ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р5-95-494

М.А.Назаренко

СУЩЕСТВОВАНИЕ ФУНКЦИИ С ЗАДАННЫМИ РАЦИОНАЛЬНЫМИ ПРИБЛИЖЕНИЯМИ В ПРОСТРАНСТВЕ *AC*

Направлено в журнал «Математические заметки»

1995

Обозначим символами $C[-1, 1]$ и C соответственно пространства комплексно- и действительнозначных функций, непрерывных на отрезке $[-1, 1]$ с равномерной нормой $\|\cdot\|$; $\mathbf{P}_n$ и $\mathbf{p}_n$ — их подпространства алгебраических полиномов степени не выше n. При каждом целом неотрицательном n определим следующие величины полиномиальных и рациональных приближений в соответствующих пространствах

$$e_n(f) = \inf\left\{\left\|f-p\right\| : \quad p \in \mathbf{p}_n\right\},$$

$$r_n(f) = \inf\left\{\left\|f-\frac{p}{q}\right\| : \quad p, q \in \mathbf{p}_n, \quad q(x) \neq 0, \ x \in [0, 1]\right\},$$

$$R_n(f) = \inf\left\{\left\|f-\frac{P}{Q}\right\| : \quad P, Q \in \mathbf{P}_n, \quad Q(x) \neq 0, \ x \in [0, 1]\right\}.$$

Введем обозначение $\mathcal{S}$ класса последовательностей $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, где a_n — действительные числа, $a_n \geq a_{n+1}$ при всех натуральных значениях n и $a_n \to 0$ при $n \to \infty$. В силу известной теоремы К. Вейерштрасса и введенного определения величин e_n имеет место вложение $\{\{e_n(f)\}_{n=0}^{\infty} : f \in C\} \subset \mathcal{S}$. Для каждой последовательности $\{a_n\} \in \mathcal{S}$ в 1938 году С. Н. Бернштейн [1] доказал существование функции $h \in C$, осуществляющей равенства $e_n(h) = a_n$ при всех целых неотрицательных n, и тем самым доказал совпадение множеств $\cup_{f \in C}\{e_n(f)\} = \mathcal{S}$. Позже [2] этот результат был перенесен на случай полиномиального приближения в произвольном полном линейном нормированном пространстве, где система полиномов (линейная оболочка линейно независимой приближающей системы) замкнута. Е. П. Долженко [3] показал, что любой элемент $\{a_k\} \in \mathcal{S}$ может быть подпоследовательностью последовательности $\{r_n(f)\}$ для некоторой $f \in C$, а именно: существует функция $h \in C$ такая, что $r_{9^k}(h) = a_k$, при всех целых неотрицательных значениях k. Если последовательность $\{a_n\} \in \mathcal{S}$ строго убывает, то, согласно результату А. А. Пекарского [4], существует такая функция $h \in C[-1, 1]$, что реализуется система равенств $R_n(h) = a_n$ при $n = 0, 1, \ldots$

Обозначим символом AC пространство аналитических в единичном круге $\{|z|<1\}$ и непрерывных в его замыкании $\{|z|\le 1\}$ функций f комплексного переменного z с нормой

$$\|f\| = \max_{|z|=1} \left| f(z) \right|.$$

Для целых неотрицательных значений n обозначим символами $\mathcal{P}_n$ и $\mathcal{R}_n$ соответственно пространство полиномов степени не выше n и совокупность рациональных функций из AC, степень числителя и знаменателя которых не превосходят n, и введем величины

$$\mathbf{e}_n(f) = \inf\left\{ \left\| f-U \right\| : U\in\mathcal{P}_n \right\},$$

$$\mathbf{r}_n(f) = \inf\left\{ \left\| f-V \right\| : V\in\mathcal{R}_n \right\}$$

соответственно полиномиальных и рациональных приближений по норме пространства AC функции f. Усложняя построения работы [4], можно перенести результат А. А. Пекарского в случае пространства AC в следующем виде:

Теорема. *Для любой последовательности $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ такой, что $a_n\to 0$ при $n\to\infty$ и либо $a_0>a_1>\ldots>a_n>\ldots>0$, либо существует такое натуральное число N, что $a_0>a_1>\ldots>a_N=a_{N+1}=\ldots=0$, в пространстве AC существует функция h, для величин рациональных приближений которой выполнены равенства $\mathbf{r}_n(h)=a_n$, $n=0,1,\ldots$*

Лемма 1. *Для любой последовательности $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty}$, где $1\ge\varepsilon_n\ge\varepsilon_{n+1}>0$, существует последовательность $\{\sigma_n\}_{n=1}^{\infty}$ такая, что*

$$i)\quad \sum_{j=1}^{s-1}\frac{\sigma_j}{\sigma_s-\sigma_j}<\frac14\varepsilon_s,\qquad ii)\quad \sum_{j=s+1}^{\infty}\frac{\sigma_s}{\sigma_j-\sigma_s}<\frac14\varepsilon_s.$$

Доказательство. Положим

$$\sigma_n=\frac{7}{\varepsilon_1}\cdot\ldots\cdot\frac{7}{\varepsilon_n}.$$

Рассмотрим случай $i)$:

$$\frac{\sigma_s-\sigma_j}{\sigma_j}=\frac{7^{s-j}-\prod_{k=j+1}^{s}\varepsilon_k}{\prod_{k=j+1}^{s}\varepsilon_k}\ge\frac{7^{s-j}-1}{\varepsilon_s}>\frac{5^{s-j}}{\varepsilon_s},$$

$$\sum_{j=1}^{s-1}\frac{\sigma_j}{\sigma_s-\sigma_j}<\varepsilon_s\sum_{j=1}^{s-1}\frac{1}{5^{s-j}}<\varepsilon_s\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{5^k}=\frac14\varepsilon_s.$$

Теперь рассмотрим случай $ii)$:

$$\frac{\sigma_j-\sigma_s}{\sigma_s}=\frac{7^{j-s}-\prod_{k=s+1}^{j}\varepsilon_k}{\prod_{k=s+1}^{j}\varepsilon_k}\ge\frac{7^{j-s}-1}{\varepsilon_s}>\frac{5^{j-s}}{\varepsilon_s}.$$

$$\sum_{j=s+1}^{\infty}\frac{\sigma_s}{\sigma_j-\sigma_s}<\varepsilon_s\sum_{j=s+1}^{\infty}\frac{1}{5^{j-s}}=\varepsilon_s\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{5^k}=\frac14\varepsilon_s.$$

Лемма доказана.

По числам $\{\sigma_n\}$ из предыдущей леммы построим дробно-линейные функции

$$w_n(z)=\frac{\sigma_n z+1-\sigma_n}{(1-\sigma_n)z+\sigma_n},$$

а по ним следующие произведения

$$N_k(z)=\prod_{j=1}^{k}w_j(z).$$

Обозначим числа

$$\zeta_n=-\frac{1-\sigma_n+\sigma_n i}{\sigma_n+(1-\sigma_n)i}.$$

Лемма 2. *Пусть $\lambda_{ks}=\operatorname{Im}N_k(\zeta_s)$, тогда*

$$i)\quad |\lambda_{ks}|<\frac12\varepsilon_s,\ k<s.\qquad ii)\quad |\lambda_{ks}-(-1)^s|<\frac12\varepsilon_s,\ k\ge s.$$

Доказательство. Заметим, что w_n отображают единичную окружность комплексной плоскости на себя, то есть $|w_j(z)|=1$ при $|z|=1$. Вычислим

$$w_j(\zeta_s)=\frac{\sigma_j\zeta_s+1-\sigma_j}{(1-\sigma_j)\zeta_s+\sigma_j}=\frac{-\sigma_j\frac{1-\sigma_s+\sigma_s i}{\sigma_s+(1-\sigma_s)i}+1-\sigma_j}{-(1-\sigma_j)\frac{1-\sigma_s+\sigma_s i}{\sigma_s+(1-\sigma_s)i}+\sigma_j}=$$

$$=-\frac{(1-\sigma_j)[\sigma_s+(1-\sigma_s)i]-\sigma_j[1-\sigma_s+\sigma_s i]}{(1-\sigma_j)[1-\sigma_s+\sigma_s i]-\sigma_j[\sigma_s+(1-\sigma_s)i]}=$$

$$= -\frac{[\sigma_s - \sigma_j\sigma_s - \sigma_j + \sigma_j\sigma_s] + [1-\sigma_j-\sigma_s+\sigma_j\sigma_s-\sigma_j\sigma_s]i}{[1-\sigma_j-\sigma_s+\sigma_j\sigma_s-\sigma_j\sigma_s]+[\sigma_s-\sigma_j\sigma_s-\sigma_j+\sigma_j\sigma_s]i} =$$

$$= -\frac{(\sigma_s-\sigma_j)+(1-\sigma_j-\sigma_s)i}{(1-\sigma_j-\sigma_s)+(\sigma_s-\sigma_j)i} = \frac{(\sigma_s\sigma_j)+(1-\sigma_j-\sigma_s)i}{-(1-\sigma_j-\sigma_s)-(\sigma_s-\sigma_j)i}.$$

Значение аргумента комплексного числа

$$\operatorname{Arg} w_j(\zeta_s) =$$

$$= \operatorname{arctg}\frac{1-\sigma_j-\sigma_s}{\sigma_s-\sigma_j} - \operatorname{arctg}\frac{\sigma_s-\sigma_j}{1-\sigma_j-\sigma_s} + 2\pi m =$$

$$= \operatorname{arctg}\left(-1-\frac{2\sigma_j-1}{\sigma_s-\sigma_j}\right) -$$

$$-\left[\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\left(-1-\frac{2\sigma_j-1}{\sigma_s-\sigma_j}\right)\right] + 2\pi m =$$

$$= 2\left[\operatorname{arctg}\left(-1-\frac{2\sigma_j-1}{\sigma_s-\sigma_j}\right) - \operatorname{arctg}(-1)\right] - \pi + 2\pi m = \qquad (1)$$

$$= \operatorname{arctg}\frac{\sigma_j+\sigma_s-1}{\sigma_j-\sigma_s} - \operatorname{arctg}\frac{\sigma_j-\sigma_s}{\sigma_j+\sigma_s-1} + 2\pi m =$$

$$= \operatorname{arctg}\left(1+\frac{2\sigma_s-1}{\sigma_j-\sigma_s}\right) - \left[\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\left(1+\frac{2\sigma_s-1}{\sigma_j-\sigma_s}\right)\right] + 2\pi m =$$

$$= 2\left[\operatorname{arctg}\left(1+\frac{2\sigma_s-1}{\sigma_j-\sigma_s}\right) - \operatorname{arctg}1\right] + 2\pi m. \qquad (2)$$

Учитывая, что функция arctg нечетна, выпукла вверх при положительных значениях ее аргумента и $(\operatorname{arctg}1)' = \frac{1}{2}$, произведем оценку слагаемого из представления (1) при $\sigma_s > \sigma_j$.

$$0 < 2\left[-\operatorname{arctg}\left(-1-\frac{2\sigma_j-1}{\sigma_s-\sigma_j}\right) + \operatorname{arctg}(-1)\right] <$$

$$< 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2\sigma_j-1}{\sigma_s-\sigma_j} < 2\cdot\frac{\sigma_j}{\sigma_s-\sigma_j}.$$

Следовательно, в случае *i)* в силу предыдущей леммы

$$|\operatorname{Arg} N_k(\zeta_s) + \pi k + 2\pi m'| <$$

$$< 2\left|\sum_{j=1}^{k}\left\{\operatorname{arctg}\left(-1-\frac{2\sigma_j-1}{\sigma_s-\sigma_j}\right) - \operatorname{arctg}(-1)\right\}\right| <$$

$$< 2\sum_{j=1}^{k}\left|\operatorname{arctg}\left(-1-\frac{2\sigma_j-1}{\sigma_s-\sigma_j}\right) - \operatorname{arctg}(-1)\right| <$$

$$< 2\sum_{j=1}^{s-1}\frac{\sigma_j}{\sigma_s-\sigma_j} < \frac{1}{2}\varepsilon_s.$$

Так как $|N_k(\zeta_s)| = 1$, то $|\lambda_{ks}| = |\operatorname{Im} N_k(\zeta_s)| < |\operatorname{Arg} N_k(\zeta_s) - \pi m''| < \frac{1}{2}\varepsilon_s$. Первая часть леммы доказана.

Теперь произведем аналогичные действия для представления (2) при $\sigma_j > \sigma_s$.

$$0 < 2\left[\operatorname{arctg}\left(1+\frac{2\sigma_s-1}{\sigma_j-\sigma_s}\right) - \operatorname{arctg}1\right] <$$

$$< 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2\sigma_s-1}{\sigma_j-\sigma_s} < 2\cdot\frac{\sigma_s}{\sigma_j-\sigma_s}.$$

Таким образом, при $k \ge s$

$$\operatorname{Arg} N_k(\zeta_s) = 2\sum_{j=1}^{s-1}\left\{\operatorname{arctg}\left(-1-\frac{2\sigma_j-1}{\sigma_s-\sigma_j}\right) - \operatorname{arctg}(-1)\right\} - \pi(s-1) -$$

$$-\frac{\pi}{2} + \sum_{j=s+1}^{k} 2\left\{\operatorname{arctg}\left(1+\frac{2\sigma_s-1}{\sigma_j-\sigma_s}\right) - \operatorname{arctg}1\right\} + 2\pi m^*.$$

Первая сумма в этом представлении имеет величину от $-\frac{1}{2}\varepsilon_s$ до 0, а вторая (если она присутствует): от 0 до $\frac{1}{2}\varepsilon_s$ в силу предыдущей леммы. Следовательно, в случае *ii)*

$$\left|\operatorname{Arg} N_k(\zeta_s) + \frac{\pi}{2} + \pi(s-1) + 2\pi m^*\right| < \frac{1}{2}\varepsilon_s.$$

Лемма полностью доказана.

В силу соотношения $\mathbf{r}_n(\lambda f) = \lambda \mathbf{r}_n(f)$ при $\lambda > 0$, можно считать $a_0 = 1$. Теперь положим $\varepsilon_n = \min\{\Delta a_1, \dots, \Delta a_n\} \le 1$, где $\Delta a_n = a_{n-1} - a_n$, а n будет принимать значения либо 1, 2, 3 и так далее, если все $a_n > 0$, либо $1, 2, \dots, N$, если $a_{N-1} > a_N = 0$. Выберем банахово пространство B в зависимости от области изменения n: либо пространство ограниченных последовательностей l_∞, либо $\mathbf{R}^N$ — и выпуклый компакт K, покоординатно задаваемый следующим образом: $0 \le t_s \le \varepsilon_{s+1}$, где s принимает значения, как $(n-1)$. Каждому $t = (t_0, \dots) \in K$ поставим в соответствие функцию

$$f_t(z) = \sum_n (\Delta a_n + \Delta t_n) N_n(z). \tag{3}$$

Отметим, что $\Delta a_n + \Delta t_n = \Delta a_n + t_{n-1} - t_n \ge 0$, а если n принимает неограниченное число значений, то указанный ряд равномерно сходится при $|z| = 1$, будучи ограниченным по модулю телескопическим рядом $\sum_n (a_{n-1} - a_n + t_{n-1} - t_n) = a_0 + t_0$.

Лемма 3. *При всех $t \in K$ и s, изменяющихся как n, выполняются неравенства*

$$(-1)^s \operatorname{Im} f_t(\zeta_s) > a_{s-1} + t_{s-1} - \varepsilon_s.$$

Доказательство. Рассмотрим представление рядами

$$\operatorname{Im} f_t(\zeta_s) - (-1)^s \Big(a_{s-1} + t_{s-1}\Big) =$$

$$= \sum_{k=1}^{s-1} (\Delta a_k + \Delta t_k) \lambda_{ks} + \sum_{k=s}^{\infty} (\Delta a_k + \Delta t_k) \Big(\lambda_{ks} - (-1)^s\Big),$$

где во второй сумме k растет до бесконечности при выборе пространства $B = l_\infty$; или до N, если $B = \mathbf{R}^N$. Оценим по модулю, используя предыдущую лемму.

$$\Big|(-1)^s \operatorname{Im} f_t(\zeta_s) - (a_{s-1} + t_{s-1})\Big| <$$

$$< \sum_{k=1}^{\infty} (\Delta a_s + \Delta t_k) \cdot \frac{1}{2} \varepsilon_s = (a_0 + t_0) \cdot \frac{1}{2} \varepsilon_s \le \varepsilon_s.$$

Лемма доказана.

В дальнейшем нам понадобится следующий комплексный аналог леммы Валле Пуссена.

Лемма 4. *Пусть существуют числа $\{y_k\}_{k=1}^{2n+2}$, $|y_k| = 1$, $0 < \arg y_1 < \arg y_2 < \dots < \arg y_{2n+2} < 2\pi$, а также $\{\eta_k\}_{k=1}^{2n+2}$, причем $\operatorname{Im} \eta_k \cdot \operatorname{Im} \eta_{k+1} < 0$, $k = 1, 2, \dots, 2n+1$. Тогда для любой рациональной функции R выполняется неравенство*

$$\max_{1 \le k \le 2n+2} |\eta_k - R(y_k)| \ge \min_{1 \le k \le 2n+2} |\operatorname{Im} \eta_k|.$$

Доказательство теоремы. Рассмотрим непрерывное отображение

$$\Big(\Gamma(t)\Big)_n = \Big(a_n + t_n - \mathbf{r}_n(f_t)\Big) : K \to B,$$

где f_t — функция (3), B — выбранное банахово пространство. Докажем, что Γ отображает выпуклый компакт K в себя.

$$\mathbf{r}_n(f_t) \le \max_{|z|=1} \Big| f_t(z) - \sum_{k=n+1}^{\infty} (\Delta a_n + \Delta t_n) N_n(z) \Big| \le$$

$$\le \sum_{k=n+1}^{\infty} (\Delta a_n + \Delta t_n) = a_n + t_n.$$

Следовательно,

$$0 \le a_n + t_n - \mathbf{r}_n(f_t) = \Big(\Gamma(t)\Big)_n.$$

Обратную оценку произведем, используя леммы 3 и 4. Выберем $y_1 = \overline{\zeta_{n+1}}$, $y_2 = \overline{\zeta_n}$, $\dots$, $y_{n+1} = \overline{\zeta_1}$, $y_{n+2} = \zeta_1$, $\dots$, $y_{2n+2} = \zeta_{n+1}$. Будем использовать соотношение $N_k(\bar{z}) = \overline{N_k(z)}$, $k = 1, 2, \dots$ Выберем $\eta_k = f_t(y_k)$, $k = 1, 2, \dots, 2n+2$. В силу леммы 3 имеется перемена знаков мнимой части. Таким образом,

$$\mathbf{r}_n(f_t) \ge \min_{1 \le k \le 2n+2} |\operatorname{Im} \eta_k| = \min_{1 \le k \le 2n+2} |\operatorname{Im} f_t(y_k)| =$$

$$= \min_{1 \le k \le n+1} |\operatorname{Im} f_t(\zeta_k)| > a_n + t_n - \varepsilon_{n+1}.$$

Следовательно,

$$\Big(\Gamma(t)\Big)_n = a_n + t_n - \mathbf{r}_n(f_t) \le \varepsilon_{n+1}.$$

Тем самым доказано, что непрерывное отображение Г переводит выпуклый компакт K в себя. По принципу Шаудера [5] существует неподвижная точка $t^* = (t_0^*, \dots)$ такая, что

$$t_n^* = \left(\Gamma(t^*)\right)_n = a_n + t_n^* - \mathbf{r}_n(f_{t^*}).$$

$$a_n = \mathbf{r}_n(f_{t^*}).$$

Полагаем $h = f_{t^*}$, и теорема полностью доказана.

Автор выражает благодарность профессору В. Г. Зинову и доценту МГУ Н. С. Вячеславову за дружеские и стимулирующие дискуссии.

Литература

[1] Бернштейн С. Н. Об обратной задаче теории наилучшего приближения непрерывных функций. *Сочинения*. Т. II. М., Изд. АН СССР, 1952, С.292-294.

[2] Тиман А. Ф. *Теория приближения функций действительного переменного*. М.: ФизМатГИз. 1960. С. 50–53

[3] Долженко Е. П. Сравнение скоростей рациональной и полиномиальной аппроксимаций // Матем. заметки. 1967. Т. 1. N 3. С. 313–320.

[4] Пекарский А. А. Существование функции с заданными наилучшими равномерными рациональными приближениями // Известия АН Белоруссии. 1994. 1. С. 23–26.

[5] Канторович Л. В., Акилов Г. П. *Функциональный анализ*. М.: "Наука". 1977. С. 616–619.

Рукопись поступила в издательский отдел
4 декабря 1995 года.