СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р5-95-456

Р.С.Егикян, Е.П.Жидков

О РЕШЕНИИ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ РАССЕЯНИЯ НА ВСЕЙ ОСИ

1995

Исследованию обратной задачи рассеяния (ОЗР) посвящено большое количество работ. Обзор проведенных исследований содержится в работах [1,2]. Большинство исследований относится к случаю задачи на полуоси, который исследован достаточно хорошо. Задача на всей оси привлекала не такое пристальное внимание. Математический аппарат ОЗР на всей оси представляет достаточный интерес и заслуживает изучения. В работе авторов [3] решение ОЗР на полуоси было представлено в замкнутом виде с использованием аппарата преобразования Фурье. Настоящая работа является продолжением работы [3] и ставит своей целью получение аналогичного результата, следуя той же методике.

Будем рассматривать оператор Шредингера

$$-\frac{d^2}{dx^2} + v(x) = 0, \qquad (1)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} (1+|x|)|v(x)|dx < \infty,$$

где потенциал $v(x)$ предполагается вещественной измеримой функцией, удовлетворяющей условию.

Введем данные рассеяния для нашей задачи. Существуют решения $f_1(x,k)$ и $f_2(x,k)$ уравнения (1), которые имеют асимптотики:

$$f_1(x,k) = e^{ikx} + o(1),$$

$$f_2(x,k) = e^{-ikx} + o(1), \quad x \to \infty.$$

При вещественных $k \neq 0$ пары $f_1(x,k), f_1(x,-k)$ и $f_2(x,k), f_2(x,-k)$ являются фундаментальными системами решений уравнения (1). Вронскиан $\{f_1, \bar{f}_1\} = f_1'\bar{f}_1' - f_1\bar{f}_1'$ $f_1(x,k)$ не зависит от x и совпадает со своим значением при $x \to \infty$, которое можно вычислить с помощью асимптотик для

решения $f_1(x,k)$ и его производной. Можно показать [2], что

$$\{f_1(x,k), f_1(x,-k)\} = 2ik$$

и

$$\{f_2(x,k), f_2(x,-k)\} = -2ik.$$

Любое решение уравнения (1) может быть представлено в виде линейной комбинации решений $f_1(x,k)$ и $f_1(x,-k)$ или $f_2(x,k)$ и $f_2(x,-k)$. В частности, мы имеем

$$f_2(x,k) = f_1(x,k)c_{11}(k) + f_1(x,-k)c_{12}(k),$$

$$f_1(x,k) = f_2(x,k)c_{22}(k) + f_2(x,-k)c_{21}(k).$$

Отсюда легко следует, что

$$c_{12}(k) = c_{21} = \frac{1}{2ik}\{f_1(x,k), f_2(x,k)\},$$

$$c_{11}(k) = \frac{1}{2ik}\{f_2(x,k), f_1(x,-k)\},$$

$$c_{22}(k) = \frac{1}{2ik}\{f_2(x,-k), f_1(x,k)\}.$$

Четыре функции c_{ij} могут быть записаны в виде матрицы

$$S = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}.$$

Определенная таким образом S-матрица обладает следующими свойствами:

1. унитарность — $c_{11}\bar{c}_{12} + c_{21}\bar{c}_{22} = 0$,
$|c_{11}|^2 + |c_{12}|^2 = |c_{21}|^2 + |c_{22}|^2 = 1$;
2. вещественность — $c_{ij}(-k) = \bar{c}_{ij}(k)$;
3. симметрия — $c_{11}(k) = c_{22}(k)$.

Для уравнения (1) данными рассеяния является S-матрица. Обратная задача состоит в нахождении потенциала $v(x)$ по заданной S-матрице, обладающей свойствами 1-3. В случае задачи на полуоси данными рассеяния является скалярная функция $S(k) = e^{-2i\eta(k)}$. Следует отметить, что с технической точки зрения случай всей оси, рассматриваемый в настоящей работе, проще случая задачи на полуоси [3] несмотря на матричный характер исходных данных рассеяния.

В дальнейшем будем предполагать, что дана S-матрица, и изложим процедуру нахождения потенциала $v(x)$ уравнения (1).

Спектр оператора Шредингера уравнения (1) состоит из непрерывной части на положительной полуоси и конечного числа точек дискретного спектра на отрицательной полуоси. Будем предполагать, что дискретный спектр отсутствует, и ограничимся случаем только непрерывного спектра. Возьмем фурье-прообраз Ω функции c_{12} :

$$c_{12}(k) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \Omega(x) e^{-ikx} dx$$

и рассмотрим следующее уравнение относительно функции A:

$$A(x,y) + \Omega(x+y) + \int\limits_{x}^{\infty} A(x,z)\Omega(z+y)dz = 0, \quad x < y. \tag{2}$$

Потенциал $v(x)$ находится через функцию A, полученную из этого уравнения следующим образом:

$$v(x) = -2\frac{d}{dx}A(x,x). \tag{3}$$

Таким образом, вопрос сводится к решению уравнения (2), являющегося уравнением Гельфанда-Левитана для этой задачи [2]. Уравнение (2) является уравнением с ядром, зависящим от суммы аргументов, и может быть исследовано аналогично уравнению Крейна [3].

Перепишем его в эквивалентном виде

$$A(x,y) + \Omega(x+y) + \int\limits_{-\infty}^{\infty} A(x,-s)\Omega(y-s)ds + B(x,y) = 0, \quad -\infty < y < \infty.$$

Здесь

$$B(x,y) = \begin{cases} 0, & x < y, \\ -\int\limits_{-\infty}^{-x} A(x,-s)\Omega(y-s)ds, & y \le x. \end{cases}$$

И $A(x,y) = 0$ при $y \le x$, $\Omega(s) = 0$ при $s \le 2x$. Меняя знак переменной интегрирования, получим

$$A(x,y) + \Omega(x+y) + \int\limits_{-\infty}^{\infty} A(x,s)\Omega(y+s)ds + B(x,y) = 0.$$

Возьмем преобразование Фурье от этого уравнения. Обозначая тильдой фурье-образы, получим

$$\tilde{A}(x,\lambda) + \tilde{\Omega}(\lambda)e^{-ix\lambda} + \tilde{A}(x,\lambda)\tilde{\Omega}(\lambda) + \tilde{B}(x,\lambda) = 0.$$

$$\left(1 + \tilde{\Omega}(\lambda)\right)\tilde{A}(x,\lambda) + \tilde{\Omega}(\lambda)e^{-ix\lambda} + \tilde{B}(x,\lambda) = 0.$$

Нам потребуется оператор проецирования P, определенный на функциях типа $c + \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} f(t)dt$ и действующий следующим образом:

$$P_+(x)\left(c + \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} f(t)dt\right) = c + \int\limits_{x}^{\infty} e^{i\lambda t} f(t)dt.$$

Функция $(1+\tilde{\Omega})^{-1}$ факторизуется известным образом [3]:

$$\left(1 + \tilde{\Omega}(\lambda)\right)^{-1} = G_+(x,\lambda)G_-(x,\lambda). \tag{4}$$

где функции

$$G_+(x,\lambda) = 1 + \int\limits_{x}^{\infty} g_+(x,t)e^{i\lambda t}dt.$$

$$G_-(x,\lambda) = 1 + \int\limits_x^\infty g_-(x,t)e^{i\lambda t}dt.$$

С учетом (4) получаем из (2)

$$G_+(x,\lambda)\tilde{A}(x,\lambda) + G_-^{-1}(x,\lambda)\hat{\Omega}(\lambda)e^{-ix\lambda} + G_-^{-1}(x,\lambda)\tilde{B}(x,\lambda) = 0.$$

Теперь применим оператор P_+ и получим

$$G_+(x,\lambda)\tilde{A}(x,\lambda) + P_+\left(G_-^{-1}(x,\lambda)\hat{\Omega}(\lambda)e^{-ix\lambda}\right) = 0.$$

Отсюда

$$\tilde{A}(x,\lambda) = -G_+^{-1}(x,\lambda)P_+\left(G_-^{-1}(x,\lambda)\hat{\Omega}(\lambda)e^{-ix\lambda}\right). \tag{5}$$

Формула (5) вместе с (3) дает представление решения ОЗР на оси в замкнутом виде. Заметим, что из проведенных рассуждений следует однозначная разрешимость уравнения Гельфанда-Левитана, полученная независимо от [2].

Литература

[1] Фаддеев Л.Д. Обратная задача квантовой теории рассеяния. УМН, 1959, т. 14, вып. 4, с.57-119.

[2] Фаддеев Л.Д. Обратная задача квантовой теории рассеяния. II. В кн. Совр. пробл. матем. М. ВИНИТИ, 1974, т. 3, с. 93.

[3] Егикян Р.С., Жидков Е.П. Об одном методе решения обратной задачи рассеяния. ОИЯИ, 5-85-366, 1985, Дубна.

Рукопись поступила в издательский отдел
10 ноября 1995 года.