ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р5-95-483

М.А.Назаренко

НЕКОТОРЫЕ СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ ВЕЛИЧИНАМИ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ И РАЦИОНАЛЬНЫХ УКЛОНЕНИЙ В ЛИНЕЙНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Направлено в журнал «Математические заметки»

1995

Основным объектом рассмотрения данной работы являются линейные пространства $\mathbf{E}$ над полем вещественных или комплексных чисел. Считаем, что в $\mathbf{E}$ существует бесконечная система $\mathcal{G} = \{g_n\}_{n=0}^{\infty}$ линейно независимых векторов. Подпространством полиномов степени не выше n, где n — целое неотрицательное число, будем называть линейную оболочку первых $n+1$ векторов из выделенной совокупности и обозначать символом $\mathbf{P}_n = L\langle g_0, \ldots, g_n\rangle$. Степень тривиального полинома $P = 0$ по определению положим равной нулю, а степень ∂P полинома $P \neq 0$ определим как наибольший индекс среди векторов g_k с отличными от нуля коэффициентами в образующей этот полином линейной комбинации. Таким образом утверждения принадлежности $P \in \mathbf{P}_n$ и ограничения степени $\partial P \leq n$ эквивалентны; система подпространств полиномов $\mathbf{P}_n$, $n = 0, 1, \ldots$, строго градуирована на по степени n: $\mathbf{P}_n \subset \mathbf{P}_{n+1}$ и $\mathbf{P}_{n+1} \backslash \mathbf{P}_n \neq \emptyset$.

Для каждой упорядоченной пары целых неотрицательных чисел k и m определим совокупность рациональных функций степени не выше (k, m) как некоторое множество $\mathbf{R}_{k,m}$ из $\mathbf{E}$, удовлетворяющее следующим условиям:

$$\mathbf{R}_{k,0} = \mathbf{P}_k, \quad \mathbf{R}_{k,m} \subset \mathbf{R}_{k+1,m}, \quad \mathbf{R}_{k,m} \subset \mathbf{R}_{k,m+1}.$$

Кроме того, предполагаем, что на множестве $\mathbf{R}_{k,m}$ определен неотрицательный выпуклый функционал $\mathcal{F}$. Введем обозначения для величин нижних граней значений $\mathcal{F}$ соответственно на $\mathbf{P}_k$ и $\mathbf{R}_{k,m}$:

$$\mathbf{e}_k \equiv \mathbf{e}_k(\mathcal{F}) \equiv \mathbf{e}_k(\mathcal{F};\, \mathbf{E},\, \mathcal{G}) = \inf_{P_k \in \mathbf{P}_k} \mathcal{F}\Big(P_k\Big),$$

$$\mathbf{r}_{k,m} \equiv \mathbf{r}_{k,m}(\mathcal{F}) \equiv \mathbf{r}_{k,m}(\mathcal{F};\, \mathbf{E},\, \mathcal{G}) = \inf_{R_{k,m} \in \mathbf{R}_{k,m}} \mathcal{F}\Big(R_{k,m}\Big).$$

Если пространство $\mathbf{E}$ является нормированным, а значение функционала $\mathcal{F}$ задается равенством $\mathcal{F}(h) = ||f - h||$ при некотором фиксированном элементе $f \in \mathbf{E}$, то величины $\mathbf{e}_k$ и $\mathbf{r}_{k,m}$ являются величинами соответственно наилучшего полиномиального и рационального приближений f в $\mathbf{E}$:

$$\mathbf{e}_k \equiv \mathbf{e}_k(f) \equiv \mathbf{e}_k(f;\, \mathbf{E},\, \mathcal{G}) = \inf_{P \in \mathbf{P}_k} ||f - P||,$$

$$\mathbf{r}_{k,m} \equiv \mathbf{r}_{k,m}(f) \equiv \mathbf{r}_{k,m}(f;\, \mathbf{E},\, \mathcal{G}) = \inf_{R \in \mathbf{R}_{k,m}} ||f - R||.$$

В дальнейшем будем использовать символы $\mathbf{e}_k$ и $\mathbf{r}_{k,m}$ без указания определяющих их параметров, заключенных в круглые скобки, когда из контекста ясно, о каких значениях этих параметров идет речь. Кроме того, заметим, что в силу введенного определения при каждом целом неотрицательном значении k справедливо равенство $\mathbf{e}_k = \mathbf{r}_{k,0}$, поэтому будем употреблять то или иное обозначение данной величины в зависимости от ситуации.

Величины $\mathbf{r}_{k,m}$ при всех целых неотрицательных значениях k и m образуют бесконечную вправо и вниз таблицу, которую будем называть таблицей Чебышева, где индекс k обозначает номер элемента $\mathbf{r}_{k,m}$ в строке, а m — в столбце. Очевидны следующие неравенства для значений элементов этой таблицы:

$$\mathbf{r}_{k,m} \geq \mathbf{r}_{k+1,m}, \qquad \mathbf{r}_{k,m} \geq \mathbf{r}_{k,m+1},$$

откуда, в частности, следует, что элементы каждой строки, каждого столбца и главной диагонали образуют невозрастающие последовательности:

$$\mathbf{e}_n = \mathbf{r}_{n,0} \geq \mathbf{r}_{n,1} \geq \mathbf{r}_{n,2} \geq \ldots \geq \mathbf{r}_{n,m} \geq \ldots$$

$$\mathbf{r}_{0,m} \geq \mathbf{r}_{1,m} \geq \mathbf{r}_{2,m} \geq \mathbf{r}_{3,m} \geq \ldots \geq \mathbf{r}_{n,m} \geq \ldots$$

$$\mathbf{e}_0 = \mathbf{r}_{0,0} \geq \mathbf{r}_{1,1} \geq \mathbf{r}_{2,2} \geq \mathbf{r}_{3,3} \geq \ldots \geq \mathbf{r}_{n,n} \geq \ldots$$

Всюду далее мы будем рассматривать линейные пространства $\mathbf{E}$ с введенными выше структурами подпространств полиномов и совокупностей рациональных функций, называя их для краткости так: линейное пространство с введенными выше структурами.

Основной задачей является нахождение условий, гарантирующих совпадение или различие значений определенных элементов в таблице Чебышева. Будут рассматриваться две постановки задачи: прямая и обратная. В случае прямой постановки будут исследоваться зависимости на количество совпадений некоторых последовательно идущих в столбце элементов таблицы, то есть осуществление ситуации $\mathbf{r}_{n,m} = \mathbf{r}_{n,m+1} = \ldots = \mathbf{r}_{n,m+k}$, от наличия совпадения элементов в строке, то есть $\mathbf{r}_{n',m'} = \mathbf{r}_{n'+1,m'} = \ldots = \mathbf{r}_{n'+k',m'}$. В качестве исследуемой строки удобно рассматривать нулевую, содержащую величины полиномиальных уклонений, и считать, что исследуемый столбец "выходит" из того элемента нулевой строки, с которого начинаются указанные совпадения; этому, например, отвечают равенства $m = 0$, $m' = 0$, $n = n'$. В случае обратной постановки считаем, что цепочка равенств элементов некоторого столбца осуществляется начиная с нулевой строки, рассматриваемая строка также является нулевой, а исследуемая цепочка равенств, если она существует, начинается с элемента выше указанного столбца. Эти две задачи можно интерпретировать как вопросы о неулучшаемости приближения рациональными функциями при увеличении "степени знаменателя", если при увеличении "степени числителя" нет уменьшения величины наименьшего уклонения; и наоборот.

Иногда, однако, возможно лишь получение информации о номере элемета, до которого цепочка равенств не может быть продолжена. Проиллюстрируем это утверждением из работы А. Л. Левина и В. М. Тихомирова [1, Теорема 3], где $\mathbf{E} = A^1_\infty$ — банахово пространство функций $f(z)$, аналитических при $|z| < 1$ и непрерывных в замкнутом круге $|z| \le 1$ с нормой $||f|| = \max_{|z|=1} |f(z)|$. Пусть известно, что многочлен $P^0_k(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_k z^k$, $a_k \neq 0$, есть полином наилучшего приближения для $f(z)$ и $n+1$ — первый номер, превосходящий k, такой, что $\mathbf{e}_k(f) = \mathbf{e}_n(f) > \mathbf{e}_{n+1}(f)$. Тогда $\mathbf{e}_n(f) > \mathbf{r}_{n,n}(f)$. Приведенная выше теорема решает вопрос о том, на сколько достаточно увеличить степень знаменателя для того, чтобы добиться уменьшения величины рационального уклонения в пространстве A^1_∞, если при известном увеличении степени числителя (а конкретнее — степени приближающих полиномов, у которых знаменатель считается нулевой степени) происходит уменьшение величины наилучшего (полиномиального) приближения.

В случае линейного пространства $\mathbf{E}$ с введенными выше структурами получение решений сформулированных выше задач возможно лишь при введении существенных ограничений на рассматриваемые классы полиномов, рациональных функций и функционалов.

Определение 1. *Пусть зафиксированы целые неотрицательные числа k и m. Будем говорить, что в линейном пространстве $\mathbf{E}$ с введенными выше структурами выполнено (k, m)–свойство, если найдутся такие последовательности полиномов $\{P_n \in \mathbf{P}_k\}_{n=1}^\infty$, $\{Q_n \in \mathbf{P}_{k+m}\}_{n=1}^\infty$, рациональных функций $\{R_n \in \mathbf{R}_{k,m}\}_{n=1}^\infty$ и вещественных чисел $\{t_n\}_{n=1}^\infty$, $t_n > 0$, что*

$$\lim_{n\to\infty} t_n = 0, \tag{1}$$

и при $n \to \infty$ выполнены следующие соотношения

$$\begin{cases} \left|\mathbf{e}_k - \mathcal{F}\Big(P_n + \rho_n\Big)\right| < o(t_n), \\ \left|\mathbf{e}_{k+m} - \mathcal{F}\Big(Q_n + \rho_n\Big)\right| < o(1), \end{cases} \tag{2}$$

где элементы $\rho_n \in \mathbf{E}$ определяются из равенств

$$R_n = (1 - t_n) \cdot P_n + t_n \cdot Q_n + \rho_n. \tag{3}$$

Пример 1. Продемонстрируем реализацию (k, m)-свойства в нормированном пространстве $\mathbf{E} = C[a, b]$. Пусть $f \in C[a, b]$, $\mathcal{F}(h) = ||f - h||$. Считаем, что система $\mathcal{G}$, образующая полиномы, есть система мономов: $g_n(x) = x^n$. Обозначим полиномы наилучшего приближения функции f степени n как P^0_n, то есть $\mathbf{e}_k(f) = ||f - P^0_k||$, $\mathbf{e}_{k+m}(f) = ||f - P^0_{k+m}||$. Очевидно, что $\partial P^0_k \le \partial P^0_{k+m}$, следовательно, возможно поделить полином P^0_{k+m} на полином P^0_k с остатком. Представим результат этой операции в виде

$$P^0_{k+m} = P^0_k \cdot \Big(V + 1\Big) + U = P^0_k + U + P^0_k \cdot V,$$

где U и V — полиномы, причем $\partial U \le \partial P^0_k$, а $\partial V = \partial P^0_{k+m} - \partial P^0_k$. При достаточно малых значениях параметра $t \in (0, T)$ рассмотрим рациональную функцию

$$R(t) = \frac{P_k^0 + t\cdot U}{1-t\cdot V} = \left(P_k^0 + t\cdot U\right)\cdot\left(1 + t\cdot V + t^2\cdot g\right) =$$
$$= P_k^0 + t\cdot U + t\cdot P_k^0\cdot V + t^2\cdot\hat{g} =$$
$$= (1-t)\cdot P_k^0 + t\cdot\left(P_k^0 + U + P_k^0\cdot V\right) + t^2\cdot\hat{g} =$$
$$= (1-t)\cdot P_k^0 + t\cdot P_{k+m}^0 + t^2\cdot\hat{g}.$$

Очевидно, что $\hat{g}$ — рациональная функция, при $t\in(0,T)$ норма $||\hat{g}||$ ограничена, а также

$$\mathbf{e}_k(f) - C\cdot t^2 \le \mathcal{F}\left(P_k^0 + t^2\cdot\hat{g}\right) = \left\|f - P_k^0 - t^2\cdot\hat{g}\right\| \le \mathbf{e}_k + C\cdot t^2.$$

Выберем произвольную последовательность $t_n\in(0,T)$, $t_n\to 0$. Тем самым для доказательства выполнения (k, m)-свойства, где последовательности полиномов $P_n\equiv P_k^0$, $Q_n\equiv P_{k+m}^0$ стационарны, что автоматически дает выполнение соотношений (2), остается лишь установить, когда рациональная функция $R_n = R(t_n)\in\mathbf{R}_{k,m}$. Это выполняется при $V\in\mathbf{P}_m$, то есть при $\partial P_{k+m}^0 - \partial P_k^0 \le m$, что всегда верно, если $\partial P_k^0 = k$. Именно этот случай в пространстве A_∞^1 и был рассмотрен в работе [1, Теорема 3].

Установим в общем случае ограничение на возможную длину вертикальной цепочки равенств элементов таблицы величин рациональных уклонений при наличии ограничения на длину горизонтальной цепочки равенств (в нулевой строке).

Теорема 1. *Пусть* $\mathbf{E}$ *— линейное пространство с введенными выше структурами. Фиксируем целое неотрицательное число* m *и натуральное число* k *и предполагаем, что выполнено* $(k, m+1)$*-свойство. Пусть* $\mathbf{e}_k > \mathbf{e}_{k+m+1}$*, тогда* $\mathbf{e}_k > \mathbf{r}_{k,m+1}$.

Доказательство. Последовательно используем формулу (3), выпуклость функционала $\mathcal{F}$ на рациональных функциях и неравенства (2). Тогда получаем соотношения

$$\mathbf{r}_{k,m+1} \le \mathcal{F}\left(R_n\right) = \mathcal{F}\left((1-t_n)\cdot P_n + t_n\cdot Q_n + \rho_n\right) =$$

$$= \mathcal{F}\left((1-t_n)\cdot\left[P_n+\rho_n\right] + t_n\cdot\left[Q_n+\rho_n\right]\right) \le$$
$$\le (1-t_n)\cdot\mathcal{F}\left(P_n+\rho_n\right) + t\cdot\mathcal{F}\left(Q_n+\rho_n\right) \le$$
$$\le (1-t_n)\cdot\left(\mathbf{e}_k + o(t_n)\right) + t_n\cdot\left(\mathbf{e}_{k+m+1} + o(1)\right) =$$
$$= (1-t_n)\cdot\mathbf{e}_k + t_n\cdot\mathbf{e}_{k+m+1} + o(t_n) =$$
$$= \mathbf{e}_k - t_n\cdot\left(\mathbf{e}_k - \mathbf{e}_{k+m+1}\right) + o(t_n).$$

Окончательное неравенство имеет вид

$$\mathbf{e}_k \ge \mathbf{r}_{k,m+1} + t_n\cdot\left(\mathbf{e}_k - \mathbf{e}_{k+m+1}\right) + o(t_n).$$

Предположение $\mathbf{e}_k = \mathbf{r}_{k,m+1}$ приводит к противоречию из-за строгого неравенства $\mathbf{e}_k > \mathbf{e}_{k+m+1}$ и условия $t_n\to 0$ при $n\to\infty$. Теорема доказана.

Будем говорить, что линейное пространство $\mathbf{E}$ с введенными выше структурами принадлежит *основному классу*, если оно является нормированным пространством, совокупность всех полиномов в нем образует алгебру с единицей g_0 и в этой алгебре возможно деление полинома на полином с остатком, для любого полинома $P\in\mathbf{P}_m$ существует число $T>0$ такое, что при $t\in(0,T)$ элемент $g_0 - t\cdot P$ имеет обратный по умножению

$$(g_0 - t\cdot P)\cdot(g_0 - t\cdot P)^{-1} = g_0, \quad (g_0 - t\cdot P)^{-1}\in\mathbf{E},$$

причем в этом пространстве возможно разложение этого обратного элемента $(g_0 - t\cdot P)^{-1}$ по степеням $t\in(0,T)$ в виде

$$(1 - t\cdot P)^{-1} = g_0 + t\cdot P + o(t)\cdot\hat{g}, \quad ||\hat{g}|| \le C = C(P),$$

сложение двух рациональных функций не выводит из класса рациональных функций и $\mathcal{F}(h) = ||f-h||$ для фиксированного $f\in\mathbf{E}$. Следовательно, при любом значении степени n существует полином наилучшего приближения $P_n\in\mathbf{P}_n$ элемента f в силу конечномерности подпространства полиномов степени не выше n. Примерами линейных пространств *основного класса* являются нормированные пространства $C[a,b]$, $L_p[a,b]$, A_∞^R, A_p^R и многие другие.

Следствие 1.1. *Пусть линейное пространство* $\mathbf{E}$ *принадлежит основному классу,* $f \in \mathbf{E}$. *По определению считаем величину* $\mathbf{e}_{-1}(f) = +\infty$. *Зафиксируем целые неотрицательные числа* k *и* m. *Если* $\mathbf{e}_{k-1}(f) > \mathbf{e}_k(f) > \mathbf{e}_{k+m+1}(f)$, *тогда* $\mathbf{e}_k(f) > \mathbf{r}_{k,m+1}(f)$.

Доказательство. Для того, чтобы, воспользовавшись теоремой, получить доказательство этого следствия, достаточно проверить выполнение $(k,\, m+1)$–свойства в рассматриваемом случае. Действительно, в силу определения *основного класса* линейных пространств с введенными выше структурами и существования полинома наилучшего приближения любой степени, нужно лишь установить, что из $\mathbf{e}_k(f) = ||f - P_k||$ следует $\partial P_k = k$, что очевидно в силу неравенства $\mathbf{e}_{k-1}(f) > \mathbf{e}_k(f)$. Следствие доказано.

Выше были установлены ограничения на длину вертикальной цепочки равенств в таблице из величин $\mathbf{r}_{n,m}$ при существовании ограничения на длину горизонтальной цепочки равенств в нулевой строке этой таблицы. Однако, наличие в нулевой строке цепочки равенств (любой длины) еще не гарантирует существование вертикальной цепочки равенств даже длины единица, то есть из $\mathbf{e}_k = \mathbf{e}_{k+m}$ совсем не следует равенство величин $\mathbf{e}_k = \mathbf{r}_{k,0}$ и $\mathbf{r}_{k,1}$, примеры этому были преведены в работе [2, Следствие 2]. Тем не менее, вертикальная цепочка равенств гарантирует наличие горизонтальной цепочки равенств в таблице Чебышева.

Теорема 2. *Пусть* $\mathbf{E}$ *— линейное пространство с введенными выше структурами. Фиксируем целое неотрицательное число* k *и натуральное число* m. *Предполагаем, что выполнено* (k, m)*–свойство. Пусть* $\mathbf{e}_k = \mathbf{r}_{k,m}$, *тогда* $\mathbf{e}_k = \mathbf{e}_{k+m}$.

Доказательство. Как и в предыдущей теореме, последовательно воспользуемся формулой (3), выпуклостью функционала $\mathcal{F}$ на обобщенных рациональных функциях и неравенствами (2). Тогда получаем соотношения

$$\mathbf{e}_k = \mathbf{r}_{k,m} \le \mathcal{F}\Big(R_n\Big) = \mathcal{F}\Big((1-t_n)\cdot P_n + t\cdot Q_n + \rho_n\Big) =$$

$$= \mathcal{F}\Big((1-t_n)\cdot\Big[P_n + \rho_n\Big] + t_n\cdot\Big[Q_n+\rho_n\Big]\Big) \le$$
$$\le (1-t_n)\cdot\mathcal{F}\Big(P_n+\rho_n\Big) + t_n\cdot\mathcal{F}\Big(Q_n+\rho_n\Big) \le$$
$$\le (1-t_n)\cdot\Big(\mathbf{e}_k + o(t_n)\Big) + t_n\cdot\Big(\mathbf{e}_{k+m} + o(1)\Big) =$$
$$= (1-t_n)\cdot\mathbf{e}_k + t_n\cdot\mathbf{e}_{k+m} + o(t_n) =$$
$$= \mathbf{e}_k - t_n\cdot\Big(\mathbf{e}_k - \mathbf{e}_{k+m}\Big) + o(t_n).$$

Окончательное соотношение имеет вид

$$\mathbf{e}_k = \mathbf{r}_{k,m} \le \mathbf{e}_k - t_n\cdot\Big(\mathbf{e}_k - \mathbf{e}_{k+m}\Big) + o(t_n).$$

Предположение $\mathbf{e}_k > \mathbf{e}_{k+m}$ приводит к противоречию из-за условия $t_n \to 0$ при $n \to \infty$. Теорема доказана.

Это предложение обобщает в случае линейного пространства $\mathbf{E}$ с введенными выше структурами утверждения работы [3, Теорема 3, 6], где Н. С. Вячеславовым и А. К. Рамазановым были рассмотрены пространства типа L_p. Отдельно отметим, что в пространствах с нормой типа L_p для некоторых функций возможно существование вертикальных цепочек равенств в таблице Чебышева: в пространстве Харди $H_2(\mathcal{D})$ аналитических внутри единичного круга $\mathcal{D}$ функций с метрикой типа L_2 на границе существуют такие функции f, что $\mathbf{e}_1(f) = \mathbf{r}_{1,1}(f) \neq 0$, [4] — однако о возможности существования вертикальной цепочки равенств длины хотя бы два в этих пространствах пока ничего не известно.

Следствие 2.1. *Пусть линейное пространство* $\mathbf{E}$ *принадлежит основному классу,* $f \in \mathbf{E}$. *По определению считаем величину* $\mathbf{e}_{-1}(f) = +\infty$. *Зафиксируем целое неотрицательное число* k *и натуральное число* m. *Если* $\mathbf{e}_{k-1}(f) > \mathbf{e}_k(f) = \mathbf{r}_{k,m}(f)$, *тогда* $\mathbf{e}_k(f) = \mathbf{e}_{k+m}(f)$.

Доказательство. Для того, чтобы, воспользовавшись теоремой, получить доказательство этого следствия, достаточно проверить выполнение $(k,\, m)$–свойства в рассматриваемом случае.

Действительно, в силу определения *основного класса* линейных пространств с введенными выше структурами и существования полинома наилучшего приближения любой степени, нужно лишь установить, что из $\mathbf{e}_k(f) = ||f - P_k||$ следует $\partial P_k = k$, что очевидно в силу неравенства $\mathbf{e}_{k-1}(f) > \mathbf{e}_k(f)$. Следствие доказано.

Как показывает практический подход к вопросу формирования совокупности рациональных функций, основанный на существовании обратных к полиномам по операции умножения элементов, иногда необходимы несколько иные условия, чем определение 1.

Определение 2. *Пусть зафиксированы целые неотрицательные числа s, k и m, причем $k \geq s$. Будем говорить, что в пространстве* $\mathbf{E}$ *выполнено (s, k, m)-свойство, если найдутся такие последовательности полиномов $\{P_n \in \mathbf{P}_k\}_{n=1}^{\infty}$, $\{Q_n \in \mathbf{P}_{k+m}\}_{n=1}^{\infty}$, рациональных функций $\{R_n \in \mathbf{R}_{k,m+s}\}_{n=1}^{\infty}$ и вещественных чисел $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$, $t_n > 0$, что выполнены соотношения 1, 2 и 3.*

Отметим отличие от предыдущего определения: "степень знаменателя" рациональной функции допускается большей на "величину дефекта" s, чем просто разница между величинами индексов соответствующих полиномиальных подпространств. Тем самым эквивалентны $(0, k, m)$-свойство и (k, m)-свойство.

Пример 2. В качестве иллюстрации выполнения только что введенного (s, k, m)-свойства опять, как и в предыдущем примере, рассмотрим нормированное пространство $\mathbf{E} = C[a, b]$, где $f \in C[a, b]$ и $\mathcal{F}(h) = ||f - h||$, подпространства полиномов $\mathbf{P}_n$ порождены соответствующими конечными системами мономов, P_n^0 обозначает полином наилучшего приближения степени не выше n функции f в равномерной норме. Аналогично рассмотрим соотношения деления полинома P_{k+m}^0 на полином P_k^0 с остатком

$$P_{k+m}^0 = P_k^0 + U + P_k^0 \cdot V,$$

представление при достаточно малом $T > 0$, $t \in (0, T)$ рациональной функции

$$R(t) = \frac{P_k^0 + t \cdot U}{1 - t \cdot V} = (1 - t) \cdot P_k^0 + t \cdot P_{k+m}^0 + t^2 \cdot \hat{g}$$

и систему неравенств

$$\mathbf{e}_k(f) - C \cdot t^2 \leq \mathcal{F}\Big(P_k^0 + t^2 \cdot \hat{g}\Big) = \Big\|f - P_k^0 - t^2 \cdot \hat{g}\Big\| \leq \mathbf{e}_k + C \cdot t^2.$$

Вновь выберем $t_n \to 0$, считаем $P_n \equiv P_k^0$, $Q_n \equiv P_{k+m}^0$, тогда (s, k, m)-свойство заведомо выполняется при $\partial P_k^0 \geq k - s$, то есть при $\mathbf{e}_{k-s-1}(f) > \mathbf{e}_k(f)$.

Не меняя доказательств, из приведенных выше утверждений получаем следующее.

Теорема 3. *Пусть* $\mathbf{E}$ *— линейное пространство с введенными выше структурами. Зафиксируем целые неотрицательные числа m и s и натуральное число $k \geq s$. Предполагаем, что выполнено $(s, k, m+1)$-свойство. Пусть $\mathbf{e}_k > \mathbf{e}_{k+m+1}$, тогда $\mathbf{e}_k > \mathbf{r}_{k,m+s+1}$.*

Это означает, что если горизонтальная цепочка равенств в нулевой строке таблицы из величин $\mathbf{r}_{n,m}$ начинается не с рассматриваемого столбца, а несколько ранее (на s элементов), то заведомое уменьшение величины обобщенного рационального уклонения в этом столбце гарантировано позже (на те же s элементов).

Следствие 3.1. *Пусть линейное пространство* $\mathbf{E}$ *принадлежит основному классу, $f \in \mathbf{E}$. По определению считаем величину $\mathbf{e}_{-1}(f) = +\infty$. Зафиксируем целые неотрицательные числа s, $k \geq s$ и m. Если $\mathbf{e}_{k-s-1}(f) > \mathbf{e}_k(f) > \mathbf{e}_{k+m+1}(f)$, тогда $\mathbf{e}_k(f) > \mathbf{r}_{k,m+s+1}(f)$.*

В работе [2] было доказано, что в пространстве Харди $H_2(\mathcal{D})$, образованном аналитическими в единичном круге $\mathcal{D}$ функциями с нормой типа L_2 на границе, принадлежащем *основному классу* линейных пространств $\mathbf{E}$ с введенными выше структурами, для любой $f \in H_2(\mathcal{D})$ и любого натурального числа k из предположения $\mathbf{e}_k(f) > 0$ следует строгое неравенство $\mathbf{e}_{k-1}(f) > \mathbf{r}_{k,1}(f)$.

Результаты о строгом убывании величин наилучших рациональных приближений при одновременном увеличении степени и числителя и знаменателя в пространствах с нормой типа L_p при некоторых дополнительных условиях излагались в разные годы в работах [5, 6, 7, 3, 8]. Это показывает, что не во всех линейных пространствах, даже принадлежащих *основному классу*, вертикальные и горизонтальные цепочки равенств в таблице из элементов $\mathbf{r}_{n,m}$ могут пересекаться в виде типа буквы "Т" (и сразу образуется целый блок равенств, так как из предположения $\mathbf{r}_{n,m} = \mathbf{r}_{n+n',m+m'}$ в силу градуированности совокупности рациональных функций по обоим индексам собственной степени следуют соотношения $\mathbf{r}_{n,m} = \mathbf{r}_{n+k,m+l}$, где $k = 1, 2, \ldots, n'$, а $l = 1, 2, \ldots, m'$), а возможно лишь в виде типа буквы "Г", не продолжаясь по горизонтали влево от вертикальной цепочки равенств, уходящей вниз. Однако, как показал Е. П. Долженко в работе [9], в пространстве $C[a, b]$ существует функция f такая, что в таблице Чебышева имеются целые блоки равенств, причем сколь угодно большие по "высоте" и "ширине" одновременно.

Используя определение (s, k, m)-свойства, получаем еще одно утверждение.

Теорема 4. *Пусть $\mathbf{E}$ — линейное пространство с введенными выше структурами. Зафиксируем целые неотрицательные числа s и $k \geq s$ и натуральное число m. Предполагаем, что выполнено (s, k, m)-свойство. Пусть $\mathbf{e}_k = \mathbf{r}_{k,m+s}$, тогда $\mathbf{e}_k = \mathbf{e}_{k+m}$.*

Это означает, что если в таблице из величин $\mathbf{r}_{n,m}$ при наличии вертикальной цепочки равенств, начинающейся с элемента из нулевой строки, невозможно гарантировать, что горизонтальная цепочка равенств в нулевой строке начнется именно с этого элемента, а лишь не ранее, чем s элементов влево, то для того, чтобы вправо от все того же выделенного (на пересечении) элемента нулевой строки горизонтальная цепочка равенств продолжалась на длину m, достаточно иметь вертикальную цепочку равенств суммарной длины: $s + m$.

Следствие 4.1. *Пусть линейное пространство $\mathbf{E}$ принадлежит основному классу, $f \in \mathbf{E}$. По определению считаем величину $\mathbf{e}_{-1}(f) = +\infty$. Зафиксируем целые неотрицательные числа s и $k \geq s$ и натуральное число m. Если $\mathbf{e}_{k-s-1}(f) > \mathbf{e}_k(f) = \mathbf{r}_{k,m+s}(f)$, тогда $\mathbf{e}_k(f) = \mathbf{e}_{k+m}(f)$.*

В качестве приложения последней теоремы рассмотрим задачу о совпадении обобщенных полиномиальных и обобщенных рациональных главной диагонали и той же степени уклонений в линейном пространстве $\mathbf{E}$ с введенными выше структурами, то есть проблему осуществления равенств $\mathbf{e}_n = \mathbf{r}_{n,n}$ для всех или некоторых натуральных значений индекса n. Разные варианты постановки и решения этой задачи встречались, например, в [10, 1, 9]. В качестве примера приведем утверждение из работы [1, Следствие], где рассмотрен случай пространства A^1_∞. Пусть зафиксирована функция $f \in A^1_\infty$, если для любого натурального числа n выполнены равенства $\mathbf{e}_n(f) = \mathbf{r}_n(f)$, тогда существует целое неотрицательное число k такое, что

$$\mathbf{e}_0(f) = \ldots = \mathbf{e}_{k-1}(f) > \mathbf{e}_k = \mathbf{e}_{k+1}(f) = \ldots = \mathbf{e}_n(f) = \ldots$$

При $k = 0$ надо считать, что величины полиномиальных приближений функции f всех степеней равны между собой и, в силу полноты системы полиномов в пространстве A^1_∞, равны нулю, то есть $f \equiv 0$. В случае линейного пространства с введенными выше структурами нам потребуется дополнительное

Определение 3. *Пусть зафиксировано целое неотрицательное число d. Будем говорить, что в линейном пространстве $\mathbf{E}$ определена d-цепочка, если для любого целого неотрицательного числа j выполнено $(j, d + j, 1)$-свойство.*

Пример 3. Как и ранее, иллюстрацией к этому определению будет служить нормированное пространство $\mathbf{E} = C[a, b]$, где элемент $f \in C[a, b]$ и $\mathcal{F}(h) = ||f - h||$, подпространства полиномов $\mathbf{P}_n$ порождены соответствующими конечными системами мономов. Если нулевая строка в таблице из величин $\mathbf{r}_{n,m}(f)$ имеет начало вида $\mathbf{e}_0(f) = \ldots = \mathbf{e}_{d-1}(f) > \mathbf{e}_d(f)$, то в этом пространстве определена d-цепочка.

Если в линейном пространстве $\mathbf{E}$, принадлежащем *основному классу*, для некоторого натурального числа d выполнено строгое неравенство $\mathbf{e}_{d-1}(f) > \mathbf{e}_d(f)$, $f \in \mathbf{E}$, то в этом пространстве определена d-цепочка; 0-цепочка определена всегда.

Используя результат предыдущей теоремы, получаем необходимое условие на решение задачи о виде нулевой строки в таблице Чебышева при выполнении равенств $\mathbf{e}_n = \mathbf{r}_{n,n}$ для любого натурального числа n.

Теорема 5. *Пусть в линейном пространстве $\mathbf{E}$ с введенными выше структурами для некоторого натурального числа d определена d-цепочка. Если для любого натурального числа n выполнены равенства $\mathbf{e}_n = \mathbf{r}_{n,n}$, тогда нулевая строка в таблице из величин $\mathbf{r}_{n,m}$ имеет вид*

$$\mathbf{e}_d = \ldots = \mathbf{e}_{d+n} = \ldots$$

Доказательство будем вести методом "от противного". Предположим, что существует целое неотрицательное число j такое, что нулевая строка в таблице из величин $\mathbf{r}_{n,m}$ имеет структуру

$$\mathbf{e}_d = \ldots = \mathbf{e}_{d+j} > \mathbf{e}_{d+j+1}.$$

Для того, чтобы использовать предыдущую теорему, положим

$$k = d + j, \quad s = j, \quad m = 1,$$

где отдельно отметим, что $k \geq s + 1$, тогда наше предположение примет вид

$$\mathbf{e}_{k-s} = \ldots = \mathbf{e}_k > \mathbf{e}_{k+1},$$

причем в линейном пространстве $\mathbf{E}$ выполнено $(s,\, k,\, 1)$-свойство и по условию $\mathbf{e}_k = \mathbf{r}_{k,s+1} = \mathbf{r}_{k,k}$. Тогда, в силу предыдущей теоремы, $\mathbf{e}_k = \mathbf{e}_{k+1}$, что противоречит нашему предположению о структуре нулевой строки. Теорема доказана.

Следствие 5.1. *Пусть линейное пространство $\mathbf{E}$ принадлежит основному классу, $f \in \mathbf{E}$. Если для любого натурального*

числа n выполнены равенства $\mathbf{e}_n(f) = \mathbf{r}_{n,n}(f)$, тогда либо все элементы нулевой строки в таблице из величин $\mathbf{r}_{n,m}(f)$ равны между собой $\mathbf{e}_0(f) = \mathbf{e}_n(f)$, либо для некоторого натурального числа k нулевая строка имеет структуру

$$\mathbf{e}_0(f) = \mathbf{e}_{k-1}(f) > \mathbf{e}_k(f) = \ldots = \mathbf{e}_{k+n}(f) = \ldots.$$

Доказательство будем вести методом "от противного". Предположим, что существуют натуральные числа d и j такие, что нулевая строка в таблице из величин $\mathbf{r}_{n,m}(f)$ имеет структуру

$$\mathbf{e}_0(f) = \mathbf{e}_{d-1}(f) > \mathbf{e}_d(f) = \mathbf{e}_{d+j-1}(f) > \mathbf{e}_{d+j}(f).$$

Как отмечалось выше, в силу неравенства $\mathbf{e}_{d-1}(f) > \mathbf{e}_d(f)$ в линейном пространстве $\mathbf{E}$ определена d-цепочка. Тогда,по теореме, для любого натурального числа j выполнено равенство $\mathbf{e}_d(f) = \mathbf{e}_{d+j}(f)$. Полученное противоречие доказывает это следствие.

Итак, ранее разобран вопрос о структуре нулевой строки в таблице из величин $\mathbf{r}_{n,m}$ в линейном пространстве $\mathbf{E}$ при условии совпадения $\mathbf{e}_n$ и $\mathbf{e}_{n,n}$ для всех натуральных значений индекса n. В случае, если линейное пространство $\mathbf{E}$ является простым примером и совокупность всех полиномов в нем полна, получаем, что из выполнения равенств $\mathbf{e}_n(f) = \mathbf{r}_{n,n}(f)$, $f \in \mathbf{E}$, для всех степеней n, следует, что f является полиномом некоторой степени. Возможное значение этой степени зависит от пространства $\mathbf{E}$. Например, Б. Боэм (Boehm) в работе [10, Теорема 3] доказал, что в пространстве $C[a,\, b]$ условию $\mathbf{e}_n(f) = \mathbf{r}_{n,n}(f)$ для всех натуральных значений n удовлетворяют функции вида $f(x) = a + b \cdot T_k(x)$, где a и b — константы, а T_k — многочлен Чебышева, приведенный к отрезку $[a,\, b]$, и только эти функции. В работе [6, Теорема 1] А. Л. Левиным доказано, что в случае, если линейное пространство $\mathbf{E} = C(\mathcal{X})$, где $\mathcal{X}$ есть компакт на комплексной плоскости, ограниченный линией уровня $|P_N(z)| = 1$, где P_N — многочлен некоторой степени, то решением изложенной выше задачи являются полиномы T_{Nk}, пропорциональные P_N, то есть $\mathbf{r}_{Nk-1,Nk-1}(T_{Nk}) = ||T_{Nk}||$.

В той же работе [6, Теорема 2] доказано, что если компакт $\mathcal{X}$ ограничен жордановой кривой Γ, а линейное нормированное пространство $\mathbf{E} = L_p(\Gamma)$, $1 \le p < \infty$, которое принадлежит *основному классу*, то функциями, у которых совпадают величины полиномиальных и рациональных главной диагонали уклонений одинаковых степеней, то есть $\mathbf{e}_n(f) = \mathbf{r}_{n,n}(f)$ при всех натуральных значениях n, являются линейные функции и только они. Этот факт следует из доказанного там же утверждения о нетривиальном строгом убывании величин рациональных главной диагонали уклонений, то есть того, что для любой $f \in L_p(\Gamma)$, коль скоро $\mathbf{r}_{n,n}(f) > 0$, тогда $\mathbf{r}_{n,n}(f) > \mathbf{r}_{n+1,n+1}(f)$.

Для каждого натурального числа n символом $N(n)$ обозначим количество индексов $m \in [0, n]$, $n \ge 1$, при которых совпадают величины $\mathbf{e}_m$ и $\mathbf{r}_{m,m}$.

Следствие 5.2. *Пусть линейное пространство* $\mathbf{E}$ *принадлежит основному классу,* $f \in \mathbf{E}$. *Если строго монотонна конечная последовательность* $\{\mathbf{r}_{n,n}(f)\}_{n=0}^{k}$, *тогда при* $n \le k$ *верно неравенство*

$$N(n) \le 2 + \log_2 n. \tag{4}$$

Доказательство. Пусть для некоторого натурального значения $m \le k$ выполнено равенство $\mathbf{e}_m(f) = \mathbf{r}_{m,m}(f)$. В силу строгой монотонности последовательности величин $\mathbf{r}_n(f)$ на участке $n \le k$, имеет место соотношение $\mathbf{r}_{m-1,m-1}(f) > \mathbf{r}_{m,m}(f) = \mathbf{e}_m(f)$, что дает строгое неравенство $\mathbf{e}_{m-1}(f) > \mathbf{e}_m(f)$, а это в свою очередь влечет выполнение (m, m)-свойства, а значит $\mathbf{e}_m(f) = \mathbf{e}_{2m}(f)$, что и дает нужную оценку.

Этот результат является обобщением на случай линейного пространства $\mathbf{E}$, принадлежащего *основному классу*, результата из работы [3, Следствие к теореме 3]. Неравенство (4) интересно сравнить с полученными Е. П. Долженко в работе [9] примерами непрерывных функций с различными дополнительными свойствами, для равномерных полиномиальных и рациональных уклонений

которых осуществляется следующее соотношение

$$\lim_{n\to\infty} \frac{N(n)}{n} = 1.$$

В случае *основного класса* линейных пространств с введенными выше структурами подобные результаты были получены автором в работе [11].

В заключение автор выражает благодарность доценту МГУ Н. С. Вячеславову за обсуждение постановок задач и методов их решений и профессору В. Г. Зинову за дружеские и стимулирующие дискуссии.

Литература

[1] Левин А. Л., Тихомиров В. М. О приближении аналитических функций рациональными. // ДАН СССР. 1967. Т. **174**(2). С. 279–282.

[2] Назаренко М. А. Некоторые свойства рациональных аппроксимаций степени $(k, 1)$ в пространстве Харди $H_2(\mathcal{D})$. // ОИЯИ, Р5-94-292, Дубна, 1994.

[3] Вячеславов Н. С., Рамазанов А. К. О степени рациональных функций наилучшего приближения в $L_p(\mathbf{R}^m)$. // Матем. заметки. 1993. Т. **53**(2). С. 37–45.

[4] Назаренко М. А. О возможности совпадения полиномиальной и рациональной аппроксимаций первой степени в пространстве $H_2(\mathcal{D})$. // Сообщения ОИЯИ, Р5-93-284, Дубна, 1993.

[5] Cheney E. W., Goldstein A. A. Mean-square approximation by generalized rational functions. // Math. Z. 1967. V. 95. P. 232–241.

[6] Левин А. Л. Приближение рациональными функциями в комплексной плоскости. // Матем. заметки. 1971. Т. **9**(2). С. 121–130.

[7] Махмудов Х. М. О наилучших рациональных приближениях функций комплексного переменного, суммируемых по площади. // Матем. заметки. 1989. Т. **45**(4). С. 89–94.

[8] Вячеславов Н. С., Рамазанов А. К. Интерполяционные свойства рациональных функций наилучшего приближения в среднем квадратическом на окружности и в круге. // Матем. заметки. 1995. Т. **57**(2). С. 228–239.

[9] Долженко Е. П. Сравнение скоростей рациональной и полиномиальной аппроксимаций. // Матем. заметки. 1967. Т. **1**(3). С. 313 - 320.

[10] Boehm B. Functions, whose best rational Chebyshew approximations are polinomials. // Numer. Math. 1964. Bd. **6**. Heft 3. P. 235-242.

[11] Nazarenko M. A. Relations between rational and polinomial approximations in the Banach spaces. // JINR, E5-94-145, Dubna, 1994.