СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р5-95-447

В.Ф.Ковалёв[1], В.В.Пустовалов[2], Д.В.Ширков

ГРУППОВОЙ АНАЛИЗ И РЕНОРМГРУППА

[1]Институт математического моделирования РАН, Москва
[2]Физический институт им.П.Н.Лебедева РАН, Москва

1995

1 Введение

В данной работе решается проблема построения для краевых задач математической физики особого класса симметрий – симметрий ренормгруппового типа. Под "ренормгрупповыми симметриями" мы будем подразумевать симметрии решений относительно преобразований, затрагивающих не только переменные, наличествующие в уравнениях, но и параметры, входящие в решения, в том числе через граничные или пачальные условия.

Актуальность поставленной проблемы связана с эффективностью широко используемого в теоретической физике метода ренормгруппы [1, 2], позволяющего, в частности, улучшать аппроксимационные свойства приближенных решений задач, обладающих указанной симметрией, и восстанавливать правильную структуру поведения решения в окрестности сингулярности, как правило,нарушаемую приближением.

Подобные симметрии впервые привлекли внимание в 50-х гг. в связи с открытием ренормализационной группы [3, 4] в квантовой теории поля. Как выяснилось затем [5, 6, 7], такие симметрии, именуемые ниже ренормгрупповыми или РГ-симметриями, присущи многим задачам современной математической и теоретической физики. Они оказались родственными симметрии степенного самоподобия (автомодельности) и могут рассматриваться как ее функциональное обобщение (функциопальная автомодельность). Как правило, обнаружение ренормгрупповых симметрий в каждом конкретном случае требует нестандартных построений. Поэтому представляет интерес создание регулярного метода конструирования ренормгрупповых симметрий для различных классов математических задач.

Возможность создания регулярного способа построения РГ-симметрий возникает в задачах, описываемых на языке дифференциальных уравнений (ДУ). Такая возможность связана с существованием хорошо развитой теории непрерывных групп (групп Ли) и приложениями этой теории к дифференциальным уравнениям, допускающим подобные группы – групповому анализу. Особенностью составляющего основу группового анализа классического алгоритма Ли и его современных модификаций (см., например, [8, 9, 10]) является универсальность приемов, используемых для отыскания симметрий дифференциальных уравнений. Поэтому естественной является предлагаемая и реализуемая в работе идея применения методов современного группового анализа для отыскания ренормгрупповых симметрий, по крайней мере для тех математических моделей физических систем, которые описываются с помощью дифференциальных или интегродифференциальных уравнений.

Предлагаемые в данной работе способы отыскания РГ-симметрий характеризуются последовательностью следующих основных шагов[1].

---

[1] Необходимо оговориться, что предложенная в данной работе процедура построения ренормализационной группы является новой и качественно отличается от традиционно используемой в теоретической физике. В качестве простейшего примера формального отличия укажем здесь на расширенное толкование нами понятия ренормгруппы.

Первый из них состоит в построении используемого далее для нахождения РГ-симметрий специального многообразия (дифференциального, интегродифференциального, ...), отличающегося, вообще говоря, от многообразия, которое задает система исходных ДУ, описывающих исследуемую физическую систему. В дальнейшем мы будем называть его ренормгрупповым многообразием.

Второй шаг заключается в отыскании допускаемой ренормгрупповым многообразием максимально широкой группы преобразований, которая содержит решение краевой задачи как инвариантное подмногообразие.

Третьим шагом в процессе построения ренормгрупповых симметрий является сужение найденной группы на решении краевой задачи (точном или приближенном). Возникающая при этом группа преобразований (ренормгруппа) представляется набором инфинитезимальных операторов, каждый из которых содержит решение краевой задачи в своем инвариантном многообразии.

На последнем, четвертом шаге инфинитезимальные ренормгрупповые операторы используются для построения конечных преобразований группы и получения аналитического выражения для решения краевой задачи.

Сделаем несколько замечаний, касающихся каждого из этих шагов. Прежде всего остановимся на проблеме построения исходного (ренормгруппового) многообразия и вычисления допускаемой им группы симметрии. Под термином "симметрия" в классическом групповом анализе подразумевается свойство системы ДУ допускать группу Ли локальных точечных преобразований в базисном пространстве всех участвующих в ДУ зависимых и независимых переменных. Алгоритм Ли [8, 9, 10] для вычисления таких симметрий состоит в построении касательных векторных полей с координатами, которые являются функциями этих групповых переменных и находятся решением переопределенной системы линейных ДУ, называемых определяющими уравнениями. В современном групповом анализе[2] используются различные модификации этого алгоритма [12]. Если проблема отыскания симметрии для данной системы ДУ решена, то получившийся результат записывается в виде алгебры Ли инфинитезимальных операторов, которая соответствует допускаемому векторному полю.

Использование традиционного для группового анализа аппарата бесконечно малых (инфинитезимальных) преобразований позволяет свести построение ренормгрупповых симметрий к нахождению алгебры их инфинитезимальных операторов, рассматриваемых на решениях краевых задач. Способ построения ренормгрупповых симметрий зависит как от математической модели, используемой для описания физического процесса, так и от способа задания краевых данных, иными словами, от вида исходного многообразия, которое отнюдь не исчерпывается исходным ДУ (системой ДУ).

[2] Под этим термином подразумевается расширение возможностей традиционного аппарата группового анализа путем включения в арсенал используемых приемов помимо классических подходов Ли групп Ли-Беклунда [10, 11] (также используются термины "обобщенные симметрии" и "высшие симметрии" [13]), приближенных групп преобразований [14], нелокальных симметрий [15], нелиевских симметрий [16] и т.д.

В наиболее простом варианте в роли ренормгруппового многообразия, как и в классическом групповом анализе, выступает система исходных ДУ с одним существенным отличием: в число независимых переменных включаются также параметры, входящие в решение уравнения, в том числе и через краевые данные. Допускаемая исходной системой ДУ группа, которая учитывает преобразования входящих в уравнения параметров наряду с другими независимыми переменными, в рамках стандартного подхода в отдельных случаях может рассматриваться как группа эквивалентности.

Желаемого результата по построению группы симметрий, заведомо содержащей решение краевой задачи в инвариантном многообразии, можно достичь при комбинировании метода группового анализа с методом инвариантного погружения [17, 18]. Алгоритмически процедура инвариантного погружения содержит операцию включения краевых данных в число переменных, участвующих далее в групповых преобразованиях. При этом объектом группового анализа становится система уравнений, состоящая из исходной системы и/ или соответствующих ей и краевой задаче уравнений погружения. Последние строятся как на основе собственно уравнений, так и с помощью краевых условий. В тех случаях, когда погружение краевой задачи для ДУ приводит к интегральной формулировке, к групповому анализу предъявляется требование расширения его алгоритмов на интегродифференциальные системы уравнений. С учетом того, что в реализации подобного расширения области применимости установившихся методов группового анализа в последнее время также наметился заметный прогресс [16, 19, 20], можно сказать, что указанный путь комбинирования оказывается достаточно конструктивным.

Объединение исходной системы с уравнениями погружения модифицирует дифференциальное многообразие и, как правило, весьма существенно. С точки зрения группового анализа это проявляется в отличии соответствующих групп симметрии, допускаемых объединенной системой и системой исходных уравнений. Обобщением подхода с использованием уравнений погружения является переформулирование краевых данных на языке дифференциальной связи, совместной с исходными уравнениями.

Укажем еще на два возможных подхода к проблеме определения ренормгруппового многообразия и нахождения допускаемой им достаточно широкой группы преобразований. Один из этих подходов состоит в расширении пространства переменных, на которых рассматривается действие группы, за счет использования не только точечных групп преобразований, но также групп нелокальных преобразований [15] и групп Ли-Беклунда [10, 11]. Другой подход связан с использованием упрощенной (по сравнению с исходной) математической модели для описания исследуемых физических процессов. Такое упрощение зачастую оказывается возможным при наличии в системе исходных ДУ слагаемых, содержащих малые параметры. Получающаяся при отбрасывании этих слагаемых система уравнений, как правило, допускает более широкую группу преобразований, наследуемую (в смысле существования приближенной группы [14]) по малому параметру системой исходных уравнений.

Обсудим теперь процедуру сужения найденной группы на решении краевой задачи (точном или приближенном)[3]. Целью этого сужения является построение такой группы преобразований с касательным векторным полем (точечной, группы Ли-Беклунда и т.д.), каждый из инфинитезимальных операторов которой содержит решение краевой задачи в своем инвариантном многообразии. На языке канонического оператора ренормгрупповой симметрии это означает, что его координата обращается в нуль на решении краевой задачи и его дифференциальных следствиях. По существу, это равенство есть сформулированное на языке инфинитезимальных преобразований требование функциональной автомодельности исследуемой физической системы.

Математически процедура сужения сопровождается "комбинированием" канонических координат операторов группы, допускаемой ренормгрупповым многообразием. Условие обращения в нуль суммы этих координат на решении краевой задачи (условие инвариантности относительно оператора РГ-симметрий) приводит к набору алгебраических равенств, связывающих между собой координаты различных операторов и порождающих таким образом искомые РГ-симметрии. В том случае, когда РГ строится из группы Ли, допускаемой исходной системой ДУ, она реализуется как подгруппа этой группы, а решение краевой задачи возникает как инвариантное относительно полученной точечной ренормгруппы (ср.[9, §29]). В подходе, основанном на использовании модифицированного дифференциального многообразия, РГ-симметрии возникают в результате сужения на решении краевой задачи симметрии,допускаемой исходной системой и заданной дифференциальной связью и/или уравнением погружения (в отличие от процедуры отыскания группы условных симметрий, где такая дифференциальная связь *a priori* не известна и разыскивается сама в ходе построения группы). Как уже говорилось выше, в роли группы симметрии, сужаемой на решении краевой задачи, может быть использована не только точечная группа Ли, но и группа Ли-Беклунда, приближенная группа преобразований, группа нелокальных симметрий, группа нелиевских симметрий и т.д.

Ниже мы рассмотрим конкретные примеры построения ренормгрупповых симметрий для физических систем, описываемых с помощью дифференциальных уравнений. Разбиение статьи на разделы и их названия отражают сформулированные выше различные подходы к построению РГ-симметрий, зависящие от выбора ренормгруппового многообразия и способа задания краевых данных.

[3] В частном случае это является реализацией процедуры отыскания β-функции в уравнении Овсянникова в квантово-полевой ренормгруппе [2].

2 Построение ренормгрупповой симметрии с использованием уравнений погружения

В этом разделе обсуждается алгоритм построения РГ-симметрий с использованием уравнений погружения для физических систем,описываемых с помощью обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ). Наглядным примером является краевая задача для ОДУ первого порядка

$$u_t = f(t, u, a)\,, \tag{2.1}$$

$$t = \tau\,, \quad u = x\,, \tag{2.2}$$

с явно входящим в уравнение параметром a.

Построение РГ-симметрий сужением допускаемой ОДУ (2.1) бесконечной группы Ли наталкивается на трудности с нахождением этой группы ввиду специфических проблем, возникающих при групповом анализе ОДУ первого порядка [9, §8]. Возможным выходом является расширение исходного дифференциального многообразия добавлением к (2.1) уравнения погружения [17, 18], которое для краевой задачи (2.1)-(2.2) имеет вид линейного дифференциального уравнения с частными производными первого порядка:

$$u_\tau + f(\tau, x, a) u_x = 0\,. \tag{2.3}$$

Объединение уравнений (2.1), (2.3) в единую систему решает проблему построения ренормгруппового многообразия. Для системы уравнений (2.1), (2.3) для функции $u(t, \tau, x, a)$ четырех переменных $\{t, \tau, x, a\}$ отыскание допускаемой группы вовлекает в групповые преобразования наряду с параметром, присутствующим в исходном уравнении (2.1), также параметры τ, x, входящие в краевые данные. Сужение полученной в результате группы симметрии на любом доступном (приближенном) решении задачи (2.1), (2.2) порождает искомые РГ-симметрии. Проиллюстрируем сказанное на двух простых примерах.

Пример 2.1. $f = au^2$.
Ренормгрупповое многообразие, определяемое уравнениями (2.1), (2.3), принимает вид

$$u_t = au^2\,, \quad u_\tau + ax^2 u_x = 0\,. \tag{2.4}$$

Допускаемая этим многообразием бесконечная точечная группа отыскивается стандартным образом и характеризуется инфинитезимальным оператором (ИО) с пятью независимыми вкладами

$$\begin{gathered} X = \sum_{i=1}^{5} \alpha_i X_i\,, \\ X_1 = \partial_t + au^2\partial_u\,, \quad X_2 = \partial_\tau + ax^2\partial_x\,, \\ X_3 = u^2\partial_u\,, \quad X_4 = x^2\partial_x\,, \quad X_5 = x^2\tau\partial_x + u^2 t\partial_u + \partial_a\,, \end{gathered} \tag{2.5}$$

координаты которого задаются двумя функциями α_1 и α_2 пяти групповых переменных $\{t, \tau, x, a, u\}$ и тремя функциями α_3, α_4, α_5 с произвольной зависимостью от следующих комбинаций этих переменных

$$at + \frac{1}{u}, \quad a\tau + \frac{1}{x}, \quad a. \tag{2.6}$$

Операция сужения найденной группы заключается в проверке условия инвариантности решения начальной задачи относительно РГ-преобразований, или, иными словами, условия обращения в нуль координаты канонического оператора группы [10, §16], эквивалентного (2.5), на точном или приближенном решении $u = U(t, x, \tau, a)$ начальной задачи (2.1), (2.2)

$$U^2(\alpha_3 + a\alpha_1 + \alpha_5 t) - \alpha_1 U_t - \alpha_2 U_\tau - x^2(\alpha_4 + a\alpha_2 + \alpha_5\tau)U_x - \alpha_5 U_a = 0. \tag{2.7}$$

Рассмотрим, например, вариант с использованием приближенного решения начальной задачи (2.1), (2.2) в виде отрезка ряда теории возмущений (ТВ) по степеням параметра a

$$u = U(t, x, \tau, a) \equiv x + ax^2(t - \tau) + O(a^2), \qquad a << 1. \tag{2.8}$$

Подстановка (2.8) в (2.7) показывает, что условие инвариантности (2.7) реализуется при $\alpha_3 = \alpha_4 \equiv \alpha$ и сохраняющемся произволе в выборе функций α_1, α_2 и α_5. Полагая $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha = 0$ и $\alpha_5 = 1$,получим простой оператор ренормгруппы

$$R = x^2\tau\partial_x + \partial_a + u^2 t\partial_u, \tag{2.9}$$

с помощью которого решение по ТВ (2.8) восстанавливается до точного решения начальной задачи (2.1), (2.2) (в виде суммы геометрической прогрессии)

$$u = \frac{x}{1 - ax(t - \tau)}. \tag{2.10}$$

Для получения решения (2.10) следует записать условие инвариантности решения начальной задачи относительно РГ-преобразований с оператором (2.9), которое имеет вид линейного ДУ в частных производных первого порядка

$$-u^2 t + x^2\tau u_x + u_a = 0. \tag{2.11}$$

Уравнения характеристик для (2.11) есть хорошо известные уравнения Ли с групповым параметром a

$$\frac{dt}{da} = 0, \quad \frac{d\tau}{da} = 0, \quad \frac{dx}{da} = x^2\tau, \quad \frac{du}{da} = u^2 t,$$

решения которых дают искомое решение начальной задачи (2.10).

Пример 2.2. $f = u^2 + au^3$.
Построение РГ-симметрий в этом примере практически аналогично предыдущему. Ренормгрупповое многообразие задается парой уравнений

$$u_t = u^2 + au^3, \quad u_\tau + (x^2 + ax^3)u_x = 0. \tag{2.12}$$

Допускаемая этими уравнениями бесконечная точечная группа характеризуется ИО с пятью вкладами, аналогичными (2.5). Мы приведем в явном виде лишь один из этих вкладов, характеризуемый оператором X_5

$$X = \sum_{i=1}^{5} \alpha_i X_i, \qquad X_5 = \left(x^2(1 + ax)\tau + x\right)\partial_x + \left(u^2(1 + au)t + u\right)\partial_u - a\partial_a, \tag{2.13}$$

и функцией α_5, которая произвольным образом зависит от следующих комбинаций групповых переменных

$$t + \frac{1}{u} - a\ln\left|\frac{1 + au}{au}\right|, \quad \tau + \frac{1}{x} - a\ln\left|\frac{1 + ax}{ax}\right|, \quad a. \tag{2.14}$$

Сужение группы (2.13) на приближенном решении $u = U(t, x, \tau, a)$ начальной задачи (2.1), (2.2) по ТВ по степеням параметра a

$$u = U(t, x, \tau, a) \equiv \frac{x}{1 - x(t - \tau)} - a\frac{x^2}{(1 - x(t - \tau))^2}\ln\left|1 - x(t - \tau)\right| + O(a^2), \quad a << 1, \tag{2.15}$$

не приводит к ограничениям на вид функции α_5, т.е. оператор X_5 по сути является ренормгрупповым. Полагая для простоты $\alpha_5 = 1$ и опуская вклады остальных операторов, перепишем возникающий из (2.13) оператор ренормгруппы в простом виде

$$R = \left(x^2(1 + ax)\tau + x\right)\partial_x + \left(u^2(1 + au)t + u\right)\partial_u - a\partial_a. \tag{2.16}$$

Условие инвариантности решения начальной задачи относительно РГ-оператора (2.16) дается следующим ДУ в частных производных первого порядка

$$-\left(x^2(1 + ax)\tau + x\right)u_x + au_a + u^2(1 + au)t + u = 0. \tag{2.17}$$

Решение уравнений характеристик для (2.17) дает искомое точное решение начальной задачи в алгебраической форме

$$t - \tau = \frac{1}{x} - \frac{1}{u} + a\ln\left|\frac{x(1 + au)}{u(1 + ax)}\right|. \tag{2.18}$$

Общим свойством найденных выше ренормгрупп краевых задач для ОДУ первого порядка является континуальный произвол координат соответствующих ИО ренормгрупп, задаваемый произвольными функциями α, α_1, α_2 и α_5. Это означает, что ренормгруппа может быть представлена бесконечным набором конкретных ИО с различными частными значениями их координат. Например, конкретные ренормгрупповые ИО (2.9) и (2.16) возникали при отличной от нуля единственной функции $\alpha_5 = 1$. Как будет ясно ниже, подобная ситуация характерна не только для ОДУ, но и для дифференциальных уравнений с частными производными. А именно, бесконечное разнообразие явных выражений ренормгрупповых ИО сочетается с единственностью точного решения соответствующей краевой задачи, непременно содержащегося в инвариантном многообразии ренормгруппы.

В приведенных выше примерах построения РГ-симметрий использовались точечные группы преобразований, допускаемые уравнениями (2.1), (2.3). Однако уравнение погружения (2.3), как и всякое эволюционное уравнение с частными производными первого порядка, обладает также симметрией Ли-Беклунда ([10], §18). Это обстоятельство открывает дополнительные возможности построения РГ-симметрий и интегрирования ОДУ (см., например, [22]).

В заключение данного раздела отметим, что структура уравнений погружения определяется не только видом исходного уравнения, но и типом краевых данных к нему [18, 21]. Одному и тому же исходному уравнению при разных краевых данных соответствуют разные уравнения погружения. В частности, упомянутая во введении нелокальность уравнений погружения обнаруживается в том числе и краевой задачей для ОДУ первого порядка, если начальное значение x разыскиваемой функции $u(t)$ при $t = \tau$ совпадает со значением одного из параметров x, определяющего структуру правой части ОДУ (2.1). Например, начальной задаче

$$u_t = f(t, x, a, u)\,; \quad t = \tau\,,\ u = x \tag{2.19}$$

отвечает нелинейное интегродифференциальное уравнение погружения:

$$u_\tau + f(\tau, x, a, x)u_x = f(\tau, x, a, x) + \\ + \int\limits_\tau^t d\,t' f_x(t', x, a, u(t')) \exp\left[-\int\limits_t^{t'} d\,t'' f_u(t'', x, a, u(t''))\right]\,. \tag{2.20}$$

Соответственно объектом группового (и ренормгруппового) анализа в пространстве пяти групповых переменных $\{t, \tau, x, a, u\}$ является теперь уже интегродифференциальная система уравнений (2.19), (2.20).

Уравнения погружения (2.3) и (2.20) можно рассматривать и как самостоятельные объекты группового анализа с произвольным элементом f групповой классификации по их симметриям Ли-Беклунда. Поиск условий расширения допускаемой ими группы Ли-Беклунда при определенных функциях f, задающих

правые части соответствующих ОДУ в задачах (2.1), (2.2) и (2.19), позволяет отобрать те ОДУ первого порядка, которые интегрируются в квадратурах. Разумеется, это положение применимо и к уравнениям погружения краевых задач для ОДУ второго и более высокого порядка.

3 Ренормгруппа как подгруппа группы Ли, допускаемой исходными дифференциальными уравнениями

В предыдущем разделе обсуждалась задача построения РГ исходя из уравнений погружения. Однако имеет смысл решение и обратной задачи, а именно: построение уравнений погружения исходя из найденной ренормгруппы. Отчасти это обстоятельство связано с тем, что для дифференциальных уравнений в частных производных (ДУЧП), особенно нелинейных, формулировка уравнений погружения (в отличие от погружения задачи Коши для ОДУ) представляет собой вполне самостоятельное, а иногда и трудоемкое,упражнение. Процедура нахождения уравнений погружения на основе ренормгруппы оказывается конструктивной в тех (рассматриваемых ниже в этом разделе) случаях, когда ренормгруппу удается построить как группу симметрии краевой задачи для одного лишь исходного уравнения, в том числе и с учетом преобразования входящих в уравнение параметров. При этом своеобразным аналогом уравнений погружения служат уравнения, отвечающие условиям инвариантности относительно инфинитезимальных ренормгрупповых операторов (т.е. условиям функциональной автомодельности), в которых роль независимых переменных играют, в частности, и параметры задачи. Для *точечной* ренормгруппы эти уравнения являются уравнениями в частных производных первого порядка и в этом смысле могут быть названы *эволюционными*.

В этом разделе при построении РГ-симметрий исходным ренормгрупповым многообразием является многообразие, задаваемое исследуемым ДУ (или системой уравнений) в расширенном за счет параметров пространстве независимых переменных. Учет краевых данных происходит на этапе сужения допускаемой этим многообразием группы симметрии до искомой РГ на точечном или приближенном решении краевой задачи. Само решение реализуется как инвариантное решение для любого из найденных операторов РГ-симметрий. Для иллюстрации используются два примера: решение начальной задачи для модифицированного уравнения Бюргерса и краевой задачи для уравнений геометрической оптики.

Пример 3.1. Начальная задача для уравнения Бюргерса.

Рассмотрим хорошо известную в нелинейной акустике начальную задачу для модифицированного уравнения Бюргерса (на всей вещественной оси x)

$$u_t - au_x^2 - \nu u_{xx} = 0\,, \quad t \geq 0, \quad -\infty < x < \infty\,, \tag{3.1}$$

$$u(0,x) = f(x) \tag{3.2}$$

с явно входящими в него параметрами нелинейности a и диссипации ν. Непрерывная точечная группа симметрии, допускаемая дифференциальным многообразием (3.1) представляется ИО (общим элементом алгебры Ли) с девятью независимыми вкладами

$$X = \sum_{i=1}^{8} C_i(a,\nu) X_i + X_\infty\,. \tag{3.3}$$

Первые шесть из них $X_1, \ldots, X_6$ обсуждались ранее (см., например, [10, §18]) и отвечают проективному преобразованию и преобразованию растяжения в плоскости (t,x), переносам по осям t, x и u и преобразованию Галилея

$$X_1 = 4\nu t^2 \partial_t + 4\nu t x \partial_x - (\nu/a)(x^2 + 2\nu t)\partial_u\,, \quad X_2 = 2t\partial_t + x\partial_x\,,$$

$$X_3 = (1/\nu)\partial_t\,, \quad X_4 = 2\nu t \partial_x - (\nu/a)x\partial_u\,, \quad X_5 = \partial_x\,; \quad X_6 = -(\nu/a)\partial_u\,. \tag{3.4}$$

Следующие два ИО X_7 и X_8 своим существованием обязаны нашей концепции вовлечения параметров в групповые преобразования как независимых переменных и соответствуют преобразованию растяжения a и ν

$$X_7 = a\partial_a + \left(\frac{\nu}{a} - u\right)\partial_u\,, \quad X_8 = 2\nu\partial_\nu + x\partial_x + 2\left(u - \frac{\nu}{a}\right)\partial_u\,. \tag{3.5}$$

Координаты C_i линейной комбинации (3.3) являются произвольными функциями двух групповых переменных a и ν. Последний ИО X_∞ в (3.3) есть оператор бесконечного абелева идеала обсуждаемой группы

$$X_\infty = \alpha(t,x,a,\nu)\exp\left(-\frac{au}{\nu}\right)\partial_u\,, \tag{3.6}$$

координата которого имеет континуальный произвол в виде функции α четырех групповых переменных, ограниченный линейным параболическим уравнением

$$\alpha_t - \nu\alpha_{xx} = 0\,, \tag{3.7}$$

совпадающим с линейной частью ($a = 0$) ДУЧП (3.1).

Сужая допускаемую дифференциальным многообразием (3.1) группу на решении $u = U(t,x,a,\nu)$ начальной задачи (3.1), (3.2), запишем условие обращения в нуль координаты оператора (3.3) в каноническом представлении – условие функциональной автомодельности:

$$\eta - \xi^1(aU_x^2 + \nu U_{xx}) - \xi^2 U_x - \xi^3 U_a - \xi^4 U_\nu = 0\,. \tag{3.8}$$

С учетом формул (3.4)-(3.5), (3.6) условие (3.8) дает алгебраическое равенство, выражающее координату оператора бесконечномерной подгруппы (функцию α) через координаты остальных восьми ИО в произвольный момент времени t, в том числе и при $t = 0$, когда это решение $U(0,x,a,\nu) = f(x)$ известно и определено начальным условием (3.2)

$$\alpha(0,x,a,\nu) = -\exp\left(\frac{af(x)}{\nu}\right)\sum_{i=1}^{8} C_i(a,\nu)\left\{\eta_i - \xi_i^1(af_x^2 + \nu f_{xx}) - \xi_i^2 f_x\right\}\,. \tag{3.9}$$

Использование хорошо известного представления для решения линейного уравнения для функции α с начальным условием (3.9) и его подстановка в (3.3) дает искомые РГ-симметрии, характеризуемые инфинитезимальным оператором

$$R = \sum_{i=1}^{8} C_i(a,\nu) R_i\,, \quad R_i = X_i + \alpha_i \exp\left(-\frac{au}{\nu}\right)\partial_u\,, \tag{3.10}$$

$$\alpha_1 = \frac{\nu}{a} < x^2 >, \quad \alpha_2 = < xf_x >, \quad \alpha_3 = \frac{1}{\nu} < af_x^2 + \nu f_{xx} >,$$

$$\alpha_4 = \frac{\nu}{a} < x >, \quad \alpha_5 = < f_x >, \quad \alpha_6 = \frac{\nu}{a} < 1 >,$$

$$\alpha_7 = < f(x) - \frac{\nu}{a} >, \quad \alpha_8 = < xf_x - 2f(x) + 2\frac{\nu}{a} >\,.$$

В наборе РГ-операторов (3.10) краткости ради угловыми скобками обозначена свертка заключенной в них функции $F(x)$ с фундаментальным решением $G(t,x,\nu)$ линейного уравнения (3.7), умноженным на экспоненту от функции f из (3.2):

$$< F(x) > \equiv \int_{-\infty}^{\infty} dy F(y) G(t, x-y, \nu)\exp\left(\frac{a}{\nu}f(y)\right)\,,$$

$$G(t,x,\nu) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\nu t}}\exp\left(-\frac{x^2}{4\nu t}\right)\,. \tag{3.11}$$

Из формул (3.11) следует, что РГ-симметрии для начальной задачи (3.1), (3.2) получаются комбинированием симметрий восьмимерной алгебры с ИО (3.4), (3.5) и симметрий бесконечномерной подалгебры с ИО (3.6). Каждый из получившихся восьми РГ-операторов (и их линейные комбинации с произвольными коэффициентами - функциями от a и ν) содержит решение начальной задачи $u = U(t,x,a,\nu)$ в инвариантном многообразии и позволяет находить групповые преобразования как самих переменных $\{t,x,a,\nu\}$, так и различных функционалов от решения (локальных и нелокальных).

По самому способу построения полученная РГ выполняет предъявляемое обычно к любой ренормгруппе требование "улучшать теорию возмущений".

Рассмотрим в качестве примера решение задачи (3.1), (3.2) с $f(x) = \cos x$ (обобщение на случай произвольных $f(x)$ тривиально [25, 23]) по ТВ с малым параметром $a \ll 1$

$$u = \cos x e^{-\nu t} + \frac{a}{4\nu}\left(1 - e^{-2\nu t}\right)\left(1 - e^{-2\nu t}\cos 2x\right) + O(a^2)\,. \tag{3.12}$$

Требованию инвариантности приближенного решения (3.12) относительно оператора ренормгруппы в пределе малых значений параметра $a \to 0$ удовлетворяет линейная комбинация двух ИО из (3.10)

$$R = \frac{1}{a}(R_6 + R_7) =$$

$$= \partial_a + \frac{1}{a}\left(-u + \exp\left(-\frac{au}{\nu}\right)\int\limits_{-\infty}^{\infty} dy\,\cos y G(t, x-y, \nu)\exp\left(\frac{a\cos y}{\nu}\right)\right)\partial_u\,, \tag{3.13}$$

а само условие инвариантности решения краевой задачи относительно ИО (3.13) записывается в виде ОДУ первого порядка

$$-u_a - \frac{u}{a} + \frac{1}{a}\exp\left(-\frac{au}{\nu}\right)\int\limits_{-\infty}^{\infty} dy\,\cos y G(t, x-y, \nu)\exp\left(\frac{a\cos y}{\nu}\right) = 0\,. \tag{3.14}$$

Возвращаясь к сделанному в начале раздела утверждению об использовании РГ-симметрий в методе инвариантного погружения, заметим, что условие (3.14) можно рассматривать как своеобразное уравнение погружения краевой задачи (3.1), (3.2) с параметром погружения a. В свою очередь, к краевой задаче для ОДУ первого порядка (3.14) с динамическими переменными $(a,\,u)$ и начальным условием

$$u = u_0(t, x, \nu) \quad \text{при} \quad a = 0 \tag{3.15}$$

также можно применить метод инвариантного погружения. Причем, благодаря зависимости краевого значения u в (3.15) от входящих в ОДУ (3.14) "параметров" t, x, ν, соответствующее уравнение погружения будет интегродифференциальным согласно утверждению (2.19)-(2.20).

Решением ОДУ (3.14) с начальным условием (3.15) приближенное решение (3.12) продолжается по параметру a до следующего точного решения, справедливого при всех значениях параметра a (не только малых):

$$u = \frac{\nu}{a}\ln\int\limits_{-\infty}^{\infty} dy\frac{1}{\sqrt{4\pi\nu t}}\,\exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4\nu t} + \frac{a\cos y}{\nu}\right). \tag{3.16}$$

Обобщение решения (3.16) на случай произвольной $f(x)$ имеет вид [25, 23]:

$$u = \frac{\nu}{a}\ln\int\limits_{-\infty}^{\infty} dy\frac{1}{\sqrt{4\pi\nu t}}\,\exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4\nu t} + \frac{af(y)}{\nu}\right). \tag{3.17}$$

Второй пример решения краевой задачи (3.1), (3.2) по теории возмущений дает секулярное разложение функции u по степеням времени t

$$u = f(x) + t(af_x^2 + \nu f_{xx}) + O(t^2)\,, \quad t \ll 1\,. \tag{3.18}$$

В пределе малых значений времени $t \to 0$ приближенное решение (3.18) инвариантно относительно РГ-преобразований, задаваемых оператором

$$R = \partial_t + \left(\exp\left(-\frac{au}{\nu}\right)\int\limits_{-\infty}^{\infty} dy\,(af_y^2 + \nu f_{yy})G(t, x-y, \nu)\exp\left(\frac{af(y)}{\nu}\right)\right)\partial_u\,, \tag{3.19}$$

с помощью которого ТВ (3.18) продолжается по параметру t до точного решения (3.16).

Третьим примером ТВ может служить процедура согласования асимптотических разложений функции u в (3.1), (3.2) по малому параметру диссипации ν. Не приводя детали ТВ, укажем лишь соответствующий ренормгрупповой ИО $R = (1/2\nu)R_8$ с каноническим параметром ν, который позволяет продолжать ТВ по этому параметру до точного решения (3.16) краевой задачи (3.1), (3.2).

Пример 3.2. Краевая задача для уравнений геометрической оптики. Рассмотрим краевую задачу для уравнений линейной геометрической оптики

$$v_t + vv_x = 0\,, \qquad n_t + vn_x + nv_x = 0\,, \tag{3.20}$$

$$v(0,x) = V(x)\,, \qquad n(0,x) = N(x)\,. \tag{3.21}$$

В уравнениях (3.20) функция v имеет смысл поперечного градиента эйконала двумерного пучка, распространяющегося вдоль оси t, n – его интенсивность. Величины V и N характеризуют кривизну волнового фронта и распределение интенсивности пучка по координате x на входе $t = 0$ в среду.

Непрерывная точечная группа симметрии, допускаемая дифференциальным (ренормгрупповым) многообразием (3.20), представляется ИО (общим элементом алгебры Ли) с пятью независимыми вкладами

$$X = \sum_{i=1}^{5} X_i\,, \tag{3.22}$$

$$X_1 = \left(-J_v^1 + tJ_\chi^1\right)\partial_t + \left(J^1 + v\left(tJ_\chi^1 - J_v^1\right)\right)\partial_x - nJ_\chi^1\partial_n\,,$$

$$X_2 = \frac{1}{n}J^2\left(\partial_t + v\partial_x\right)\,, \quad X_3 = nJ^3\partial_n\,, \quad X_4 = \frac{1}{n}J^4\left(-t\partial_t - vt\partial_x + n\partial_n\right)\,,$$

$$X_5 = t\left(tJ_\chi^5 - J_v^5\right)\partial_t + \left(tJ^5 + vt\left(tJ_\chi^5 - J_v^5\right)\right)\partial_x + J^5\partial_v - n\left(tJ_\chi^5 - J_v^5\right)\partial_n\,.$$

Задаваемая оператором (3.22) бесконечномерная группа содержит пять функций $J^i(\chi, v)$, $i = 1, \ldots, 5$ с произвольной зависимостью от двух переменных v и

$\chi = x - vt$. Процедура сужения группы (3.22) на решении краевой задачи с учетом краевого условия (3.21) приводит к двум соотношениям между функциями J^i, сохраняя произвольной их зависимость от аргументов v и χ

$$J^4 = N_x J^1 + N J^1_\chi + N V_x J^1_v - V_x J^2 - N J^3 , \quad J^5 = V_x J^1 . \tag{3.23}$$

В соотношениях (3.23) и ниже в (3.24) функции V и N и их производные по x должны быть записаны либо в терминах v, либо в терминах χ. Подстановка соотношений (3.23) в (3.22) дает искомый оператор РГ-симметрий

$$R = \sum_{i=1}^{3} R_i , \tag{3.24}$$

$$R_1 = X_1 + V_x J^1 (t\partial_x + \partial_v) + \left[\left(t(V_x)_\chi - (V_x)_v - \frac{N_x}{n} \right) J^1 \right.$$

$$\left. + \left(tV_x - \frac{N}{n} \right) J^1_\chi - V_x \left(1 + \frac{N_x}{n} \right) J^1_v \right] (t\partial_t + vt\partial_x - n\partial_n),$$

$$R_2 = X_2 + \frac{V_x}{n} J^2 (t\partial_t + vt\partial_x - n\partial_n) , \quad R_3 = X_3 + \frac{N}{n} J^3 (t\partial_t + vt\partial_x - n\partial_n).$$

Из формул (3.24) следует, что РГ-симметрии для краевой задачи (3.20), (3.21) получаются комбинированием симметрий бесконечномерной алгебры с ИО (3.22). Каждый из получившихся трех РГ-операторов (и их линейные комбинации) содержит решение краевой задачи (3.20), (3.21) в инвариантном многообразии и так же, как и в предыдущем примере, "улучшает" соответствующую теорию возмущений.

Рассмотрим в качестве примера решение краевой задачи (3.20), (3.21) для сфокусированного пучка с $V = -x/T$ по теории возмущений по степеням времени малого отношения t/T:

$$v = -\frac{x}{T} - \frac{x}{T^2} t + O(t^2) , \quad n = N(x) + \frac{1}{T} (xN_x + N) t + O(t^2) , \quad t \ll T. \tag{3.25}$$

Приближенное решение (3.25) в пределе $t \to 0$ инвариантно относительно РГ-преобразований, задаваемых оператором R_2 с произвольным $J^2 \neq 0$. Полагая $J^2 = 1$, получаем выражение для РГ-оператора

$$R = \frac{T - t}{nT} (\partial_t + v\partial_x) + \frac{1}{T} \partial_n . \tag{3.26}$$

Условия инвариантности решения краевой задачи относительно группы преобразований с этим оператором имеют следующий вид:

$$v_t + vv_x = 0 , \qquad \frac{n}{t - T} + n_t + vn_x = 0 . \tag{3.27}$$

Решение уравнений (3.27) продолжает ТВ (3.25) по параметру t до следующего точного решения краевой задачи (3.20), (3.21)

$$n = \frac{T}{T - t} N \left(x \frac{T}{t - T} \right) , \quad v = \frac{x}{t - T} , \quad t \le T, \tag{3.28}$$

дающего известный закон схождения лучей в геометрической оптике. В частности, для гауссова пучка с $N(x) = N_0 \exp(-x^2)$ имеем

$$n = \frac{TN_0}{T - t} \exp \left(-x^2 \frac{T^2}{(t - T)^2} \right) , \quad v = \frac{x}{t - T} . \tag{3.29}$$

В заключение данного раздела отметим, что полученное в каждом из рассмотренных выше примеров точное решение краевой задачи единственно, но число ренормгрупповых ИО, характеризующих ее РГ-симметрии, отнюдь не равно единице (в первом примере это число равнялось восьми, а во втором примере – трем, при сохраняющемся функциональном произволе в РГ-операторах). В следующем разделе мы увидим, что количество ИО, характеризующих РГ-симметрию соответствующей краевой задачи для ДУЧП с единственным решением, можно (в принципе) увеличивать до бесконечности при использовании неточечных групп симметрии (групп Ли-Беклунда).

4 Ренормгруппа как подгруппа группы Ли-Беклунда, допускаемой исходными дифференциальными уравнениями

Способ построения РГ-симметрий как подгруппы точечных симметрий Ли, допускаемых исходными ДУ, естественно обобщается на тот случай, когда эти уравнения допускают группу Ли-Беклунда. Расширение пространства дифференциальных переменных, на котором действует группа (в принципе, до пространства произвольной размерности), увеличивает число краевых задач, допускающих сужение этой группы на своем решении. Возникающий при таком подходе набор симметрий пополняет набор точечных РГ-симметрий до РГ-симметрий Ли-Беклунда. В этом разделе приводится простой пример построения ренормгрупповой симметрии Ли-Беклунда (третьего порядка) начальной задачи для линейного параболического уравнения.

Пример 4.1. Начальная задача для линейного параболического уравнения. Рассмотрим начальную задачу для линейного параболического уравнения

$$u_t - u_{xx} = 0 , \tag{4.1}$$

$$t = 0 , \quad u = f(x) . \tag{4.2}$$

Группа симметрий Ли-Беклунда третьего порядка,допускаемая уравнением (4.1), которое задает в данной задаче ренормгрупповое многообразие, представляется каноническим ИО группы с одиннадцатью вкладами

$$X = æ\partial_u \equiv \sum_{i=1}^{10} C_i æ^i \partial_u + X_\infty \,. \tag{4.3}$$

Все координаты $æ^i, i \geq 2$, в ИО (4.3) можно получить (см., например, [10, §18]) действием операторов рекурренции

$$L_1 = D_x, \quad L_2 = x + 2tD_x \tag{4.4}$$

на координату $æ^1 = u$ "очевидного" (в силу линейности и однородности уравнения (4.1)) оператора растяжений. Первые шесть координат $æ^i$ порождают канонические операторы, эквивалентные операторам точечной группы Ли, и их вклады в РГ-симметрии не обсуждаются. Симметрии Ли-Беклунда третьего порядка даются следующими четырьмя выражениями для координат $æ^i$, $i = 7, \ldots, 10$:

$$æ^7 = u_{xxx}\,, \quad æ^8 = 2tu_{xxx} + xu_{xx}\,, \quad æ^9 = 4t^2u_{xxx} + 4txu_{xx} + (x^2+2t)u_x\,,$$

$$æ^{10} = 8t^3u_{xxx} + 12t^2xu_{xx} + (6x^2t + 12t^2)u_x + (x^3 + 6xt)u\,. \tag{4.5}$$

Последний ИО X_∞ в формуле (4.3) есть оператор бесконечного абелева идеала точечной группы (ср. с (3.6) при $a = 0,\ \nu = 1$)

$$X_\infty = \alpha(t,x)\,\partial_u\,, \quad \alpha_t - \alpha_{xx} = 0\,. \tag{4.6}$$

Сужение допускаемой ДУ (4.1) группы Ли-Беклунда на решении краевой задачи выполняется стандартным способом: условие инвариантности $æ = 0$ решения краевой задачи относительно допускаемой группы дает с учетом начального условия (4.2) значение функции $\alpha(0,\,x)$ в момент времени $t = 0$ (здесь опущены вклады точечных симметрий $(C_1, \ldots, C_6 = 0)$)

$$\alpha(0,\,x) = -C_7f_{xxx} - C_8xf_{xx} - C_9x^2f_x - C_{10}x^3f(x)\,. \tag{4.7}$$

Затем в виде сверток $\alpha(0,\,x)$ с фундаментальным решением (3.11) (используемым при $\nu = 1$) строится решение линейного ДУЧП из (4.6) при $t \geq 0$ на всей вещественной оси x, зависящее от четырех произвольных постоянных C_7, C_8, C_9, C_{10}. При подстановке в (4.3) это решение дает помимо шести вкладов (при $C_1, \ldots, C_6 \neq 0$) в точечную часть ренормгруппы еще четыре вклада в неточечную часть ренормгруппы, координаты канонических ИО которой зависят от третьих производных u_{xxx}:

$$R = \sum_{i=1}^{10} C_iR_i = \sum_{i=1}^{10} C_i\vartheta_i\partial_u\,, \quad \vartheta_i \equiv æ^i + \alpha_i\,, \tag{4.8}$$

$$\alpha_1 = -< x^2f >, \quad \alpha_2 = -< xf_x >, \quad \alpha_3 = -< f_{xx} >,$$

$$\alpha_4 = -< xf >, \quad \alpha_5 = -< f_x >, \quad \alpha_6 = -< f >,$$

$$\alpha_7 = -< f_{xxx} >, \quad \alpha_8 = -< xf_{xx} >, \quad \alpha_9 = -< x^2f_x >, \quad \alpha_{10} = -< x^3f > .$$

Здесь угловыми скобками $< \ldots >$ обозначены свертки (3.11) заключенных в эти скобки функций (в пределе $a = 0,\ \nu = 1$).

Легко заметить, что координаты $\vartheta_i, i = 7, \ldots, 10$ канонических операторов (4.3) обсуждаемой ренормгруппы Ли-Беклунда конструируются из координат $\vartheta_i, i = 1, \ldots, 6$ операторов точечной ренормгруппы с помощью тех же операторов рекурренции (4.4), которые связывают координаты ИО соответствующих групп; например, $R_8 = L_2R_3$. Аналогично, однократное применение операторов рекурренции (4.4) к координатам ИО ренормгруппы третьего порядка дает РГ-симметрии Ли-Беклунда четвертого порядка. Далее эту процедуру можно продолжать для получения ренормгруппы Ли-Беклунда сколь угодно высокого порядка.

Операторы группы (4.8) с координатами $\vartheta_i, i = 7, \ldots, 10$, обладают главным свойством, позволяющим именовать их ренормгрупповыми, несмотря на их нетрадиционную форму. А именно, каждое из четырех инвариантных многообразий этих ИО включает в себя точное решение краевой задачи (4.1), (4.2).

Способ использования РГ-симметрий Ли-Беклунда менее нагляден, чем точечных РГ-симметрий, поскольку получение решений уравнений Ли для операторов РГ Ли-Беклунда наталкивается на зацепление этих уравнений с уравнениями Ли для ренормгрупповых переменных в виде производных от u более высокого порядка. Эта ситуация воспроизводит характерное в теории групп Ли-Беклунда положение с решениями дифференциальных уравнений Ли. Реальная польза от каждого из ИО РГ Ли-Беклунда в (4.8) тем не менее существует и состоит, в частности, в том, что их координаты могут быть использованы для формулировки дифференциальной связи, дополняющей исходное дифференциальное многообразие, представленное ДУЧП задачи (4.1), заведомо совместной с ним (по построению) и явно учитывающей выполнение краевых данных этой задачи. Применение такой дифференциальной связи для построения точечной РГ, отличной от приведенной выше, будет продемонстрировано в следующем разделе. В общем случае найденной ренормгруппы Ли-Беклунда произвольного фиксированного порядка координаты ее ИО можно рассматривать как широкий набор готовых дифференциальных выражений, нули которых накладывают на исходное ДУЧП подходящие ограничения, диктуемые физическими или симметрийными соображениями; их нули могут рассматриваться также как своеобразные уравнения погружения.

Наличие бесконечной точечной группы с оператором X_∞ в рассмотренном выше примере 4.1 дает возможность построить РГ-симметрии Ли-Беклунда при произвольных краевых данных (4.2). В отдельных конкретных случаях РГ-симметрию Ли-Беклунда удается построить сужением на решении краевой задачи группы Ли-Беклунда с конечным числом операторов. Например, РГ-симметрия краевой задачи для уравнений нелинейной геометрической оптики (см. ниже раздел 6) с краевыми условиями, отвечающими решению, приведенному в [31], получается сужением группы Ли-Беклунда второго порядка [28], допускаемой исходной системой ДУ. Указанный в [28] пример демонстрирует еще один практически важный вариант использования РГ-симметрий Ли-Беклунда. А именно, решение краевой задачи возникает как инвариантное решение относительно указанного РГ-оператора.

Сформулированная в этом разделе концепция построения ренормгруппы Ли-Беклунда выходит далеко за рамки краевой задачи (4.1), (4.2), использованной здесь в качестве простого и наглядного примера отыскания ренормгрупповой симметрии. Ренормгруппы Ли-Беклунда типа (4.8) выстраиваются и для краевых задач любых других уравнений математической физики, обладающих симметрией Ли-Беклунда (например для рассмотренного в предыдущем разделе модифицированного уравнения Бюргерса). Отметим, что при построении РГ Ли-Беклунда с вовлечением параметров в групповые преобразования, помимо операторов рекурренции, содержащих оператор D_x полного дифференцирования по координате x, возникают операторы рекурренции с вкладами ($\propto D_a$ и D_ν для задачи (3.1), (3.2)), учитывающими операции полного дифференцирования по параметрам (буквенным коэффициентам исходного уравнения и параметрам краевых данных). При этом координаты канонических ИО ренормгруппы Ли-Беклунда зависят уже не только от первых, но и от более старших производных по параметрам (по a и ν от u в задаче (3.1), (3.2); в том числе – и от смешанных производных u по x, a, ν).

5 Ренормгруппа и дифференциальная связь

Как уже было сказано, первым шагом при нахождении РГ-симметрий является построение исходного дифференциального (ренормгруппового) многообразия. В разделе, посвященном конструированию РГ-симметрий для ОДУ, это многообразие состояло из исходного ОДУ и соответствующего краевой задаче уравнения погружения. В более общем подходе аналогом такого уравнения погружения является дополнительное дифференциальное соотношение – дифференциальная связь, которая удовлетворяет двум требованиям: во-первых, она должна быть заведомо совместна с исходным ДУ и, во-вторых, явно учитывать краевые условия. Всем этим требованиям по построению удовлетворяет дифференциальная связь, которая возникает из условия равенства нулю координаты канонического оператора РГ Ли-Беклунда. В этом разделе мы рассмотрим пример построения точечной РГ для линейного параболического уравнения с начальным условием, учитываемым дифференциальной связью в виде равенства нулю координаты РГ Ли-Беклунда третьего порядка.

Пример 5.1. Начальная задача для линейного параболического уравнения.

Рассмотрим опять начальную задачу для линейного параболического уравнения (4.1) и присоединим к исходному ДУ дифференциальную связь третьего порядка $\vartheta_{10} = 0$, возникающую из РГ-симметрии Ли-Беклунда, полученной в предыдущем разделе. Для простоты выберем начальное значение $f(x)$ функции $u(t,x)$ в виде второй производной от δ-функции Дирака с параметром a в качестве "амплитуды"

$$f(x) = a\delta''(x)\,. \tag{5.1}$$

При этом неоднородный вклад $\propto \alpha_{10}$ в выражении (4.8) для ϑ_{10} обращается в нуль и исходное ренормгрупповое многообразие для начальной задачи (4.1), (4.2) с условием (5.1) принимает вид:

$$\begin{gathered} u_t - u_{xx} = 0\,; \\ 8t^3 u_{xxx} + 12t^2 x u_{xx} + \left(12t^2 + 6tx^2\right) u_x + \left(6tx + x^3\right) u = 0\,. \end{gathered} \tag{5.2}$$

Дифференциальное многообразие (5.2) допускает точечную пятнадцатипараметрическую группу [30] с базисом, содержащим пятнадцать операторов

$$X = \sum_{i=1}^{15} C_i X_i\,. \tag{5.3}$$

Первые четыре оператора этой группы даются группой точечных преобразований для уравнения (4.1) за исключением операторов переноса по t и по x, с очевидностью не допускаемых дифференциальной связью в (5.2). Зависимость от переменных t и x координат следующих пяти операторов в наборе (5.3) дается линейными комбинациями дробно-рациональных функций. Мы приведем здесь два таких оператора

$$\begin{gathered} X_6 = -2tx\partial_t + \left(t - 2x^2\right)\partial_x + \left(\frac{x}{2} + \frac{x^3}{2t}\right) u\partial_u\,; \\ X_7 = x^2\partial_t + \left(\frac{x^3}{t} - x\right)\partial_x - \left(\frac{x^4}{4t^2} + \frac{1}{3}\right) u\partial_u\,. \end{gathered} \tag{5.4}$$

Отличительной чертой следующих трех операторов в наборе (5.3) является наличие общего экспоненциального множителя. Например, оператор X_{10} имеет вид:

$$X_{10} = u\sqrt{t}e^{x^2/4t}\left(t^2\partial_t + xt\partial_x - u\frac{x^2+2t}{4}\partial_u\right)\,. \tag{5.5}$$

Последние три оператора X_i выражаются с помощью производных фундаментального решения G первого из уравнений (5.2):

$$X_{13} = \sqrt{4\pi}G\partial_u,\ X_{14} = -4\sqrt{\pi}G_x\partial_u,\ X_{15} = 8\sqrt{\pi}G_{xx}\partial_u,\ G(t,x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}e^{-x^2/4t}. \tag{5.6}$$

Сужение найденной группы Ли на приближенном решении задачи (5.1), (5.2) можно производить, используя представление этого решения при малых временах $t \ll 1$ в виде отрезка бесконечного ряда ТВ

$$u = u^{(0)} + u^{(1)} + u^{(2)} + \ldots = a \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \delta^{(2n+2)}(x), \quad u^{(n)} = O(t^n). \tag{5.7}$$

При подстановке решения (5.7) в (5.6) и вычислении производных следует учесть рекуррентное соотношение, связывающее производные δ-функции и асимптотическую формулу для функции $G(t,x)$

$$(k+1)\delta^{(k)}(x) + x\delta^{(k+1)}(x) = 0, \quad k \geq 0, \qquad \delta(x) = \lim_{t \to 0} G(t,x). \tag{5.8}$$

Использование условия инвариантности решения (5.7) относительно РГ-преобразований дает три равенства, определяющих значения постоянных C_{13}, C_{14}, C_{15}:

$$C_{13} = \frac{a}{\sqrt{\pi}} C_2; \; C_{14} = \frac{a}{4\sqrt{\pi}} (2C_3 - C_6); \; C_{15} = \frac{a}{24\sqrt{\pi}} (C_7 - 3C_4 - 9C_1) + \frac{a^2}{32\pi} C_{10}. \tag{5.9}$$

Подстановка соотношений (5.9) в (5.3) дает искомые РГ-симметрии

$$R = \sum_{i=1}^{12} C_i R_i \equiv \sum_{i=1}^{12} C_i \left(X_i + \alpha_i \partial_u \right), \tag{5.10}$$

$$\alpha_1 = -3aG_{xx}, \quad \alpha_2 = 2aG, \quad \alpha_3 = -2aG_x, \quad \alpha_4 = -aG_{xx},$$

$$\alpha_6 = aG_x, \quad \alpha_7 = \frac{1}{3} aG_{xx}, \quad \alpha_{10} = \frac{a^2}{4\sqrt{\pi}} G_{xx},$$

$$\alpha_5 = \alpha_8 = \alpha_9 = \alpha_{11} = \alpha_{12} = 0.$$

Сравнение (5.10) и (4.8) показывает, что первые четыре из даваемых формулами (5.10) операторов совпадают с соответствующими операторами точечной РГ (4.8). Обращение в нуль коэффициентов α_i для $i = 5, 8, 9, 11, 12$ говорит о том, что соответствующие операторы точечной группы (5.3) уже являются ренормгрупповыми, т.е. искомое решение начальной задачи (5.1), (5.2) содержится в их инвариантном многообразии. Для конкретности приведем два таких оператора в явном виде:

$$X_8 = \frac{x^3}{t} \partial_t + \left(1 - \frac{3x^2}{2t} + \frac{x^4}{t^2} \right) \partial_x + \left(-\frac{3x}{2t} + \frac{x^3}{4t^2} - \frac{x^5}{4t^3} \right) u\partial_u;$$

$$X_{11} = u\sqrt{t} e^{x^2/4t} \left(xt\partial_t + (x^2 - t)\partial_x - u\frac{x^3}{4t}\partial_u \right). \tag{5.11}$$

Пересечение всех инвариантных многообразий, отвечающих полному набору операторов (5.10), дает точное решение начальной задачи в виде $u = aG_{xx}$. Разумеется, это решение можно получить как инвариантное решение относительно любого из РГ-операторов (5.10).

Основой для построения РГ (5.10) явилась формулировка краевых данных в виде дифференциальной связи (5.2) и последующий поиск точечной группы, допускаемой этой связью и исходным уравнением. Очевидно, существуют и иные дифференциальные связи, которые адекватным образом описывают краевые (начальные) данные и использование которых вместо соотношения (5.2) приводит к другим ренормгрупповым алгебрам. Число таких дифференциальных связей (а значит, и РГ-алгебр) бесконечно велико. В качестве примера можно указать бесконечный ряд дифференциальных связей, возникающих из равенства нулю "подходящей" координаты канонического оператора группы Ли-Беклунда третьего или более высокого порядка.

Завершая обсуждение свойств полученной в этом примере РГ, остановимся на вопросе об интерпретации РГ-операторов на языке операторов группы, допускаемой исходным линейным параболическим уравнением (5.2). Отмеченное выше совпадение четырех РГ-операторов из алгебр (4.8) и (5.10) указывает на общность их происхождения: как в примере 4.1, так и в примере 5.1, эти операторы возникают при сужении на решении краевой задачи точечной группы, допускаемой исходным уравнением.

Происхождение следующих пяти РГ-операторов из (5.10) допускает похожую интерпретацию, если использовать не только точечные симметрии, но весь набор симметрий Ли-Беклунда исходного уравнения (5.2). Оказывается, что координата любого из этих пяти РГ-операторов, записанных в каноническом виде, представляет собой линейную комбинацию координат операторов группы Ли-Беклунда, допускаемых исходным уравнением (5.2) и преобразованных с учетом дифференциальной связи. Например, координата $\overline{\eta}_8$ канонического оператора, эквивалентного оператору R_8 из набора (5.10), есть линейная комбинация координат трех канонических операторов группы Ли-Беклунда соответственно пятого, третьего и первого порядков

$$\overline{\eta}_8 = -2\eta_5 - \eta_3 - 4\eta_1, \tag{5.12}$$

$$\eta_5 = \left(-x + \frac{x^3}{2t} \right) u_{xx} + \left(1 - \frac{3x^2}{2t} + \frac{x^4}{2t^2} \right) u_x + \left(-\frac{x^3}{4t^2} + \frac{x^5}{8t^3} \right) u,$$

$$\eta_3 = 2xu_{xx} + \left(3 + \frac{3x^2}{2t} \right) u_x + \left(\frac{3x}{2t} + \frac{x^3}{4t^2} \right) u, \quad \eta_1 = -u_x. \tag{5.13}$$

Формулы (5.13) для η_5, η_3 и η_1 возникают из стандартного для уравнения (5.2) представления координат операторов группы Ли-Беклунда с помощью операторов рекурренции (4.4)

$$\eta_5 = -\left(L_2^2 L_1^3 + 3L_2 L_1^2 + 3 \right) u, \quad \eta_3 = -L_2 L_1^2 u, \quad \eta_1 = -L_1 u$$

и при использовании дифференциальной связи (5.2). Для интерпретации первых девяти операторов из (5.10) следует учитывать координаты операторов группы Ли-Беклунда до шестого порядка включительно.

В заключение заметим, что приведенный пример построения точечных РГ-симметрий на основе симметрий Ли-Беклунда, с одной стороны, указывает на практическую возможность использования последних, а с другой – демонстрирует такие точечные РГ-симметрии, которые не допускаются исходным уравнением. Последнее свойство, однако, не является непременным правилом. Иной пример построения точечной РГ-симметрии с краевым условием, учитываемым дифференциальной связью, когда возникающая РГ оказывается подгруппой группы точечных преобразований, допускаемой системой исходных ДУ (без учета дифференциальной связи), приведен в [29].

6 Ренормгруппа как подгруппа приближенной группы

В этом разделе рассматриваются два примера построения РГ-симметрий для физических задач, описываемых системами ДУ с малыми параметрами. Наличие малых параметров позволяет при нахождении РГ-симметрий этих ДУ воспользоваться алгоритмом приближенной группы. При этом из исходной системы ДУ с узкой группой симметрии выделяется более простая подсистема, задающая ренормгрупповое многообразие, которая допускает более широкую группу симметрий, наследуемую (в смысле [14]) по малому параметру системой исходных ДУ. Сужение найденной приближенной группы на решении краевой задачи дает искомые приближенные РГ-симметрии.

Пример 6.1.

В качестве первого примера рассматривается построение и использование РГ-симметрий для нахождения аналитического решения одной из задач теории нелинейного взаимодействия мощного лазерного излучения частоты ω с лазерной плазмой [26]. Такое взаимодействие для р-поляризованной электромагнитной волны с единственной z-компонентой магнитного поля, падающей из вакуума $x = -\infty$ на неоднородную плазму, описывается системой нелинейных нестационарных уравнений для шести скалярных функций: вектора скорости электронов $\mathbf{V} = \{V, U, 0\}$, их плотности n, электрического поля $\mathbf{E} = \{E, F, 0\}$ и магнитной

индукции $\mathbf{B} = \{0, 0, B\}$, которые зависят от времени t и двух координат x, y:

$$V_t + VV_x + UV_y - \frac{e}{m}\left(E + \frac{1}{c}UB\right) = 0;$$

$$U_t + VU_x + UU_y - \frac{e}{m}\left(F - \frac{1}{c}VB\right) = 0; \tag{6.1}$$

$$E_t - cB_y + 4\pi enV = 0; \quad F_t + cB_x + 4\pi enU = 0;$$

$$B_t - cF_x + cE_y = 0; \quad E_x + F_y - 4\pi(en + e_iN) = 0.$$

Обусловленные самой постановкой задачи параметры малости в системе ДУ (6.1), такие как плавная неоднородность плотности ионов $N(x)$ вдоль оси x, малость углов падения ϑ лазерных лучей на плазму, приводят к иерархии $E \gg F \gg B$ компонент полей p-поляризованной световой волны в критической точке плазмы и позволяют для отыскания наследуемой точечной симметрии Ли использовать два уравнения из шести (6.1):

$$v_t + avv_x - \frac{e}{m}P = 0; \quad P_t + avP_x - 4\pi e_iNv = 0. \tag{6.2}$$

Здесь функции $v = V/a$ и $P = E/a$ нормированы на безразмерный параметр нелинейности a, пропорциональный значению магнитной индукции B в критической точке на частоте лазера, координата y учтена в комбинации со временем $t \to t - (\vartheta y/c)$.

В отличие от системы уравнений (6.1), которая допускает лишь конечную четырехпараметрическую точечную группу (группу трансляций по осям t, x, y и группу одновременных вращений в трех плоскостях (x, y), (V, U), (E, F)), уравнения (6.2), которые задают ренормгрупповое многообразие, допускают бесконечномерную группу точечных преобразований с оператором, определяемым тремя вкладами

$$X = \sum_{i=1}^{3} X_i, \quad Y = \partial_t + av\partial_x + \frac{e}{m}P\partial_v + 4\pi e_iNv\partial_P,$$

$$X_1 = \alpha_1 Y; \; X_2 = \alpha\partial_x + \frac{1}{a}Y(\alpha)\partial_v + \frac{m}{ca}Y^2(\alpha)\partial_P; \; X_3 = \frac{1}{a}\alpha_3\left[a\partial_a - v\partial_v - P\partial_P\right], \tag{6.3}$$

где α_1 произвольная функция независимых и зависимых переменных (в том числе и параметра a) $\{t, x, a, v, P\}$, а на α и α_3 наложена дифференциальная связь

$$Y^3(\alpha) + Y(\omega_L^2\alpha) = 0; \quad Y(\alpha_3) = 0; \quad \omega_L^2 \equiv \frac{4\pi|ee_i|N}{m}. \tag{6.4}$$

Теория возмущений для уравнений (6.2) по параметру нелинейности a строится таким образом, что нулевое приближение v_0, P_0 определяется решением линеаризованной системы уравнений (6.1) с учетом соответствующих граничных условий (падение электромагнитной волны на плазму из вакуума), а поправки к нему v_1, P_1 возникают линеаризацией (6.2)

$$v = v_0(t,x) + av_1(t,x) + O(a^2)\,; \quad P = P_0(t,x) + aP_1(t,x) + O(a^2)\,. \tag{6.5}$$

Сужение найденной группы на этом частном решении определяет выбор функций $\alpha_1 = 0$, $\alpha = -eP/m\omega^2$, $\alpha_3 = 1$ и дает искомый РГ-оператор

$$R = X_2 + X_3 = -\frac{eP}{m\omega^2}\partial_x + \partial_a\,. \tag{6.6}$$

Группа с оператором (6.6) является приближенной подгруппой группы (6.3) по степени неоднородности $1/L$ плазмы. Учет следующего члена разложения оператора точечной группы (6.3) по градиенту плотности для линейного профиля

$$N(x) = -(m\omega^2/4\pi e e_i)(1 + x/L) \tag{6.7}$$

модифицирует ренормгрупповой оператор следующим образом:

$$R = \left(-\frac{eP}{m\omega^2} + \frac{av^2}{3\omega^2 L}\right)\partial_x + \left(-\frac{xv}{aL} + \frac{2Pv}{3\omega^2 L}\right)\partial_v + \left(-\frac{xP}{aL} + \frac{2P^2}{3\omega^2 L}\right)\partial_P + \partial_a\,. \tag{6.8}$$

Решение уравнений Ли для оператора РГ-симметрий (6.1) продолжает решение (6.5) по ТВ по параметру a до точного решения [27, 26]:

$$P = -\frac{(\omega L)^2}{\Delta}(q_1 \sin\omega t + q_2\cos\omega t)\,, \quad v = -\frac{\omega L^2}{\Delta}(q_1\cos\omega t - q_2 \sin\omega t)\,,$$
$$x = \eta + \varepsilon(q_1\sin\omega t + q_2\cos\omega t)\,, \quad \varepsilon = aL^2/\Delta^2\,. \tag{6.9}$$

Здесь величина Δ задает ширину плазменного резонанса и определяется либо тепловым движением электронов, либо частотой ν соударений частиц в плазме:

$$\Delta = \min\{(\nu/\omega)L;\ (3V_T^2 L\omega)^{1/3}\}\,.$$

Структура формул (6.9) отражает свойство инвариантности системы ДУ (6.2), учитывающей электронную нелинейность плазмы, при групповом преобразовании, характеризуемом РГ-оператором (6.6). Тот или иной вид функций q_1 и q_2 в соотношениях (6.9) возникает как проявление конкретной зависимости от координаты x электрического поля, являющегося решением линеаризованной полной системы уравнений (6.1) при соответствующих граничных условиях и с выбранным профилем плотности в области плазменного резонанса. Например, в случае холодной электронной плазмы с линейным профилем плотности (6.7) функции q_1 и q_2 имеют вид:

$$q_1 = (1+\eta^2)^{-1}\,, \quad q_2 = \eta(1+\eta^2)^{-1}\,. \tag{6.10}$$

РГ-симметрия, задаваемая оператором (6.6), может быть использована для построения нелинейной структуры поля и в том случае, когда исходная система уравнений отличается от (6.1), например учетом теплового движения электронов плазмы. Ее линеаризация дает распределение электрического поля для линейного профиля плотности в области плазменного резонанса в виде функций Эйри-Фока. Соответствующая нелинейная структура электрического поля, плотности и скорости электронов, возникающая как продолжение учитывающих первую тепловую поправку линейных соотношений ($a \to 0$) с помощью РГ (6.6) на область конечных значений параметра a, по-прежнему определяется выражениями (6.9), в которых, однако, функции q_1 и q_2 имеют следующий вид:

$$q_1 = \int_0^\infty d\xi\cos(\eta\xi + \xi^3/3)\,, \quad q_2 = \int_0^\infty d\xi\sin(\eta\xi + \xi^3/3)\,. \tag{6.11}$$

При этом формулы для v и P в (6.9) с функциями q_1, q_2 из (6.11) являются ренормгрупповыми: они дают точное (при $\omega_L^2 = \omega^2$) решение уравнений (6.2), не содержащих вклада электронного давления, и вместе с тем учитывают конечное значение электронной температуры.

Приближенное аналитическое решение полной системы (6.1) отыскивается с использованием параметров малости по найденным нелинейным значениям v и P (подробнее см. [26]).

Пример 6.2.

Другой пример построения РГ-симметрий с использованием приближенной группы дает задача о распространении в нелинейной фокусирующей среде лазерного пучка. В параксиальном приближении это явление описывается двумя ДУ для производной эйконала v по поперечной координате x и интенсивности n лазерного пучка:

$$v_t + vv_x = a\varphi(n)n_x\,, \quad n_t + vn_x + nv_x = 0\,. \tag{6.12}$$

Уравнения (6.12) отличаются от (3.20) наличием дополнительного слагаемого в правой части первого уравнения, характеризующего нелинейность среды с параметром нелинейности a.

Будем считать, что на входе в нелинейную среду (т.е. при $t = 0$) заданы нулевая кривизна волнового фронта пучка и распределение его интенсивности n по координате x:

$$n(0,x) = N(x)\,; \quad v(0,x) = 0\,. \tag{6.13}$$

После перехода к переменным годографа $\tau = nt$ и $\chi = x - vt$ и введения нормированной производной эйконала $w = v/a$ система уравнений (6.12) в пренебрежении эффектами нелинейности записывается в более простой форме

$$\tau_w - (n/\varphi(n))\chi_n = 0\,, \quad \chi_w = 0\,. \tag{6.14}$$

В отличие от уравнений (6.12), допускающих лишь конечную группу неточечных симметрий заданного порядка, симметрия уравнений (6.14) бесконечномерна. Она характеризуется произвольной зависимостью координат $f = f^0$ и $g = g^0$ канонического оператора

$$X = f\partial_\tau + g\partial_\chi \tag{6.15}$$

от n, τ, χ и производных τ_s, χ_s произвольного порядка

$$f^0 = F^0(n, \chi_s, \tilde{\tau}_s) + \int dw \left\{ \frac{n}{\varphi} \left[\partial_n + \sum_{s=0}^{\infty} (\tau_{s+1}\partial_{\tau_s} + \chi_{s+1}\partial_{\chi_s}) \right] g^0 \right\},$$

$$g^0 = G^0(n, \chi_s, \tilde{\tau}_s), \qquad \tilde{\tau}_s = \tau_s - w \sum_{p=0}^{s} \binom{s}{p} (n/\varphi)_p \, \chi_{s-p+1}, \tag{6.16}$$

$$\tau_s = (\partial^s \tau / \partial n^s), \quad \chi_s = (\partial^s \chi / \partial n^s).$$

Здесь в формулах (6.16) и ниже в (6.18) F^0 и G^0–произвольные функции своих аргументов, а выражения в фигурных скобках перед интегрированием по переменной w должны быть записаны в переменных $\tilde{\tau}_s$, χ_s, n, w.

При малом, но отличном от нуля значении параметра $a \neq 0$ симметрия (6.16) наследуется системой ДУ (6.12) как приближенная. Например, для среды с кубичной нелинейностью ($\varphi(n) = 1$) имеем следующий результат:

$$f = \sum_{i=0}^{\infty} a^i f^i; \quad g = \sum_{i=0}^{\infty} a^i g^i, \tag{6.17}$$

$$f^i = F^i(n, \chi_s, \tilde{\tau}_s) + $$
$$+ \int dw \left\{ \sum_{s=0}^{\infty} \tau_{s+1}\partial_{\chi_s} f^{i-1} + n \left[\partial_n + \sum_{s=0}^{\infty} (\tau_{s+1}\partial_{\tau_s} + \chi_{s+1}\partial_{\chi_s}) \right] g^i \right\},$$

$$g^i = G^i(n, \chi_s, \tilde{\tau}_s) + \tag{6.18}$$
$$+ \int dw \left\{ \sum_{s=0}^{\infty} \tau_{s+1}\partial_{\chi_s} g^{i-1} - \left[\partial_n + \sum_{s=0}^{\infty} (\tau_{s+1}\partial_{\tau_s} + \chi_{s+1}\partial_{\chi_s}) \right] f^i \right\},$$

$$i \geq 1, \quad \tilde{\tau}_s = \tau_s - w(n\chi_{s+1} + s\chi_s).$$

Как следует из этих формул, симметрия уравнений (6.14) при $a \neq 0$ наследуется системой уравнений (6.12) в любом порядке по параметру a. При этом в качестве симметрии нулевого приближения может выступать как точечная симметрия Ли, так и симметрия Ли-Беклунда. Вид наследуемой симметрии при этом целиком определяется соотношениями (6.17), (6.18): она может быть как точечной, так и симметрией Ли-Беклунда.

Особый интерес представляют такие значения функций f^0 и g^0 нулевого приближения,при которых ряды (6.17) обрываются при некотором конечном значении $i = i_{max}$ и превращаются в конечную сумму. В этом случае вместо приближенной группы по параметру малости a мы имеем точную группу симметрии (ср.[14, §11]). В качестве примера приведем следующий набор функций f^i, g^i:

$$f^0 = 2n(1-n)\tau_2 - n\tau_1 - 2nw(\chi_1 + n\chi_2); \quad g^0 = 2n(1-n)\chi_2 + (2-3n)\chi_1;$$

$$f^1 = \frac{1}{2}nw^2\tau_2; \quad g^1 = 2nw\tau_2 + w\tau_1 + \frac{1}{2}(nw^2\chi_2 + w^2\chi_1). \tag{6.19}$$

Легко проверить прямой подстановкой (6.19) в (6.18), что все следующие приближения с $i \geq 2$ обращаются в нуль. Симметрия (6.19) порождает инвариантное решение [28, 29], полученное ранее другим способом в работе [31].

При построении группы симметрии краевой задачи (6.12), (6.13) координаты f^0, g^0 и "постоянные интегрирования" F^i, G^i, $i \geq 1$, не являются произвольными, но выбираются таким образом, чтобы соотношения $f = 0$, $g = 0$ удовлетворяли заданным краевым данным $\tau_s = 0$, $\chi = \chi_0(n)$ при $w = 0$. Если при этом функции F^i, G^i также равны нулю, то вид краевых данных связан только с видом функций f^0 и g^0. По существу, условия $f = 0$, $g = 0$ принимают вид дифференциальных связей (в частном случае – просто алгебраических соотношений), которым удовлетворяют краевые данные. Например, для приведенного выше набора (6.19) краевые данные полностью определены видом функции g^0.

Произвол в задании функций f^0, g^0 позволяет конструировать РГ-симметрии для любого вида краевых данных (6.13). В качестве примера приведем решение задачи о построении группы симметрии краевой задачи для гауссова пучка с плоским фазовым фронтом и начальным распределением при $\tau = 0$ вида

$$\chi_0(n) = (\ln(1/n))^{1/2}. \tag{6.20}$$

Такому начальному распределению соответствует, в частности, следующий выбор функции f^0:

$$f^0 = 1 + 2n\chi\chi_1. \tag{6.21}$$

По имеющейся функции f^0 наследуемая точечная группа краевой задачи восстанавливается с помощью формул (6.17), (6.18) и имеет следующий вид:

$$R = -2\chi\partial_w + 2a\tau\partial_n + \left(1 + \frac{a\tau^2}{n}\right)\partial_\tau. \tag{6.22}$$

Условие инвариантности решения краевой задачи относительно РГ с оператором (6.22) записывается в виде пары ДУ в частных производных

$$\chi\chi_w - a\tau\chi_n = 0, \quad 2\chi\tau_w - 2a\tau\tau_n + 1 + \frac{a\tau^2}{n} = 0, \tag{6.23}$$

решение которых дает искомое приближенное аналитическое решение задачи о самофокусировке

$$x^2 = (ant^2 - \ln n)\left[1 - 2Q(\sqrt{ant^2})\right]^2, \quad v = -2\frac{x}{t}\frac{Q(\sqrt{ant^2})}{\left[1 - 2Q(\sqrt{ant^2})\right]}. \qquad (6.24)$$

Здесь функция $Q(z)$ выражается через действительную часть интеграла вероятности от комплексного аргумента:

$$Q(z) = ze^{-z^2/2}\int_0^z dte^{t^2/2}. \qquad (6.25)$$

7 Заключение

Изложенный в работе подход является попыткой создания нового регулярного метода построения РГ-симметрий краевых задач, отличающегося от традиционных методов конструирования ренормгрупп в теоретической физике [32]. Основу подхода составляет математический аппарат классического и современного группового анализа, а выбор того или иного алгоритма для построения РГ-симметрий определяется математической моделью, используемой для описания конкретной физической системы. Как правило, из самой постановки физической задачи следует вид ренормгруппового многообразия, выбор малых параметров при построении приближенной группы, конкретная форма представления решения по теории возмущений, форма записи краевых данных. Существование РГ-симметрий, являющихся отражением симметрий соответствующих решений, рассматриваемых как функции существенных физических переменных и их краевых значений, приводит к математической формулировке свойства функциональной автомодельности на языке инфинитезимальных операторов ренормгруппы в приложении к физическим системам, описываемым с помощью ДУ.

Использованные для иллюстрации предлагаемого подхода примеры построения РГ-симметрий не ограничивают круга задач, как решаемых с помощью этого метода, так и допускающих в принципе такое решение. Плодотворным может оказаться сочетание различных подходов для построения РГ-симметрий, например, с использованием приближенной группы и метода инвариантного погружения, на основе нелокальных симметрий и т.п. Представляет также интерес дальнейшее развитие подхода в приложении к физическим системам, математический способ описания которых не ограничивается рамками ДУ [33].

ЛИТЕРАТУРА

[1] Н.Н.Боголюбов и Д.В.Ширков, Приложение ренормализационной группы к улучшению формул теории возмущений. *ДАН СССР*, 1955, Т.**103**, No 3, С.391-394; Charge Renormalization Group in Quantum Field Theory, *Nuovo Cim.*, 1956, V.**3**, P.845-863.

[2] Н.Н.Боголюбов и Д.В.Ширков, *Введение в теорию квантованных полей*, М.:Физматлит, 1957, 1974, 1980, 1984.

[3] E.Stueckelberg, A.Petermann, La normalisation des constantes dans la theorie des quanta, *Helv.Phys.Acta*, 1953, V.**26**, P.499-520.

[4] Н.Н.Боголюбов и Д.В.Ширков, О ренормализационной группе в квантовой электродинамике, *ДАН СССР*, 1955, Т.**103**, С. 203-206.

[5] Д.В.Ширков, Ренормализационная группа, принцип инвариантности и функциональная автомодельность, *ДАН СССР*, 1982, Т.**263**, С.64-67.

[6] Д.В.Ширков, Ренормгруппа и функциональная автомодельность в различных областях физики. *ТМФ*, 1984, Т.**60**, No 2, С.218-223; см. также в сб.*Non-linear and Turbulent Processes in Physics*, Ed. Sagdeev R.Z., Harwood Acad. Publ., N.Y.,1984, V.**3**, P.1637-1647.

[7] Д.В.Ширков, Ренормгруппа в современной физике, в сб. *"Совещание "Ренормгруппа-86"*, изд. ОИЯИ, Дубна, 1987, С.9-33; англ. пер. в сб.*"Renormalization Group"*, Eds.D.V.Shirkov et al., WS, Singapore, P.1-32; см. также *Intern.J.Theor. Phys.*, 1988, V.**5**, P.111-222.

[8] Sophus Lie, *Gesammelte Abhandlungen.* Leipzig-Oslo, Bd.5, 1924; Bd.6, 1927.

[9] Л.В.Овсянников, *Групповой анализ дифференциальных уравнений*, М., Наука, 1978 (англ.перевод: *Group analysis of differential equations*, Academic Press, New-York,1982).

[10] Н.Х.Ибрагимов, *Группы преобразований в математической физике*, М., Наука, 1983 (англ.перевод: *Transformation groups applied to mathematical physics*, Riedel, Dordrecht, 1985).

[11] R.L.Anderson, N.H.Ibragimov, *Lie-Bäcklund Transformations in Applications*, Studies in Applied Mathematics 1, SIAM, Philadelphia, 1979.

[12] CRC Handbook of Lie Group Analysis of Differential Equations. Ed.N.H.Ibragimov, CRC Press, Boca Raton, Florida, USA. Vol.1: Symmetries, Exact Solutions and Conservation Laws, 1994; Vol.2: Applications in Engineering and Physical Sciences, 1995.

[13] Peter J. Olver, *Applications of Lie groups to differential equations*, Springer-Verlag, New York, 1986 (русский перевод: П.Олвер, *Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям*, Москва, Мир, 1989).

[14] В.А.Байков, Р.К.Газизов, Н.Х.Ибрагимов, *Методы возмущений в групповом анализе,* Итоги науки и техники, Современные проблемы математики, **34**, С.85-147, Москва, ВИНИТИ, 1989.

[15] А.Ш.Ахатов, Р.К.Газизов, Н.Х.Ибрагимов, *Нелокальные симметрии. Эвристический подход*, Итоги науки и техники, Современные проблемы математики, **34**, С.3-84, Москва, ВИНИТИ, 1989.

[16] В.И.Фущич, В.М.Штелень и Н.И.Серов, *Симметрийный подход и точные решения нелинейных уравнений математической физики*, Киев, Наукова Думка, 1989.

[17] В.А.Амбарцумян, О рассеянии света атмосферами планет, *Астр.Журнал*, 1942, Т.**19**, No 5, С.30; К вопросу о диффузном отражении света мутной средой, *ДАН СССР*, 1943, **38**, No 8, С.257; Об одномерном случае задачи о рассеивающей и поглощающей среде конечной оптической толщины, *Изв. АН Арм.ССР, естеств. науки*, No 1-2, С.37; см. также *Научные труды*, том 1, 1960, Изд. АН Армянской ССР.

[18] В.В.Степанов, *Курс дифференциальных уравнений*, М., 1958, С.298-307.

[19] Ю.Н.Григорьев, С.В.Мелешко, Групповой анализ интегродифференциального уравнения Больцмана, *ДАН СССР*, 1987, Т.297, No 2, С.323-327.

[20] В.Ф.Ковалев, С.В.Кривенко, В.В.Пустовалов, Групповой анализ кинетического уравнения Власова, *Дифференциальные уравнения*, 1993, Т.29, No 10, С.1804-1817; Т.29, No 11, С.1971-1983.

[21] В.И.Кляцкин, *Методы погружения в теории распространения волн*, М., "Наука", 1986.

[22] В.Ф.Ковалев, С.В.Кривенко, В.В.Пустовалов, Симметрия Ли-Беклунда уравнения погружения краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка, в сб. *Проблемы управления и навигации авиационно-космических систем*, Киевский ин-т ВВС, Киев, П-781, С.33, 1994.

[23] V.F.Kovalev, V.V.Pustovalov, Lie algebra of renormalization group admitted by initial value problem for Burgers equation, *Lie Group and their Applications*, 1994, V.**1**, No 2, P.104-120.

[24] В.Ф.Ковалев, В.В.Пустовалов, *Функциональная автомодельность точного решения уравнения Бюргерса*, Препринт No 116, ФИАН СССР, М., 1991.

[25] В.Ф.Ковалев, В.В.Пустовалов, *Восьмимерная алгебра Ли ренормгруппы, допускаемой начальной задачей для уравнения Бюргерса*, Препринт No 53, ФИ РАН, М., 1992.

[26] В.Ф.Ковалев, В.В.Пустовалов, Функциональная автомодельность в одной из задач теории плазмы с электронной нелинейностью, *ТМФ*, 1989, Т.**81**, No 1(10), С.69-85.

[27] В.Ф.Ковалев, В.В.Пустовалов, *Сильная нелинейность и генерация высших гармоник в неоднородной плазме*, Препринт No 78, ФИАН, М., 1987.

[28] В.Ф.Ковалев, В.В.Пустовалов, С.И.Сенашов, Симметрия Ли-Беклунда уравнений геометрической оптики, *Дифференциальные уравнения*, 1993, V.**29**, No 10, С.1751-1764.

[29] V.F.Kovalev, Group and renormgroup symmetry of quasi-Chaplygin media, *Report on the International Conference "Symmetry in Nonlinear Mathematical Physics"*, Kiev, 1995, July 3-8.

[30] V.F.Kovalev, S.V.Krivenko and V.V.Pustovalov, *Lie symmetry and a group on a solution of a boundary-value problem*, P.N.Lebedev Physical Institute, preprint No 13, April, 1995.

[31] С.А.Ахманов, Р.В.Хохлов, А.П.Сухоруков, О самофокусировке и самоканализации интенсивных световых пучков в нелинейной среде, *ЖЭТФ*, 1966, Т.**50**, С.1537-1549.

[32] Д.В.Ширков, Ренормгруппа Боголюбова, *УМН*, 1994, Т.**49**, No 5(299), С.147-164.

[33] V.F.Kovalev, S.V.Krivenko, V.V.Pustovalov, The Renormalization group method based on group analysis, *Proceedings Int. meeting "Renormalization group-91", Second International Conference*, September 1991, Dubna, World Scientific, Singapore, P.300.

Рукопись поступила в издательский отдел
31 октября 1995 года.