ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р5-95-495

М.А.Назаренко

О РЕШЕНИИ ПРОБЛЕМЫ БРАЕССА

Направлено на VIII конференцию «Современные проблемы теории функций и их приложения», Саратов, январь—февраль 1996 г.

1995

Проблема теории рациональных L_2–аппроксимаций, поставленная в 1976 году Браессом (D. Braess) [1, Problem 3.2], звучит следующим образом: возможно ли построить такую функцию, чтобы она имела по крайней мере 3 различные рациональные функции наилучшего приближения какой–нибудь степени (но не локально наилучшего)?

Сперва вкратце опишем более или менее известные факты о рациональных аппроксимациях в метрике типа L_2. Во–первых, рациональная функция наилучшего приближения, разумеется, существует. Для рассматриваемого ниже комплексного случая доказательство содержится, например, в монографии [2].

Во–вторых, вообще говоря, рациональная функция наилучшего приближения любой степени в метриках типа L_p неединственна, что было получено Н. В. Ефимовым и С. Б. Стечкиным [3] в 1961 году. В дальнейшем разными авторами строились примеры функций с двумя различными наилучшими рациональными аппроксимантами [4, 5, 6, 7], с использованием свойств симметрии [8, 9], отдельно отметим результат Чини (E. W. Cheney) и Голдстейна (A. A. Goldstein) [10], и с бесконечным числом наилучших рациональных аппроксимантов [11, 12].

В–третьих, задача нахождения рациональной функции наилучшего приближения является нормальной в пространствах с нормой типа L_p как по линейной мере, так и по площади (при, возможно, некоторых ограничениях): если приближаемая функция не является рациональной степени (n, m), где n и m — натуральные числа, то наилучшее (даже локально наилучшее) рациональное приближение не может осуществляться рациональной функцией степени $(n-1, m-1)$, что в разные годы для разных пространств доказывалось в работах [9, 10, 12, 13, 14, 15, 16].

И, наконец, свойство неединственности наилучшего рационального аппроксиманта является исключительным, то есть те функции, наилучшее рациональное приближение которых осуществляется только одной рациональной функцией, образуют в исходном пространстве открытое всюду плотное множество [17]. В случае вещественного "внешнего" пространства Харди $H_{2,\mathbf{R}}(\{|z|>1\})$, образованного аналитическими во внешности единичного диска вещественными на вещественной оси функциями, интегралы Стилтьеса с носителем меры внутри некоторого подотрезка множества $(-1,1)$ имеют каждый раз единственную рациональную функцию наилучшего приближения при совпадении степени числителя и знаменателя [18]. Заметим, что полиномы не принадлежат этому классу.

Пространство Харди $H_2(\mathcal{D})$ образовано аналитическими в единичном круге $\mathcal{D}=\{z:|z|<1\}$ функциями $f(z)$ с конечной нормой

$$f(z)=\sum_{j=0}^{\infty} f_j z^j, \quad ||f||^2=\sum_{j=0}^{\infty}|f_j|^2<\infty,$$

порожденной скалярным произведением

$$(h,g)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h\left(e^{i\theta}\right)\overline{g\left(e^{i\theta}\right)}\,d\theta=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1}\frac{h(z)\,\overline{g(z)}}{z}\,dz.$$

Совокупность рациональных функций в этом пространстве может быть описана следующим образом:

$$R_{n,m}(z)=\frac{\sum_{j=0}^{n} p_j z^j}{\prod_{k=0}^{m}(1-c_k z)}, \qquad \vec{c}=\{c_0,c_1,\ldots,c_m\}\in\mathcal{D}^m.$$

Рассмотрим приближение функции $f\in H_2(\mathcal{D})$. Если зафиксировать вектор $\vec{c}$, однозначно определяющий полюса рациональной функции, то в полученном линейном пространстве рациональных функций с данными полюсами существует и единственный элемент наилучшего приближения, определяемый интерполяционными соотношениями [2]. Обозначим числитель этого элемента $P_n(z;\vec{c})$ и введем функцию уклонения

$$\Omega_n(\vec{c})=\left\|f-\frac{P_n(z;\vec{c})}{\prod_{k=0}^{m}(1-c_k z)}\right\|^2=||f||^2-\left(f,\frac{P_n(z;\vec{c})}{\prod_{k=0}^{m}(1-c_k z)}\right),$$

где последнее равенство получено в силу условий ортогональности. Ω_n есть однозначная и продолжаемая по непрерывности на замыкание собственной области определения $\mathcal{D}^m$ функция m комплексных переменных. Единственность рационального приближения таким образом сводится к единственности глобального минимума функции $\Omega_n(\vec{c})$.

Теорема. *Для любого натурального k существует $f\in H_2(\mathcal{D})$, имеющая три различные рациональные функции наилучшего приближения степени $(k,1)$.*

Автор выражает благодарность профессору В. Г. Зинову и доценту МГУ Н. С. Вячеславову за дружеские и стимулирующие дискуссии.

Литература

[1] D. Braess. On rational L_2 approximation. *J. Approximation Theory* **18** (1976), 136–151.

[2] Дж. Уолш. Интерполяция и аппроксимация рациональными функциями в комплексной области. М.: ИЛ, 1961.

[3] Н. В. Ефимов, С. Б. Стечкин. Аппроксимативная компактность и чебышевские множества. *Доклады АН СССР* **140** (1961), 522–524.

[4] J. Speiss. Eindeutigleitssätze bei der nichtlinearen Approximation in strikt konvexen Räumen. Dissertation. Hamburg, 1969.

[5] G. Lamprecht. Zur Mehrdeutigkeit bei der Approximation in der L_p Norm mit Hilfe rationaler Functionen. *Computing* **5** (1970), 349–355.

[6] C. B. Dunham. Best mean rational approximation. *Computing* **9** (1972), 87–93.

[7] M. Akhlaghi, J. M. Wolfe. Functions with many best L_2 approximations. *J. Approximation Theory* **33** (1981), 111–118.

[8] G. Meinardus. Invariantz bei linearen Approximationen. *Arch. Rational Mech. Anal.* **14** (1963), 301–303.

[9] G. Ruckebush. Sur l'approximation rationalle des filtres. Rapport No. 35. C. M. A. Ecole Polytechnique. 1978.

[10] E. W. Cheney and A. A. Goldstein. Mean square approximation by generalized rational functions. *Math. Z.* **95** (1967). 232–241.

[11] J. Della Dora. Contribution à l'approximation de fonctions de la variable complexe au sens de Hermite–Padé et de Hardy. Thèse d'état Université Scientifique et Médicale de Grenoble. 1980.

[12] М. А. Назаренко. Некоторые свойства рациональных аппроксимаций степени $(k, 1)$ в пространстве Харди $H_2(\mathcal{D})$. Препринт ОИЯИ. Р5-94-292. Дубна. 1994.

[13] А. Л. Левин. Приближение рациональными функциями в комплексной плоскости. *Матем. заметки* **9** (1971). 121–130.

[14] Х. М. Махмудов. О наилучших рациональных приближениях функций комплексного переменного, суммируемых по площади. *Матем. заметки* **45** (1989). 89–94.

[15] Н. С. Вячеславов. А. К. Рамазанов. О степени рациональных функций наилучшего приближения в $L_p(\mathbf{R}^m)$. *Матем. заметки* **53** (1993). 37–45.

[16] Н. С. Вячеславов. А. К. Рамазанов. Интерполяционные свойства рациональных функций наилучшего приближения в среднем квадратическом на окружности и в круге, *Матем. заметки* **57** (1995), 228–239.

[17] Jerry M. Wolfe. On the unicity of nonlinear approximation in smooth spaces, *J. Approximation Theory* **12** (1974), 165–181.

[18] L. Baratchart, F. Wielonsky, Rational approximation in the real Hardy space H_2 and Stieltjes integrals: A uniqueness theorem, *Constr. Approximation* **9** (1993), 1–21.

Рукопись поступила в издательский отдел
4 декабря 1995 года.