ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р5-95-332

А.В.Карабегов

ДЕФОРМАЦИОННЫЕ КВАНТОВАНИЯ С РАЗДЕЛЕНИЕМ ПЕРЕМЕННЫХ НА КЭЛЕРОВОМ МНОГООБРАЗИИ

Направлено в журнал «Функциональный анализ и его приложения»

1995

Карабегов А.В. P5-95-332
Деформационные квантования с разделением переменных
на кэлеровом многообразии

Мы вводим понятие деформационного квантования с разделением переменных на кэлеровском многообразии. Требуется, чтобы отвечающее такому квантованию ★-произведение обладало следующим свойством. Левое (соответственно правое) ★-умножение на локальную голоморфную (соответственно антиголоморфную) функцию совпадает с поточечным умножением на эту функцию.

Ранее было показано, что деформационные квантования на орбитах компактной полупростой группы Ли и на ограниченных симметрических областях, полученные из квантования Березина, являются квантованиями с разделением переменных.

Мы доказываем, что деформационные квантования с разделением переменных на кэлеровом многообразии находятся во взаимно однозначном соответствии с формальными деформациями кэлеровой метрики.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики им.Н.Н.Боголюбова ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна, 1995

Перевод автора

Karabegov A.V. P5-95-332
Deformation Quantizations with Separation of Variables
on a Kähler Manifold

We introduce a notion of deformation quantization with separation of variables on a Kähler manifold. The ★-product corresponding to such a quantization is required to have the following property. Left (respectively right) ★-multiplication by a local holomorphic (respectively antiholomorphic) function coincides with point-wise multiplication by that function.

It has been shown previously that the deformation quantizations on the orbits of a compact semisimple Lie group and on bounded symmetric domains, obtained from Berezin's quantization, are quantizations with separation of variables.

We prove that deformation quantizations with separation of variables on a Kähler manifold are in 1-1 correspondence with formal deformations of the Kähler metrics.

The investigation has been performed at the Bogoliubov Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna, 1995

Введение

В работе [1] была введена простая геометрическая конструкция формального деформационного квантования на кэлеровом многообразии. Эта конструкция приводит к деформационному квантованию на орбитах компактной полупростой группы Ли и на ограниченных симметрических областях, полученному из $*$-произведения Березина (см. [2]) в [3-6].

Формальное $\star$-умножение на кэлеровом многообразии M, отвечающее квантованию из [1], связано с разделением переменных на голоморфные и антиголоморфные в следующем смысле. Для любой окрестности $U \subset M$ $\star$-умножение слева на голоморфную функцию и справа на антиголоморфную функцию на U совпадает с поточечным умножением на эти функции.

Оказывается, что все такие квантования с разделением переменных на кэлеровом многообразии могут быть получены незначительным обобщением конструкции из [1] и допускают полную параметризацию геометрическими объектами — формальными деформациями исходной кэлеровой метрики.

Автор пользуется случаем выразить свою благодарность Б. В. Федосову за стимулирующие беседы и Дж. Ронсли, ознакомившему его с препринтами своих совместных работ с М. Каэном и С. Гютт.

1. Определение деформационного квантования с разделением переменных

Определим формальное деформационное квантование на симплектическом многообразии M (см. [7]).

Пусть $\{C_r(\cdot,\cdot)\}$, $r = 0,1,2,\dots$ — семейство бидифференциальных операторов на M, т.е. дифференциальных операторов, действующих из $C^\infty(M) \otimes C^\infty(M)$ в $C^\infty(M)$. Определим бинарную операцию $\star$ в пространстве формальных степенных рядов $\mathcal{F} = C^\infty(M)[[\nu]]$, полагая для $f = \sum_{r=0}^\infty \nu^r f_r$ и $g = \sum_{r=0}^\infty \nu^r g_r$

$$f \star g = \sum_{r=0}^{\infty} \nu^r \sum_{i+j+k=r} C_i(f_j, g_k). \tag{1}$$

Операция $\star$ задает формальное деформационное квантование на симплектическом многообразии M, если она ассоциативна и для $f, g \in C^\infty(M)$ выполняется

$$C_0(f,g) = fg,\ C_1(f,g) - C_1(g,f) = i\{f,g\}, \tag{2}$$

где $\{\cdot,\cdot\}$ — скобка Пуассона на M, связанная с симплектической структурой.

В этом случае операция $\star$ называется $\star$-произведением.

Все деформационные квантования, рассматриваемые в настоящей работе, формальные, так что в дальнейшем мы не будем упоминать этого явно.

Поскольку $\star$-произведение задается дифференциальными операторами, то оно локально, т.е. его можно ограничить на любое открытое подмножество $U \subset M$. Ограничение $\star$ задает $\star$-произведение в пространстве $\mathcal{F}(U) = C^\infty(U)[[\nu]]$.

Если на M задано деформационное квантование, то для каждой окрестности $U \subset M$ в пространстве $\mathcal{F}(U)$ действуют алгебры $\mathcal{L}(U)$ и $\mathcal{R}(U)$ операторов левого и правого $\star$-умножения на элементы $\mathcal{F}(U)$ соответственно. Для $f, g \in \mathcal{F}(U)$ зададим операторы $L_f \in \mathcal{L}(U)$ и $R_g \in \mathcal{R}(U)$ соотношениями $L_f g = R_g f = f \star g$.

Операторы из $\mathcal{L}(U)$ коммутируют с операторами из $\mathcal{R}(U)$, $[L_f, R_g] = 0$. Для $U = M$ положим $\mathcal{L} = \mathcal{L}(M)$, $\mathcal{R} = \mathcal{R}(M)$.

Пусть $\mathcal{D}(U)$ – алгебра формальных рядов дифференциальных операторов вида $\tilde{A} = \sum_{r=0}^\infty \nu^r A_r$, где A_r — дифференциальные операторы с гладкими коэффициентами на U. Эти ряды действуют как линейные операторы на пространстве $\mathcal{F}(U)$, для $\tilde{A} = \sum_{r=0}^\infty \nu^r A_r$ и $f = \sum_{r=0}^\infty \nu^r f_r$

$$\tilde{A} f = \sum_{r=0}^{\infty} \nu^r \sum_{s=0}^{r} A_{r-s} f_s.$$

Поскольку элементы $\mathcal{F}(U)$ можно поточечно перемножать, $\mathcal{F}(U)$ вкладывается в $\mathcal{D}(U)$ как алгебра операторов поточечного умножения. Из определения $\star$-умножения следует, что $\mathcal{L}(U)$ и $\mathcal{R}(U)$ являются подалгебрами $\mathcal{D}(U)$.

Далее мы будем иногда называть формальные ряды функций, операторов и т.д. формальными функциями, операторами, или даже опускать эпитет формальный, что не должно приводить к недоразумениям.

Пусть M — кэлерово многообразие комплексной размерности m с кэлеровой формой ω_0 типа $(1,1)$.

Определение: Деформационное квантование на кэлеровом многообразии M называется деформационным квантованием с разделением переменных, если для любой окрестности $U \subset M$ и функций $a, b, f \in C^\infty(U)$, из которых a голоморфна, а b антиголоморфна, справедливы соотношения $a \star f = a \cdot f$, $f \star b = f \cdot b$.

Если на M задано деформационное квантование с разделением переменных , то для голоморфной функции a и антиголоморфной функции b на произвольной окрестности $U \subset M$ операторы L_a и R_b суть операторы поточечного умножения на функции a и b соответственно, $L_a = a$ и $R_b = b$. Если, кроме того, U - координатная окрестность с голоморфными координатами $z^1, \dots, z^m$, то, поскольку для $f \in \mathcal{F}(U)$ оператор L_f коммутирует с $R_{\bar{z}^l} = \bar{z}^l$, он содержит частные производные только по z^k. Аналогично, оператор R_f содержит частные производные только по $\bar{z}^l$.

2. Деформация кэлеровой метрики, связанная с квантованием с разделением переменных

С каждым деформационным квантованием с разделением переменных на кэлеровом многообразии M с кэлеровой формой ω_0 мы канонически свяжем формальную деформацию кэлеровой метрики ω_0, т.е. формальный ряд $\omega = \omega_0 + \nu\omega_1 + \nu^2\omega_2 + \ldots$, такой, что $\omega_1, \omega_2, \ldots$ суть замкнутые, но не обязательно невырожденные формы типа $(1,1)$ на M.

На стягиваемой координатной окрестности U существует кэлеров потенциал $\Phi_0 \in C^\infty(U)$, такой, что $\omega_0 = i\partial\bar{\partial}\Phi_0 = ig_{kl}dz^k \wedge d\bar{z}^l$, где $g_{kl} = \partial^2\Phi_0/\partial z^k\partial\bar{z}^l$. Здесь, как и ниже, используется тензорное правило суммирования по повторяющимся индексам. Кэлеров потенциал Φ_0 определен с точностью до слагаемого вида $a+b$, где a голоморфная, а b антиголоморфная функции на U.

Обозначим через (g^{lk}) матрицу, обратную к (g_{kl}). Скобка Пуассона функций $f, g \in C^\infty(U)$ записывается так:

$$\{f,g\} = ig^{lk}\left(\frac{\partial f}{\partial z^k}\frac{\partial g}{\partial \bar{z}^l} - \frac{\partial g}{\partial z^k}\frac{\partial f}{\partial \bar{z}^l}\right).$$

Пусть на M определено деформационное квантование. Введем бидифференциальные операторы $D_r(\cdot,\cdot)$, заданные на функциях $u, v \in C^\infty(M)$ формулой $D_r(u,v) = C_r(u,v) - C_r(v,u)$. Из (2) следует, что $D_0 = 0$, а $D_1 = i\{\cdot,\cdot\}$. Таким образом, для $f = \sum_{r=0}^\infty \nu^r f_r$ и $g = \sum_{r=0}^\infty \nu^r g_r$

$$f \star g - g \star f = \sum_{r=1}^\infty \nu^r \sum_{i+j+k=r} D_i(f_j, g_k). \tag{3}$$

Лемма 1. Пусть U – стягиваемая координатная окрестность на M. Система уравнений относительно неизвестной функции u на U, $D_1(u, z^k) = f^k$, $k = 1, \ldots, m$, где $f^k \in C^\infty(U)$, разрешима тогда и только тогда, когда $D_1(f^k, z^{k'}) = D_1(f^{k'}, z^k)$ для любых k, k'. При этом решение u определено с точностью до голоморфного слагаемого.

С учетом того, что $D_1 = i\{\cdot,\cdot\}$, лемма сводится к утверждению о том, что условием разрешимости уравнения $\bar{\partial}u = g_{kl}f^k d\bar{z}^l$ является $\bar{\partial}$-замкнутость формы $g_{kl}f^k d\bar{z}^l$.

Предложение 1. Пусть на кэлеровом многообразии M с кэлеровой формой ω_0 задано деформационное квантование с разделением переменных и U – стягиваемая координатная окрестность на M. Существуют формальные функции $u^1, \ldots, u^m \in \mathcal{F}(U)$, такие, что $u^k \star z^{k'} - z^{k'} \star u^k = \nu\delta^{kk'}$, где δ – символ Кронекера.

Доказательство. Мы построим функцию $u = u^1$. Пусть $u = u_0 + \nu u_1 + \nu^2 u_2 + \ldots$. Коэффициенты u_r должны, таким образом, быть решениями системы уравнений

$$\sum_{r=0}^\infty \nu^r \sum_{s=0}^{r-1} D_{r-s}(u_s, z^k) = \nu\delta^{1k}, \; k = 1, \ldots, m. \tag{4}$$

Приравнивая в (4) члены при равных степенях ν, получим при $r = 1$ уравнения $D_1(u_0, z^k) = \delta^{1k}$, $k = 1, \ldots, m$. Учитывая, что $D_1 = i\{\cdot,\cdot\}$, легко проверить, что в качестве решения этих уравнений можно взять $u_0 = \partial\Phi_0/\partial z^1$. Для $r > 1$ полученные уравнения таковы:

$$\sum_{s=0}^{r-1} D_{r-s}(u_s, z^k) = 0, \; k = 1, \ldots, m. \tag{5}$$

Мы будем строить функции u_s индуктивно, пользуясь уравнениями (5) и леммой 1. Предположим, что для $s < n$ функции u_s построены и удовлетворяют уравнениям (5) для $r \le n$. Мы покажем, что функция u_n может быть найдена из уравнений (5) для $r = n+1$, которые мы перепишем в следующем виде:

$$D_1(u_n, z^k) = -\sum_{s=0}^{n-1} D_{n-s+1}(u_s, z^k) = 0, \; k = 1, \ldots, m. \tag{6}$$

Из леммы 1 следует, что уравнения (6) разрешимы относительно u_n, если сумма

$$\sum_{s=0}^{n-1} D_1(D_{n-s+1}(u_s, z^k), z^{k'})$$

симметрична относительно перестановки индексов k и k'. Тождество Якоби для $\star$-коммутатора (3) сводится к тождествам

$$\sum_{i=1}^{r-1} D_i(D_{r-i}(f,g),h) + \text{циклическая перестановка } f,g,h = 0 \tag{7}$$

для произвольных гладких функций f, g, h. Полагая в (7) $f = u_s$, $g = z^k$, $h = z^{k'}$, $r = n - s + 1$, и принимая во внимание, что поскольку z^k попарно $\star$-коммутируют, то $D_r(z^k, z^{k'}) = 0$, получим

$$\sum_{i=1}^{n+1-s} (D_i(D_{n-i-s+2}(u_s, z^k), z^{k'}) - D_i(D_{n-i-s+2}(u_s, z^{k'}), z^k)) = 0. \quad (8)$$

Складывая уравнения (8) при $s = 0, 1, \ldots, n-1$ и меняя порядок суммирования, получим

$$\sum_{s=0}^{n-1}(D_1(D_{n-s+1}(u_s, z^k), z^{k'}) - D_1(D_{n-s+1}(u_s, z^{k'}), z^k)) =$$

$$-\sum_{i=2}^{n+1} \sum_{s=0}^{n-i+1} (D_i(D_{n-i-s+2}(u_s, z^k), z^{k'}) - D_i(D_{n-i-s+2}(u_s, z^{k'}), z^k)). \quad (9)$$

Из того, что $D_1(u_0, z^k) = \delta^{1k}$ $\star$-коммутирует с $z^{k'}$, следует, что $D_i(D_1(u_0, z^k), z^{k'}) = 0$, поэтому внутренняя сумма в правой части (9) при $i = n+1$ равна нулю. Из (5) следует, что внутренняя сумма в правой части (9) равна нулю при $1 < i < n+1$, так что правая часть (9) целиком равна нулю, что доказывает разрешимость системы (6) относительно s_n. Предложение доказано.

Совершенно аналогично можно найти формальные функции $v^1, \ldots, v^m \in \mathcal{F}(U)$ такие, что $v^l \star \bar{z}^{l'} - \bar{z}^{l'} \star v^l = -\nu\delta^{ll'}$.

Поскольку $L_{z^k} = z^k$, то из предложения 1 следует, что $[L_{u^k}, z^{k'}] = \delta^{kk'}$. Пользуясь тем, что операторы из $\mathcal{L}(U)$ содержат только частные производные по z^k, операторы L_{u^k} и, аналогично, операторы R_{v^l} легко вычислить явно.

Лемма 2. $L_{u^k} = u^k + \nu\partial/\partial z^k$, $R_{v^l} = v^l + \nu\partial/\partial \bar{z}^l$.

Введем формальные дифференциальные формы $\alpha = -\sum_k u^k dz^k$ и $\beta = \sum_l v^l d\bar{z}^l$. Из того, что операторы L_{u^k} и R_{v^l} коммутируют, следуют соотношения $\partial u^k/\partial \bar{z}^l = \partial v^l/\partial z^k$, откуда $\bar{\partial}\alpha = \partial\beta$. Определим замкнутую формальную дифференциальную форму $\omega = i\bar{\partial}\alpha = i\partial\beta$ типа (1,1). Как следует из доказательства предложения 1, свободный член формального

ряда ω совпадает с ω_0, то есть ω является деформацией кэлеровой формы ω_0.

Предположим, $\tilde{u}^1, \ldots, \tilde{u}^m$ — другой набор решений (4), и $\tilde{\alpha} = -\sum_k \tilde{u}^k dz^k$. Из леммы 2 и того, что операторы $L_{\tilde{u}^k}$ и R_{v^l} коммутируют, следует, что форма $i\bar{\partial}\tilde{\alpha}$ совпадает с ω, то есть ω не зависит от конкретного выбора решения системы (4). Нетрудно также показать, что ω не зависит и от выбора координат на U.

В силу $\bar{\partial}$-леммы Пуанкаре на стягиваемой координатной окрестности $U \subset M$ существует формальный ряд $\Phi = \Phi_0 + \nu\Phi_1 + \ldots \in \mathcal{F}$, являющийся потенциалом формальной кэлеровой метрики $\omega = \omega_0 + \nu\omega_1 + \nu^2\omega_2 + \ldots$. Это означает, что для всех $r \geq 0$ $\omega_r = i\partial\bar{\partial}\Phi_r = i(\partial\Phi_r^2/\partial z^k\partial\bar{z}^l)dz^k \wedge d\bar{z}^l$.

Поскольку $\omega = i\bar{\partial}\alpha = i\bar{\partial}(-\partial\Phi)$, $\alpha + \partial\Phi$ является $\bar{\partial}$-замкнутой формой типа (1,0). В силу этого коэффициенты $\alpha + \partial\Phi$, равные $\partial\Phi/\partial z^k - u^k$, голоморфны. Отсюда непосредственно следует, что $L_{\partial\Phi/\partial z^k} = \partial\Phi/\partial z^k + \nu\partial/\partial z^k$ и, аналогично, $R_{\partial\Phi/\partial\bar{z}^l} = \partial\Phi/\partial\bar{z}^l + \nu\partial/\partial\bar{z}^l$.

Таким образом, по данному деформационному квантованию с разделением переменных на каждой стягиваемой окрестности $U \subset M$ строится формальная деформация ω кэлеровой формы ω_0. Из конструкции формы ω следует, что на пересечениях окрестностей локальные формы согласованы и определяют глобальную форму ω на M.

Теорема 1. С каждым деформационным квантованием с разделением переменных на кэлеровом многообразии M канонически связана формальная кэлерова метрика ω, являющаяся деформацией кэлеровой метрики ω_0 на M. Если $U \subset M$ — стягиваемая координатная окрестность и Φ — потенциал формальной метрики ω, то имеют место формулы $L_{\partial\Phi/\partial z^k} = \partial\Phi/\partial z^k + \nu\partial/\partial z^k$ и $R_{\partial\Phi/\partial\bar{z}^l} = \partial\Phi/\partial\bar{z}^l + \nu\partial/\partial\bar{z}^l$.

3. Конструкция квантования с разделением переменных по деформации кэлеровой метрики

Нашей целью является обобщение конструкции деформационного квантования на кэлеровом многообразии, анонсированной в [1].

Предположим, что на M задана формальная деформация ω кэлеровой метрики ω_0.

Лемма 3. Пусть на стягиваемой координатной окрестности $U \subset M$ выбран потенциал $\Phi = \Phi_0 + \nu\Phi_1 + \ldots \in \mathcal{F}$ формальной метрики ω. Тогда множество формальных рядов дифференциальных операторов из $\mathcal{D}(U)$, перестановочных с операторами $\bar{z}^l$ и $\partial\Phi/\partial\bar{z}^l + \nu\partial/\partial\bar{z}^l$, зависит только от метрики ω, а не от конкретного выбора потенциала.

Доказательство. Если $\Phi' \in \mathcal{F}$ — другой потенциал метрики ω, то $\Phi' = \Phi + a + b$, где a и b — формальные ряды голоморфных и антиголоморфных функций соответственно. Оператор, перестановочный с $\bar{z}^l$ и $\partial\Phi/\partial\bar{z}^l + \nu\partial/\partial\bar{z}^l$, перестановочен с умножениями на антиголоморфные функции. Следовательно, он коммутирует с $\partial\Phi'/\partial\bar{z}^l + \nu\partial/\partial\bar{z}^l = (\partial\Phi/\partial\bar{z}^l + \nu\partial/\partial\bar{z}^l) + \partial b/\partial\bar{z}^l$, откуда следует утверждение леммы.

Множество операторов, о котором идет речь в лемме 3, обозначим $\mathcal{L}_\omega(U)$. Отметим, что $\mathcal{L}_\omega(U)$ является алгеброй операторов.

Пусть U – координатная окрестность на M с заданным на ней потенциалом Φ_0 кэлеровой метрики ω_0. Обозначим через $S(U)$ множество дифференциальных операторов с гладкими коэффициентами на U, перестановочных с умножениями на антиголоморфные координаты $\bar{z}^l$, т.е. содержащих только частные производные по z^k.

Зададим дифференциальные операторы D^l на U, $D^l = g^{lk}\partial/\partial z^k = i\{\bar{z}^l, \cdot\}$.

Лемма 4. Для всех $k, l, l' = 1, \ldots, m$ справедливы соотношения

(i) $[D^l, D^{l'}] = 0$;

(ii) $[D^l, \partial\Phi_0/\partial\bar{z}^{l'}] = \delta^l_{l'}$;

(iii)$\partial/\partial z^k = g_{kl}D^l$.

Утверждение леммы проверяется прямыми вычислениями.

Из леммы 4 следует, что любой оператор из $S(U)$ можно каноническим образом записать в виде суммы мономов вида $a_{l_1\ldots l_s}D^{l_1}\ldots D^{l_s}$, где $a_{l_1\ldots l_s} \in C^\infty(U)$ симметричен по l_i.

Определение. Скрученным символом оператора $A \in S(U)$, представленного в каноническом виде $\sum a_{l_1\ldots l_s}D^{l_1}\ldots D^{l_s}$, называется многочлен от переменных $\xi^1, \ldots, \xi^m$, $a(\xi) = \sum a_{l_1\ldots l_s}\xi^{l_1}\ldots\xi^{l_s}$ с коэффициентами из $C^\infty(U)$.

Из леммы 4 легко выводится

Лемма 5. Пусть $a(\xi)$ – скрученный символ оператора $A \in S(U)$. Тогда скрученный символ оператора $[A, \partial\Phi_0/\partial\bar{z}^l]$ равен $\partial a/\partial\xi^l$.

Рассмотрим систему уравнений относительно неизвестного оператора $A \in S(U)$,

$$[A, \partial\Phi_0/\partial\bar{z}^l] = B_l, \qquad l = 1, \ldots, m, \tag{10}$$

где $B_l \in S(U)$.

Лемма 6. Система (10) имеет решения тогда и только тогда, когда для всех l, l' $[B_l, \partial\Phi_0/\partial\bar{z}^{l'}] = [B_{l'}, \partial\Phi_0/\partial\bar{z}^l]$. Если A_0 – частное решение системы, то полное решение имеет вид $A_0 + A_1$, где A_1 – произвольный оператор умножения.

Доказательство. Перейдем к скрученным символам a, b_l операторов A, B_l соответственно. Система (10) перейдет в уравнение $da = \sum_l b_l d\xi^l$, где $da = \sum_l(\partial a/\partial\xi^l)d\xi^l$. Утверждение леммы сводится теперь к стандартному факту о дифференциальных формах с полиномиальными коэффициентами, следующему из тождества Эйлера.

Предложение 2. Пусть ω_0 — кэлерова метрика на M и $U \subset M$ — стягиваемая координатная окрестность. Для каждой формальной функции $f = \sum \nu^r f_r \in \mathcal{F}(U)$ существует единственный формальный ряд дифференциальных операторов $\tilde{A}_f = \sum \nu^r A_r$, принадлежащий $\mathcal{L}_{\omega_0}(U)$, такой что $\tilde{A}_f 1 = f$. При этом A_0 — оператор умножения на функцию f_0.

Доказательство. Из условия предложения следует, что все операторы A_r лежат в $S(U)$. Пусть Φ_0 — потенциал метрики ω_0. Условие коммутации с операторами $\partial\Phi_0/\partial\bar{z}^l + \nu\partial/\partial\bar{z}^l$ сводится к системе уравнений $[A_0, \partial\Phi_0/\partial\bar{z}^l] = 0$ и рекуррентным соотношениям

$$[A_r, \partial\Phi_0/\partial\bar{z}^l] = [\partial/\partial\bar{z}^l, A_{r-1}]. \tag{11}$$

Найдем все члены ряда $\tilde{A}_f$ по индукции. Из леммы 5 следует, что A_0 является оператором умножения, так что из $A_0 1 = f_0$ следует, что $A_0 = f_0$. Предположим теперь, что мы нашли все операторы A_r для $r < s$, удовлетворяющие рекуррентному соотношению (11), и такие, что $A_r 1 = f_r$. Покажем, что оператор A_s может быть найден из системы (11) для $r = s$, т.е. выполнены условия леммы 6 на правую часть (11),

$$[[\frac{\partial}{\partial \bar{z}^l}, A_{s-1}], \frac{\partial \Phi_0}{\partial \bar{z}^{l'}}] = [[\frac{\partial}{\partial \bar{z}^{l'}}, A_{s-1}], \frac{\partial \Phi_0}{\partial \bar{z}^l}].$$

Из тождества Якоби для коммутаторов и индуктивного предположения следует, что

$$[[\frac{\partial}{\partial \bar{z}^l}, A_{s-1}], \frac{\partial \Phi_0}{\partial \bar{z}^{l'}}] = [[\frac{\partial}{\partial \bar{z}^l}, \frac{\partial \Phi_0}{\partial \bar{z}^{l'}}], A_{s-1}] + [\frac{\partial}{\partial \bar{z}^l}, [A_{s-1}, \frac{\partial \Phi_0}{\partial \bar{z}^{l'}}]] =$$

$$[\frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial z^l \partial \bar{z}^{l'}}, A_{s-1}] + [\frac{\partial}{\partial \bar{z}^l}, [\frac{\partial}{\partial \bar{z}^{l'}}, A_{s-2}]].$$

Легко убедиться, что последнее выражение симметрично относительно перестановки l и l'. Таким образом, система (11) разрешима. Среди ее решений есть ровно одно решение A_s такое, что $A_s 1 = f_s$. Предложение доказано.

Лемма 7. Для заданной формальной функции $f = f_0 + \nu f_1 + \ldots \in \mathcal{F}(U)$ найдется функция $g = g_0 + \nu g_1 + \ldots \in \mathcal{F}(U)$ такая, что $\tilde{A}_f g = 1$ тогда и только тогда, когда f_0 не обращается в нуль на U. При этом формальная функция g определяется однозначно и $g_0 = 1/f_0$.

Доказательство. Пусть $\tilde{A}_f = \sum \nu^r A_r$. Условие $\tilde{A}_f g = 1$ сводится к системе уравнений $A_0 g_0 = 1$ и $A_0 g_r = -\sum_{s=0}^{r-1} A_{r-s} g_s$. Согласно предложению 2, $A_0 = f_0$, поэтому если f_0 не обращается в нуль, то все функции g_r можно последовательно вычислить. Лемма доказана.

Лемма 8. Пусть формальные функции $f, g \in \mathcal{F}(U)$ таковы, что $\tilde{A}_f g = 1$. Тогда оператор $\tilde{A}_g$ является обратным к $\tilde{A}_f$ и, в частности, $\tilde{A}_g f = 1$.

Доказательство. Оператор $\tilde{A}_f \tilde{A}_g$ принадлежит $\mathcal{L}_{\omega_0}(U)$. Поскольку $\tilde{A}_f \tilde{A}_g 1 = \tilde{A}_f g = 1$, то $\tilde{A}_f \tilde{A}_g = \tilde{A}_1 = 1$. Из леммы 7 следует, что коэффициент при нулевой степени ν формального ряда g не обращается в нуль. Поэтому найдется функция $h \in \mathcal{F}(U)$ такая, что $\tilde{A}_g h = 1$, так что $\tilde{A}_g \tilde{A}_h = 1$, то есть у оператора $\tilde{A}_g$ есть левый и правый обратные. Отсюда немедленно следует утверждение леммы.

Нам понадобятся сейчас некоторые элементарные факты о формальных рядах. Пусть R – векторное пространство и $\tilde{R} = R[[\nu]]$ – пространство формальных рядов с коэффициентами из R. В $\tilde{R}$ есть убывающая фильтрация $\tilde{R} = \tilde{R}_0 \supset \tilde{R}_1 \supset \tilde{R}_2 \ldots$, где $\tilde{R}_n$ состоит из рядов вида $\tilde{A} = \sum_{r=n}^{\infty} \nu^r A_r$, $A_r \in R$. Элемент $\tilde{A} \in \tilde{R}$ имеет порядок n, $\operatorname{ord}(\tilde{A}) = n$, если $\tilde{A} \in \tilde{R}_n \backslash \tilde{R}_{n+1}$. Ряд $\sum \tilde{A}_n$ с элементами $\tilde{A}_n \in \tilde{R}$, такой, что при $n \to \infty$ порядок $\operatorname{ord}(\tilde{A}_n) \to \infty$, сходится в топологии, определенной фильтрацией, к элементу $\tilde{R}$. Если $\tilde{A} - \tilde{B}$ является элементом порядка n, мы будем писать $\tilde{A} \equiv \tilde{B} \pmod{\nu^n}$.

Для произвольной формальной функции $S = S_0 + \nu S_1 + \ldots \in \mathcal{F}(U)$ определим ее экспоненту, $e^S = e^{S_0} \sum_{n=0}^{\infty} (1/n!)(S - S_0)^n \in \mathcal{F}(U)$. Ряд в определении экспоненты сходится, поскольку $\operatorname{ord}((S - S_0)^n) \geq n$.

Лемма 9. Для $S \in \mathcal{F}(U)$ $\partial e^S / \partial z^k = (\partial S / \partial z^k) e^S$ и $\partial e^S / \partial \bar{z}^l = (\partial S / \partial \bar{z}^l) e^S$. Кроме того, для $S, T \in \mathcal{F}(U)$ имеет место равенство $e^S \cdot e^T = e^{S+T}$.

Доказательство леммы стандартно.

Предложение 3. Пусть ω — формальная деформация кэлеровой метрики ω_0 на M и $U \subset M$ — стягиваемая координатная окрестность. Для каждой формальной функции $g = \sum \nu^r g_r \in \mathcal{F}(U)$ существует единственный формальный ряд дифференциальных операторов $\tilde{B}_g = \sum \nu^r B_r$, принадлежащий $\mathcal{L}_\omega(U)$, такой, что $\tilde{B}_g 1 = g$.

Доказательство. Пусть $\Phi = \Phi_0 + \nu \Phi_1 + \Phi_2 + \ldots$ — потенциал ω. Положим $S = \Phi_1 + \nu \Phi_2 + \ldots$. Из леммы 9 следует, что $e^{-S}(\partial \Phi_0 / \partial \bar{z}^l + \nu \partial / \partial \bar{z}^l) e^S = \partial \Phi / \partial \bar{z}^l + \nu \partial / \partial \bar{z}^l$. Поскольку, кроме того, $e^{-S} \bar{z}^l e^S = \bar{z}^l$, то имеется биекция $e^{-S} \mathcal{L}_{\omega_0}(U) e^S = \mathcal{L}_\omega(U)$. Для того, чтобы оператор $\tilde{B}_g$ существовал, необходимо и достаточно, чтобы нашлась функция $f \in \mathcal{F}(U)$, такая, что $e^{-S}(\tilde{A}_f) e^S = \tilde{B}_g$. Достаточно, чтобы f удовлетворяла соотношению $e^{-S} \tilde{A}_f(e^S) = g$ или $\tilde{A}_f(e^S) = e^S g$, что эквивалентно тому, что

$\tilde{A}_f\tilde{A}_e s = \tilde{A}_e s_g$. Из лемм 7 и 8 следует, что найдется функция $h \in \mathcal{F}(U)$, такая, что оператор $\tilde{A}_h$ является обратным к $\tilde{A}_e s$. Поэтому $\tilde{A}_f = \tilde{A}_e s_b \tilde{A}_h$, так что $f = \tilde{A}_e s_g h$. Предложение доказано.

Согласно предложению 3, отображение $f \mapsto \tilde{B}_f$ является биекцией $\mathcal{F}(U)$ на $\mathcal{L}_\omega(U)$. Поскольку $\mathcal{L}_\omega(U)$ является алгеброй операторов, в $\mathcal{F}(U)$ можно определить ассоциативное умножение $\star$, перенося в $\mathcal{F}(U)$ операторное умножение из $\mathcal{L}_\omega(U)$. Для $f, g \in \mathcal{F}(U)$ по определению $\tilde{B}_{f\star g} = \tilde{B}_f\tilde{B}_g$. Применяя обе части полученного равенства к константе 1, получим $f \star g = \tilde{B}_f g$, откуда следует, что $\tilde{B}_f$ является оператором левого умножения в алгебре $\mathcal{F}(U)$ с операцией $\star$. Положим $L_f = \tilde{B}_f$.

Вычислим два первых члена формального ряда операторов $L_{\bar{z}^l}$.

Лемма 10. $L_{\bar{z}^l} \equiv \bar{z}^l + \nu D^l \pmod{\nu^2}$.

Доказательство. Пусть $L_{\bar{z}^l} \equiv A + \nu B \pmod{\nu^2}$, тогда

$$[L_{\bar{z}^l}, \frac{\partial\Phi}{\partial\bar{z}^{l'}}] \equiv [A + \nu B, \frac{\partial\Phi_0}{\partial\bar{z}^{l'}} + \nu(\frac{\partial\Phi_1}{\partial\bar{z}^{l'}} + \frac{\partial}{\partial\bar{z}^{l'}})] \pmod{\nu^2}. \qquad (12)$$

Операторы $L_{\bar{z}^l}$ и $\partial\Phi/\partial\bar{z}^{l'}$ коммутируют, так что коэффициенты при нулевой и первой степенях ν в правой части (12) равны нулю. Во-первых, $[A, \partial\Phi_0/\partial\bar{z}^{l'}] = 0$, поэтому, согласно лемме 5, A является оператором умножения. Поскольку $L_{\bar{z}^l}1 = A1 = \bar{z}^l$, то $A = \bar{z}^l$. Учитывая, что $A = \bar{z}^l$, получим далее уравнение $[B, \partial\Phi_0/\partial\bar{z}^{l'}] = \delta^l_{l'}$. Так как $B1 = 0$, из леммы 5 следует, что $B = D^l$. Лемма доказана.

Мы получим теперь представляющую самостоятельный интерес формулу, выражающую оператор L_f, $f \in \mathcal{F}(U)$, через $L_{\bar{z}^l}$.

Предложение 4. Имеет место формула

$$L_f = \sum_\alpha \frac{1}{\alpha!}(\frac{\partial}{\partial\bar{z}})^\alpha f\,(L_{\bar{z}} - \bar{z})^\alpha, \qquad (13)$$

где α — мультииндекс.

Доказательство. Из леммы 10 следует, что $\mathrm{ord}(L_{\bar{z}^l} - \bar{z}^l) = 1$, поэтому $\mathrm{ord}((L_{\bar{z}} - \bar{z})^\alpha) = |\alpha|$ и ряд в (13) сходится. Обозначим временно правую часть (13) через $\tilde{A}$. Поскольку $(L_{\bar{z}^l} - \bar{z}^l)1 = 0$, то $\tilde{A}1 = f$, так что для

доказательства предложения достаточно установить, что $\tilde{A} \in \mathcal{L}_\omega(U)$. Пусть $\alpha = (i_1, \ldots, i_m)$ - мультииндекс. Введем следующее обозначение, $\alpha \pm l = (i_1, \ldots, i_l \pm 1, \ldots, i_m)$. Принимая во внимание, что $L_{\bar{z}^l} \in \mathcal{L}_\omega(U)$, имеем

$$[(\frac{\partial}{\partial\bar{z}})^\alpha f, \frac{\partial\Phi}{\partial\bar{z}^l} + \nu\frac{\partial}{\partial\bar{z}^l}] = \nu(\frac{\partial}{\partial\bar{z}})^{\alpha+l} f \quad \text{и}$$

$$[\frac{1}{\alpha!}(L_{\bar{z}} - \bar{z})^\alpha, \frac{\partial\Phi}{\partial\bar{z}^l} + \nu\frac{\partial}{\partial\bar{z}^l}] = -\nu\frac{1}{(\alpha - l)!}(L_{\bar{z}} - \bar{z})^{\alpha-l},$$

откуда следует, что

$$[\tilde{A}, \frac{\partial\Phi}{\partial\bar{z}^l} + \nu\frac{\partial}{\partial\bar{z}^l}] = \nu(\sum_\alpha \frac{1}{\alpha!}(\frac{\partial}{\partial\bar{z}})^{\alpha+l} f\,(L_{\bar{z}} - \bar{z})^\alpha -$$

$$\sum_\alpha \frac{1}{(\alpha - l)!}(\frac{\partial}{\partial\bar{z}})^\alpha f\,(L_{\bar{z}} - \bar{z})^{\alpha-l}) = 0.$$

Предложение доказано.

Из предложения 4 и билинейности произведения $\star$ немедленно следует, что произведение $\star$ задается формулой (1) для некоторых бидифференциальных операторов C_r. Пусть $u, v \in C^\infty(U)$. Вычислим операторы C_0 и C_1, рассматривая первые два члена ряда $u \star v$ и принимая во внимание лемму 10,

$$u \star v = L_u v \equiv uv + \nu\sum_l \frac{\partial u}{\partial\bar{z}^l} D^l v \pmod{\nu^2}.$$

Отсюда следует, что $C_0(u, v) = uv$ и $C_1(u, v) = \sum_l \partial u/\partial\bar{z}^l D^l v$, поэтому

$$C_1(u, v) - C_1(v, u) = \sum_l(\frac{\partial u}{\partial\bar{z}^l}D^l v - \frac{\partial v}{\partial\bar{z}^l}D^l u) =$$

$$g^{lk}(\frac{\partial v}{\partial z^k}\frac{\partial u}{\partial\bar{z}^l} - \frac{\partial u}{\partial z^k}\frac{\partial v}{\partial\bar{z}^l}) = i\{u, v\}.$$

Это означает, что произведение $\star$ является $\star$-произведением на окрестности U с кэлеровой метрикой ω_0. Из конструкции произведения $\star$ по деформации кэлеровой метрики ω ясно, что на пересечениях координатных окрестностей произведения $\star$ согласованы и задают глобальное деформационное квантование с разделением переменных на кэлеровом многообразии

M. Из теоремы 1 следует, что деформация кэлеровой метрики, отвечающая $\star$-произведению $\star$, совпадает с ω. Таким образом установлена следующая

Теорема 2. Деформационные квантования с разделением переменных на кэлеровом многообразии M находятся во взаимно однозначном соответствии с формальными деформациями кэлеровой метрики ω_0. Если на M задано квантование с разделением переменных, отвечающее формальной деформации ω метрики ω_0, U — стягиваемая координатная окрестность на M, Φ — потенциал ω на U, то операторы левого $\star$-умножения $\mathcal{L}(U)$ характеризуются тем, что коммутируют с умножениями на антиголоморфные функции и с операторами $R_{\partial\Phi/\partial\bar{z}^l} = \partial\Phi/\partial\bar{z}^l + \nu\partial/\partial\bar{z}^l$. Аналогично, операторы правого $\star$-умножения $\mathcal{R}(U)$ характеризуются тем, что коммутируют с умножениями на голоморфные функции и с операторами $L_{\partial\Phi/\partial z^k} = \partial\Phi/\partial z^k + \nu\partial/\partial z^k$.

Литература

1. *А. В. Карабегов*, О деформационном квантовании на кэлеровом многообразии, связанном с квантованием Березина, принято в ж-л «Функц. анализ и его приложения».

2. *Ф. А. Березин*, Квантование, Известия АН СССР, сер. мат., т. 38, N 5, 1974, с. 1116-1175.

3. *C. Moreno*, $*$-products on some Kähler manifolds, Lett. Math. Phys., v. 11, no. 4, 1986, p. 361-372.

4. *C. Moreno*, Invariant star products and representations of compact semisimple Lie groups, Lett. Math.Phys., v. 12, no. 3, 1986, p. 217-229.

5. *M. Cahen, S. Gutt, J. Rawnsley*, Quantization of Kähler manifolds. II, T.A.M.S., v. 337, no. 1, 1993, p. 73-98.

6. *M. Cahen, S. Gutt, J. Rawnsley* Quantization of Kähler manifolds. IV, to appear in Lett. Math. Phys.

7. *F. Bayen et al.* Deformation theory and quantization, Ann. Phys., v. 111, no. 1, 1978, p. 1-151.

Рукопись поступила в издательский отдел
21 июля 1995 года.