 1)$ имеют каждый раз единственную рациональную функцию наилучшего приближения при совпадении степени числителя и знаменателя [18]. Заметим, что полиномы не принадлежат этому классу.

Пространство Харди $H_2(\mathcal{D})$ образовано аналитическими в единичном круге $\mathcal{D}=\{z:|z|<1\}$ функциями $f(z)$ с конечной нормой

$$f(z)=\sum_{j=0}^{\infty} f_j\, z^j, \quad ||f||^2=\sum_{j=0}^{\infty}|f_j|^2<\infty, \tag{1}$$

порожденной скалярным произведением

$$(h,\,g)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h\left(e^{i\theta}\right)\overline{g\left(e^{i\theta}\right)}\,d\theta=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1}\frac{h(z)\,\overline{g(z)}}{z}\,dz.$$

Совокупность рациональных функций в этом пространстве может быть описана следующим образом:

$$R_{n,m}(z)=\frac{\sum_{j=0}^{n} p_j\, z^j}{\prod_{k=0}^{m}(1-c_k z)}, \qquad \vec{c}=\{c_0,\,c_1,\,\dots,\,c_m\}\in\mathcal{D}^m.$$

Рассмотрим приближение функции $f\in H_2(\mathcal{D})$. Если зафиксировать вектор $\vec{c}$, однозначно определяющий полюса рациональной функции, то в полученном линейном пространстве рациональных функций с данными полюсами существует и единственный элемент наилучшего приближения, определяемый интерполяционными соотношениями [2, стр. 274–275]. Обозначим числитель этого элемента $P_n(z;\vec{c})$ и введем функцию уклонения

$$\Omega_n(\vec{c})=\left\|f-\frac{P_n(z;\vec{c})}{\prod_{k=0}^{m}(1-c_k z)}\right\|^2=||\,f\,||^2-\left(f,\ \frac{P_n(z;\vec{c})}{\prod_{k=0}^{m}(1-c_k z)}\right),$$

где последнее равенство получено в силу условий ортогональности. $\Omega_n$ есть однозначная и продолжаемая по непрерывности на замыкание собственной области определения $\mathcal{D}^m$ функция $m$ комплексных переменных. Единственность рационального приближения таким образом сводится к единственности глобального минимума функции $\Omega_n(\vec{c})$.

Перейдем к рациональным аппроксимациям степени $(k,\ 1)$. Тем самым вектор $\vec{c}$ имеет размерность, равную единице, функция уклонения зависит от одного комплексного переменного, которое обозначим $c$. При любом целом неотрицательном значении $k$ для функции (1) введем вспомогательную функцию

$$F_k(z)=\sum_{j=0}^{\infty} f_{k+j}\, z^{\,j}.$$

Непрерывность функции уклонения $\Omega_k(c)$ при $c\in\overline{\mathcal{D}}$ и ее представление в виде

$$\begin{aligned}\Omega_k(c)\ &=\ ||F_k||^2-\left(1-|c|^2\right)\cdot\left|F_k(c)\right|^2=\\ &=\ ||F_k||^2+\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty} f_{k+j}\,\overline{f_{k+s}}\left[-c^j\,\overline{c}^{\,s}+c^{j+1}\,\overline{c}^{\,s+1}\right]\end{aligned}$$

было доказано в работах [12, 19]. Используя дифференциальные свойства функции уклонения, в работе [20] построили примеры $f\in H_2(\mathcal{D})$, имеющих локально наилучшее приближение, отличное от глобального. Условия на точки $c$, подозрительные на локальный минимум функции уклонения $\Omega_k$, выписываются в следующем виде [12, Теорема 1]:

$$\sum_{j=0}^{\infty} f_{k+j}c^{j-1}\left[-j+(j+1)\,|c|^2\right]=0.$$

Доказательство теоремы. Для выбранного целого неотрицательного числа $k$ рассмотрим функцию

$$f(z) = z^{k+1} + z^{k+n}, \qquad F_k(z) = z + z^n.$$

Функция уклонения $\Omega_k$ при таком выборе аппроксимируемой $f$ имеет вид

$$\begin{aligned}\Omega_k(c) &= 2 - \left(1 - |c|^2\right) \cdot \left|c + c^n\right|^2 = \\ &= 2 - \left(1 - |c|^2\right) \cdot |c|^2 \cdot \left|1 + c^n\right|^2,\end{aligned}$$

а условия на стационарные точки $c$, подозрительные на локальный минимум, примет форму

$$\left[-1 + 2|c|^2\right] + c^{n-1} \cdot \left[-n + (n+1)|c|^2\right] = 0,$$

$$c^{n-1} = r^{n-1} \exp\left(i(n-1)\varphi\right) = -\frac{2|c|^2 - 1}{(n+1)|c|^2 - n},$$

что дает вещественность числа $c^{n-1}$, а требование достижения минимума функции уклонения

$$\Omega_k\left(r \exp\left(i\varphi\right)\right) = 2 - (1 - r^2) \cdot r^2 \cdot \left|1 + r^{n-1} \exp\left(i(n-1)\varphi\right)\right|^2$$

в этой точке определяет знак, то есть

$$\exp\left(i(n-1)\varphi\right) = 1, \qquad \varphi = \frac{2\pi m}{n}, \quad m = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Таким образом, существует ровно $n-1$ направление, определяемое аргументом комплексного числа $c$, на котором только и могут находиться стационарные точки функции уклонения, подозрительные на глобальный минимум.

$$\Omega_k\left(r \exp\left(\frac{2\pi m}{n}\right)\right) = 2 - \left(1 - r^2\right) \cdot r^2 \cdot \left(1 + r^{n-1}\right)^2.$$

Нижеприводимые рассуждения могут быть произведены для любого натурального значения $n$, но для более простой иллюстрации



эффекта многих рациональных функций наилучшего приближения положим $n = 5$. Обозначим $x = r^2 \in (0, 1)$, тогда

$$\Omega_k\left(r \exp\left(\frac{2\pi m}{n}\right)\right) = 2 - \left(1 - x\right) \cdot x \cdot \left(1 + x^2\right)^2 = \omega(x).$$

Для доказательства утверждения теоремы теперь достаточно показать, что функция

$$\omega(x) = \left(x^2 - x\right) \cdot \left(1 + x^2\right)^2 + 2$$

имеет всего один глобальный минимум при $x \in (0, 1)$.

Один из возможных способов состоит в том, чтобы проверить положительность второй производной $\omega''$ на всем интервале от нуля до единицы. Произведем некоторые вычисления

$$\begin{aligned}\omega(x) &= \left(x^2 - x\right) \cdot \left(1 + 2x^2 + x^4\right) + 2 = \\ &= x^2 - x + 2x^4 - 2x^3 + x^6 - x^5 + 2 = \\ &= x^6 - x^5 + 2x^4 - 2x^3 + x^2 - x + 2.\end{aligned}$$

$$\omega'(x) = 6x^5 - 5x^4 + 8x^3 - 6x^2 + 2x - 1.$$

$$\omega''(x) = 30x^4 - 20x^3 + 24x^2 - 12x + 2.$$

Дополнительно выпишем

$$\omega'''(x) = 120x^3 - 60x^2 + 48x - 12.$$

$$\omega^{(4)}(x) = 360x^2 - 120x + 48.$$

Дискриминант квадратного уравнения для четвертой производной равен

$$60^2 - 360 \cdot 48 = 3600 - 36 \cdot 480 = -36 \cdot 380 < 0,$$

то есть третья производная, в силу строгой положительности четвертой, монотонно возрастает на $(0, 1)$,

$$\omega'''(0) = -12, \qquad \omega'''(1) = 120 - 60 + 48 - 12 = 96,$$

и имеет в точности один корень, причем в этой точке достигается минимум второй производной.

Используя формулы Кардано, получаем значение корня кубического полинома $\omega'''$ в виде

$$\hat{x} = \frac{1}{6} - \frac{19}{3 \cdot \sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{1150 + 120\sqrt{330}}} + \frac{\sqrt[3]{1150 + 120\sqrt{330}}}{30 \cdot \sqrt[3]{2}}.$$

При желании можно убедиться, что указанное значение лежит на интервале (0, 1), но нас интересует не величина этого числа, а знак функции $\omega''$ в этой точке. Символьные преобразования дадут следующий результат:

$$\omega''\left(\frac{1}{6} - \frac{19}{3 \cdot \sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{1150 + 120\sqrt{330}}} + \frac{\sqrt[3]{1150 + 120\sqrt{330}}}{30 \cdot \sqrt[3]{2}}\right) =$$

$$= \Big\{110447 \cdot \sqrt[3]{25} + 34960 \cdot \sqrt[6]{5}\sqrt{66} - 19435 \cdot \sqrt[3]{115 + 12\sqrt{330}} -$$
$$-2028 \cdot \sqrt{330} \cdot \sqrt[3]{115 + 12\sqrt{330}} +$$
$$+553 \cdot \sqrt[3]{5} \cdot \left(115 + 12\sqrt{330}\right)^{2/3} -$$
$$-184 \cdot \sqrt[6]{15625} \cdot \sqrt{66} \cdot \left(115 + 12\sqrt{330}\right)^{2/3}\Big\} /$$
$$/ \left\{120 \cdot \left(115 + 12 \cdot \sqrt{330}\right)^{4/3}\right\}.$$

Численные вычисления показывают, что

$$\omega''(\hat{x}) \approx 0.262349,$$

а это означает положительность второй производной, то есть функция $\omega$ имеет всего один минимум, являющийся глобальным. Теорема полностью доказана.

Все символьные и численные вычисления были проведены с использованием программного пакета *Mathematica*.

Автор выражает благодарность профессору В. Г. Зинову за дружеские и стимулирующие дискуссии, а также профессору МГУ



Е. П. Долженко и доценту МГУ Н. С. Вячеславову за поддержку работы по данной тематике.

## ЛИТЕРАТУРА


1. Braess D., On rational $L_2$ approximation // J. Approximation Theory 1976. **18**. 136–151.
2. Уолш Дж., Интерполяция и аппроксимация рациональными функциями в комплексной области. М.: ИЛ. 1961.
3. Ефимов Н. В. и Стечкин С. Б., Аппроксимативная компактность и чебышевские множества // Докл. АН СССР 1961. **140**. 522–524.
4. Speiss J., Eindeutiglcitssätze bei der nichtlinearen Approximation in strikt–konvexen Räumen. Dissertation. Hamburg. 1969.
5. Lamprecht G., Zur Mehrdeutigkeit bei der Approximation in der $L_p$ Norm mit Hilfe rationaler Functionen // Computing 1970. **5**. 349–355.
6. Dunham C. B., Best mean rational approximation // Computing 1972. **9**. 87–93
7. Akhlaghi M. and Wolfe J. M., Functions with many best $L_2$ approximations // J. Approximation Theory 1981. **33**. 111–118.
8. Meinardus G., Invariantz bei linearen Approximationen // Arch. Rational Mech. Anal. 1963. **14**. 301–303.
9. Ruckebush G., Sur l'approximation rationalle des filtres // Rapport No. 35, C. M. A. Ecole Polytechnique, 1978.
10. Cheney E. W. and Goldstein A. A., Mean square approximation by generalized rational functions // Math. Z. 1967. **95**. 232–241.

11. D e l l a D o r a J., Contribution à l'approximation de fonctions de la variable complexe au sens de Hermite–Padé et de Hardy. Thèse d'état Université Scientifique et Médicale de Grenoble, 1980.

12. Н а з а р е н к о М. А., Некоторые свойства рациональных аппроксимаций степени $(k, 1)$ в пространстве Харди $H_2(\mathcal{D})$ // Препринт ОИЯИ, Р5-94-292, Дубна, 1994.

13. Л е в и н А. Л., Приближение рациональными функциями в комплексной плоскости // Матем. заметки 1971. **9**. 121–130.

14. М а х м у д о в Х. М., О наилучших рациональных приближениях функций комплексного переменного, суммируемых по площади // Матем. заметки 1989. **45**. 89–94.

15. В я ч е с л а в о в Н. С. и Р а м а з а н о в А. К., О степени рациональных функций наилучшего приближения в $L_p(\mathbf{R}^m)$ // Матем. заметки 1993. **53**. 37–45.

16. В я ч е с л а в о в Н. С. и Р а м а з а н о в А. К., Интерполяционные свойства рациональных функций наилучшего приближения в среднем квадратическом на окружности и в круге // Матем. заметки 1995. **57**. 228–239.

17. W o l f e J. M., On the unicity of nonlinear approximation in smooth spaces // J. Approximation Theory 1974. **12**. 165–181.

18. B a r a t c h a r t L. and W i e l o n s k y F., Rational approximation in the real Hardy space $H_2$ and Stieltjes integrals: A uniqueness theorem // Constr. Approximation 1993. **9**. 1–21.

19. Н а з а р е н к о М. А., О возможности совпадения полиномиальной и рациональной аппроксимаций первой степени в пространстве $H_2(\mathcal{D})$ // Сообщения ОИЯИ, Р5-93-284, Дубна, 1993.

20. Н а з а р е н к о М. А., О наилучшем локальном неглобальном рациональном приближении в пространстве $H_2(\mathcal{D})$ // Препринт ОИЯИ, Р5-94-405, Дубна, 1994.

Рукопись поступила в издательский отдел
8 декабря 1995 года.



Назаренко М.А. Р5-95-507

О функциях из пространства Харди $H_2(\mathcal{D})$,
имеющих несколько различных рациональных функций
наилучшего приближения

В 1976 году Браесс (D.Braess) поставил следующую задачу теории рациональных $L_2$-аппроксимаций: возможно ли построить функцию, которая будет иметь по крайней мере 3 различные наилучшие аппроксимации (но не 3 локально наилучшие аппроксимации)? В случае пространства Харди $H_2(\mathcal{D})$, $\mathcal{D} = \{\,|z| < 1\}$, аналитических в $\mathcal{D}$ функций с нормой типа $L_2$ на границе для любого целого неотрицательного $k$ доказано существование $f \in H_2(\mathcal{D})$, имеющих четыре различные рациональные функции наилучшего приближения степени $(k, 1)$.

Работа выполнена в Лаборатории ядерных проблем ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна, 1995

Nazarenko M.A. P5-95-507

On the Functions from Hardy Space $H_2(\mathcal{D})$,
which Have Some Different
Rational Functions of the Best Approach

At 1976 D.Braess formulated the following problem in the theory of rational $L_2$-approximation: is it possible to exhibit a function which has at least 3 best approximations (not only with 3 local best approximations)? In the case of Hardy space $H_2(\mathcal{D})$, $\mathcal{D} = \{\,|z| < 1\}$, consisting of analytic in $\mathcal{D}$ functions, with the norm of $L_2$-type on the boundary, for any nonnegative integer $k$ the existence of $f \in H_2(\mathcal{D})$, which have four different rational functions of the best approach of $(k, 1)$ degree, is proved.

The investigation has been performed at the Laboratory of Nuclear Problems, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna, 1995