

СООБЩЕНИЯ  
ОБЪЕДИНЕННОГО  
ИНСТИТУТА  
ЯДЕРНЫХ  
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

95-285

P5-95-285

Н.Д.Дикусар

АППРОКСИМАЦИЯ И СГЛАЖИВАНИЕ ФУНКЦИЙ  
МЕТОДОМ 4-ТОЧЕЧНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

1995

## 1 Введение

Проблемы практического применения традиционных методов полиномиальной аппроксимации и сглаживания функций хорошо известны [4-6]. Они являются главной причиной появления все новых поисковых работ в области практического решения задач приближения и сглаживания функций [7-10].

В работе предлагается новый подход к приближению и сглаживанию функций на локальном отрезке, методы и алгоритмы которого могут быть использованы также для разработки алгоритмов глобального приближения функций. Этот подход основан на новом виде четырехточечных преобразований - дискретных проективных преобразований (*DPT* или *D*), построенных на свойствах функций сложного (ангармонического) отношения четырех коллинеарных точек - *проективных инвариантов* [11]. Он позволяет создавать эффективные алгоритмы обработки данных в таких приложениях, как цифровая обработка сигналов, сжатие информации, обнаружение и распознавание треков в экспериментальной физике [15], анализ формы треков в диэлектрических детекторах [16], описание формы изображения объектов в системах технического зрения [17] и др., а также может найти применение в исследовании проблем вычислительной математики, связанных с приближением и сглаживанием функций.

*DPT* - это новая операция в общем случае над непрерывной функцией, заданной аналитически или *таблично*, которая выражается в виде свертки трех весовых функций с тремя точками кривой и характеризуется следующими особенностями:

а) в отличие от операции дифференцирования *DPT* использует информацию сразу в *четыре*х точках кривой, что обеспечивает *устойчивость* этой операции к *ошибкам* всюду на промежутке за исключением окрестностей двух точек - полюсов. При этом сама ошибка преобразуется квадратично через знаменатель и тем самым происходит ее эффективное подавление. Это свойство преобразования позволяет вести обработку данных в значительном диапазоне ошибок и при *неравномерном* задании шага;

б) по аналогии с производной *DPT* понижает степень многочлена на *два*, что, наряду с его устойчивостью к ошибкам, позволяет упрощать процесс обработки путем предварительного преобразования исходных данных. В более общем подходе операция *DPT* позволяет строить наборы базисных функций с улучшенными аппроксимационными качествами по сравнению с полиномами;

в) *DPT* позволяет выполнять непрерывную параметризацию функций. При этом в качестве параметров используются координаты опорных точек, что весьма удобно на практике, так как их начальные значения берутся непосредственно из самих измерений;

г) система весовых функций обладает рядом фундаментальных свойств и отличается простотой в вычислениях, что составляет надежный базис для создания эффективных алгоритмов обработки в различных приложениях.

Отмеченные выше особенности и другие свойства четырехточечных преобразований носят принципиальный характер. По своему значению они составляют основу для разработки новых алгоритмов по аппроксимации и сглаживанию функций.

## 2 Определение и свойства преобразований

### 2.1 Определение и геометрический смысл DPT

DPT основаны на функциях сложного отношения (*cross-ratio*) или CR-функциях - *проективных инвариантах* (см. табл.1). Преобразования устанавливают взаимно однозначное соответствие между точками двух гладких кривых евклидовой плоскости -  $y = f(x)$  (прообраз) и  $y = h(\tau)$  (образ) на основе выбора *трех* фиксированных точек, образующих репер -  $\mathcal{R}$  на кривой  $f(x)$ : двух опорных точек -  $P_1(x_1, f_1)$ ,  $P_2(x_2, f_2)$  и базисной точки  $P_0(x_0, f_0)$ . Текущая (четвертая) точка на  $f(x)$  отображается в точку на  $h(\tau)$

$$D: P_j \mapsto P_h, \quad (1)$$

где  $P_j \equiv P_j(x, f(x))$ ,  $P_h \equiv P_h(\tau, h(\tau))$ , а  $\tau = x - x_0$ . При отображении (1) ордината текущей точки образа  $P_h$  определяется точкой пересечения *параболы* (или *прямой*), проходящей через три точки ( $P_1, P_2$  и  $P_j$ ) с осью  $\tau = 0$  ( $x = x_0$ ) (см. рис.1). Базисная точка  $P_0$  остается *неподвижной*, а трансформация опорных точек  $P_1$  и  $P_2$  происходит асимптотически через предел при  $x \rightarrow x_1$  и  $x \rightarrow x_2$  соответственно (см.п.2.3).

Обозначим  $\lambda = x_1 - x_0$ ,  $L = x_2 - x_0$ ,  $f_\lambda \equiv f(x_0 + \lambda)$  и  $f_L \equiv f(x_0 + L)$ . Величины  $\lambda$  и  $L$  являются *параметрами* преобразования, а координаты трех реперных точек - его репером:

$$\mathcal{R}: \{P_0(x_0, f_0), P_1(x_0 + \lambda, f_\lambda), P_2(x_0 + L, f_L)\}.$$

Отсюда следует зависимость преобразований от его параметров, т.е. вид и положение кривой  $h(\tau)$  на плоскости определяются не только функцией  $f(x)$ , но и выбором репера  $\mathcal{R}$ .

Отображение (1) (прямое и обратное преобразования) выполняется на основе двух взаимнообратных операций, для обозначения которых введем следующие эквивалентные записи:

$$f^*(x; \mathcal{R}) \equiv D[f(x); \mathcal{R}] = h(\tau) \quad (2)$$

и

$$h^*(\tau; \mathcal{R}) \equiv D^{-1}[h(\tau); \mathcal{R}] = f(x). \quad (3)$$

Операция  $f^*(x; \mathcal{R})$  по аналогии с производной имеет наглядный геометрический смысл (рис.1): кривая  $h(\tau) = f^*(x; \mathcal{R})$  является геометрическим местом точек, ординаты которых равны ординатам точек пересечения параболы  $\Pi(x)$  (или прямой), проходящей через три точки - две реперных и одну текущую - с базисной осью  $\tau = 0$ . При обратном преобразовании ордината текущей точки  $h(\tau)$  берется на базисной оси, а точки пересечения берутся на перпендикулярах к оси абсцисс в точках  $\tau = x - x_0$ .

В аналитической форме DPT можно выразить через скалярные произведения трехмерных векторов  $\vec{P}, \vec{F}, \vec{D}$  и  $\vec{Z}$ :

$$f^*(x; \mathcal{R}) = (\vec{P}, \vec{F}) = \sum_{i=1}^3 p_i(\tau; \lambda, L) f_i \quad (4)$$

и

$$h^*(\tau; \mathcal{R}) = (\vec{D}, \vec{Z}) = \sum_{i=1}^3 d_i(\tau; \lambda, L) z_i, \quad (5)$$

где

$$\vec{P} = (p_1, p_2, p_3)^T, \vec{D} = (d_1, d_2, d_3)^T, \vec{F} = (f_\lambda, f_L, f(x))^T, \vec{Z} = (f_\lambda, f_L, h(\tau))^T,$$

а  $p_i(\tau; \lambda, L)$  и  $d_i(\tau; \lambda, L)$  являются функциями сложного (ангармонического) отношения четырех коллинеарных точек ( $CR - f$ ) или *всowymi* функциями, вычисленными в текущей точке  $\tau$ .

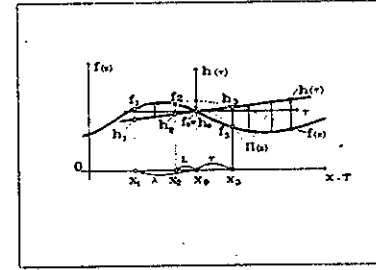


Рис.1. Геометрический смысл DPT.

### 2.2 Функции сложного отношения четырех точек и их свойства

CR-функции определяются сложным отношением четырех несовпадающих, коллинеарных точек ( $x_1, x_2, x_3, x_4$ ) (рис.2), заданным в виде

$$\frac{\Delta_{13}}{\Delta_{24}} : \frac{\Delta_{23}}{\Delta_{14}}, \quad (6)$$

где  $\Delta_{ij}$  означает алгебраическое расстояние между точками  $i$  и  $j$ , т.е.  $\Delta_{ij} = x_j - x_i$ . Для правила (6) при одной фиксированной точке существуют только три различные функции [12], которые определяются порядком расположения точек в четверке на числовой оси (рис.2).

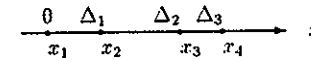


Рис.2

Например, при фиксированной первой точке, указанные в (6) расстояния  $\Delta_{ij}$  можно выразить через  $\Delta_i = x_{i+1} - x_1$ , ( $i = 1, 2, 3$ ):

$$\Delta_{13} = \Delta_2, \Delta_{14} = \Delta_3, \Delta_{23} = \Delta_2 - \Delta_1 \text{ и } \Delta_{24} = \Delta_3 - \Delta_1.$$

После подстановки  $\Delta_{ij}$  в (6) выражение для функций  $p_i(\tau; \lambda, L)$  можно представить одной формулой, используя функции индекса точки:

$$p_i(\vec{\Delta}) = \frac{\Delta_m \Delta_n}{(\Delta_i - \Delta_m)(\Delta_i - \Delta_n)}, \quad i = 1, 2, 3, \quad (7)$$

где  $m = m(i) = 2 - i + (i - 1)!$ ,  $n = n(i) = 4 - (i - 1)!$ , а  $\vec{\Delta} = (\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3)$ . Отметим, что правило (6) отличается от известного в проективной геометрии [13] изменением порядка выбора двух точек.

Из формулы (7) очевидным образом следуют *безразмерность* CR-функций и их инвариантность к масштабированию:

$$p_i(\mu\bar{\Delta}) = p_i(\bar{\Delta}), \quad d_i(\mu\bar{\Delta}) = d_i(\bar{\Delta}), \quad \mu \neq 0, \quad i = 1 \div 3.$$

Обозначим  $\Delta_i = \lambda, L, \tau$ , для  $i = 1, 2, 3$  соответственно. Тогда функции  $p_i(\bar{\Delta})$  и  $d_i(\bar{\Delta})$  для четверки  $\{0, \lambda, L, \tau\}$  определяются алгоритмом (7). Если точки  $x_j, j = 1 \div 4$  расположить в обратном порядке ( $x_4, x_3, x_2, x_1$ ), то по формулам (7) получим весовые функции обратного преобразования -  $d_i(\tau; \lambda, L)$ .

Таблица 1. CR-функции и их характеристики

CR-f	формулы	нули	$\tau_e$	экстремум	г/асимпт.	в/асимпт.
$p_1$	$\frac{L\tau}{(\tau-\lambda)(L-\lambda)}$	0	нет	нет	$p_1 = \frac{L}{L-\lambda}$	$\tau = \lambda$
$p_2$	$\frac{-\lambda\tau}{(\tau-L)(L-\lambda)}$	0	нет	нет	$p_2 = \frac{-\lambda}{L-\lambda}$	$\tau = L$
$p_3$	$\frac{\lambda L}{(\tau-\lambda)(\tau-L)}$	нет	$\frac{L+\lambda}{2}$	$\frac{-4\lambda L}{(L-\lambda)^2}$	$p_3 = 0$	$\tau = \lambda, L$
$d_1$	$\frac{-\tau(\tau-L)}{\lambda(L-\lambda)}$	0, L	$\frac{L}{2}$	$\frac{-L^2}{4\lambda(L-\lambda)}$	нет	нет
$d_2$	$\frac{\tau(\tau-\lambda)}{L(L-\lambda)}$	0, $\lambda$	$\frac{\lambda}{2}$	$\frac{\lambda^2}{4L(L-\lambda)}$	нет	нет
$d_3$	$\frac{(\tau-\lambda)(\tau-L)}{\lambda L}$	$\lambda, L$	$\frac{L+\lambda}{2}$	$\frac{-(L-\lambda)^2}{4\lambda L}$	нет	нет

В табл.1 приведены формулы и основные характеристики CR-функций [11], а на рис.3 показаны фрагменты графиков этих функций для фиксированных  $\lambda$  и  $L$ . CR-функции обратного преобразования  $d_i(\bar{\Delta})$  можно определить также из свойства нормировки (8) путем деления обеих его частей на  $p_3 \neq 0$ :

$$d_1 = -\frac{p_1}{p_3}, \quad d_2 = -\frac{p_2}{p_3}, \quad d_3 = \frac{1}{p_3}.$$

После подстановки  $p_i(\tau; \lambda, L)$ , получим формулы  $d_i(\tau; \lambda, L)$ , приведенные в табл.1.

CR-функции обладают естественной *нормировкой* сумм:

$$\sum_{i=1}^3 p_i(\tau; \lambda, L) = 1 \quad (8)$$

и

$$\sum_{i=1}^3 d_i(\tau; \lambda, L) = 1. \quad (9)$$

Доказательство этих равенств можно получить обычным суммированием соответствующих функций из табл.1.

Система функций  $\{p_i(\tau; \lambda, L)\}$  обладает рядом принципиальных свойств. Наиболее важные из них: инвариантность к масштабированию, безразмерность, нормировка

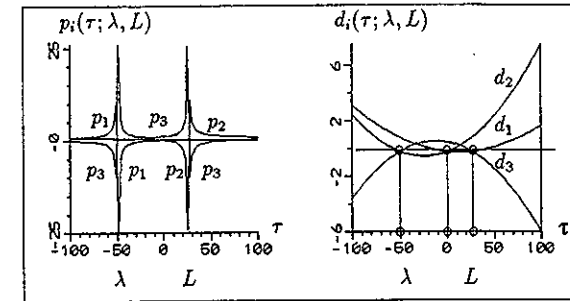


Рис.3. Фрагменты графиков функций  $p_i$  и  $d_i$ .

сумм (8)-(9), "ортогональная связь" с точками евклидовой плоскости, расположенными на кривых из семейства прямых линий и квадратичных парабол (см. ниже п. 2.4).

Структура этой системы имеет *тройную симметрию*. Например, из  $p_3$  легко получить функции  $p_1$  и  $p_2$  формальной перестановкой параметров и переменной:  $\lambda \leftrightarrow \tau$  и  $L \leftrightarrow \tau$  соответственно. Эту симметрию можно представить в виде диаграммы вычисления  $p_i$  (рис.4), на которой структура системы условно изображена в виде трех перекрывающихся треугольников -  $\lambda, L$  и  $\tau$ .

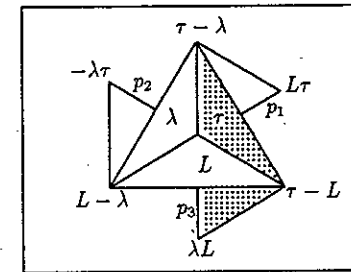


Рис.4. Диаграмма вычисления функций  $p_i(\tau; \lambda, L)$ .

Шесть их вершин попарно расположены в трех точках. Остальные вершины свободные. Общие точки обозначены как *разности* ( $\Delta_i - \Delta_j$ ) ("вычитание из одного треугольника части другого"), а изолированные точки - как *произведения* величин (со знаками), которые не повторяются в остальных вершинах треугольника. Тогда функция  $p_i(\tau; \lambda, L)$  вычисляется *делением* величины в изолированной вершине соответствующего треугольника на *произведение* величин, расположенных в его двух противоположных вершинах.

Из диаграммы видно, что для вычисления всех трех функций в одной текущей точке необходимо выполнить 12 операций. Шесть операций 1-го уровня находятся в вершинах треугольников. Операции 2-го уровня - это три умножения попарных разностей. На последнем уровне выполняются операции деления. Вычисление на каждом уровне можно выполнять параллельно, благодаря чему все три функции могут быть вычислены за время выполнения трех операций: -, × и ÷ или в среднем - одна операция на функцию.

### 2.3 Алгоритм вычисления DPT

Формулы (4), (5) и табл.1 определяют правило преобразования всех точек кривой, кроме двух опорных точек, в которых функции  $p_i$  терпят бесконечный разрыв. Значения  $h(\cdot)$  в опорных точках найдем подстановкой  $p_i$  из табл.1 в (4), и с учетом (8) найдем значения  $f^*(\cdot)$ . В базисной точке имеем  $h(x_0) = f(x_0)$ . При  $\tau = x - x_0$ ,  $\lambda = x_\lambda - x_0$ ,  $L = x_L - x_0$  и  $x_0 = 0$  с учетом (8) получим:

$$h(\tau) = \sum_{i=1}^3 p_i f_i = -\frac{L\tau}{L-\lambda} \cdot \frac{f(\tau) - f(\lambda)}{\tau - \lambda} + \frac{\lambda\tau}{L-\lambda} \cdot \frac{f(\tau) - f(L)}{\tau - L} + f(\tau).$$

Отсюда, в силу непрерывности  $f(\tau)$  при устремлении  $\tau$  к  $\lambda$  и  $L$ , найдем  $h(\lambda)$  и  $h(L)$ :

$$h(\lambda) = \lim_{\tau \rightarrow \lambda} h(\tau) = -\frac{\lambda L}{H} f'(\lambda) + \frac{\lambda^2}{H^2} \Delta f_{L\lambda} + f(\lambda) \quad (10)$$

и

$$h(L) = \lim_{\tau \rightarrow L} h(\tau) = \frac{\lambda L}{H} f'(L) - \frac{L^2}{H^2} \Delta f_{L\lambda} + f(L), \quad (11)$$

где  $H = L - \lambda$ ,  $\Delta f_{L\lambda} = f(L) - f(\lambda)$ , а при  $x_0 \neq 0$  параметры  $\lambda$  и  $L$  для  $f(\cdot)$  и  $f'(\cdot)$  заменяются на  $x_0 + \lambda$  и  $x_0 + L$  соответственно.

Таким образом, на основании формул (4), (5), (10), (11) и табл.1 получим алгоритм для вычисления прямого (2) и обратного (3) преобразований гладкой функции, заданной формулой или таблицей ("dPT" - алгоритм). При этом переменная и параметры могут принимать как непрерывные, так и дискретные значения.

$$\begin{aligned} h(\tau) &= p_1(\bar{\Delta})f_\lambda + p_2(\bar{\Delta})f_L + p_3(\bar{\Delta})f(x), \quad h(0) = f(x_0), \quad \tau = x - x_0, \quad H = L - \lambda, \\ h(\lambda) &= -\frac{\lambda L}{H} f'(x_\lambda) + \frac{\lambda^2}{H^2} (f_L - f_\lambda) + f_\lambda, \quad h(L) = \frac{\lambda L}{H} f'(x_L) - \frac{L^2}{H^2} (f_L - f_\lambda) + f_L, \\ f(x) &= d_1(\bar{\Delta})f_\lambda + d_2(\bar{\Delta})f_L + d_3(\bar{\Delta})h(\tau), \end{aligned} \quad (12)$$

где  $\lambda = x_\lambda - x_0$ ,  $L = x_L - x_0$ , а  $\bar{\Delta} = (\tau; \lambda, L)$ .

Из (10) и (11) можно получить значения производной  $f'(\cdot)$  в опорных точках:

$$f'(x_0 + \lambda) = \frac{1}{\lambda LH} [\lambda^2 \Delta f_{L\lambda} + H^2 (f_\lambda - h(\lambda))] \quad (13)$$

и

$$f'(x_0 + L) = \frac{1}{\lambda LH} [L^2 \Delta f_{L\lambda} - H^2 (f_L - h(L))]. \quad (14)$$

Примечание 1. Алгоритм (12) определяет правило, по которому для заданного репера выполняются две взаимнообратные операции над непрерывной кривой  $f(x)$ . Результатом прямого преобразования является новая функция (образ), "сложность" которой отличается от исходной функции (прообраза) на два порядка. Вычитая  $f(x_0)$  из обеих частей формулы (12) для  $h(\tau)$ , найдем, что DPT устанавливают связь типа *совертки* между *приращениями функции*, вычисленными по четырем точкам, и функциями

ангармонического (*двойного*) отношения *приращений аргумента*, вычисленными по  $x$ -координатам тех же точек:

$$f^*(x; \mathcal{R}) = f_0 + \sum_{i=1}^3 \Delta f_i p_i(\bar{\Delta}), \quad \text{где } \Delta f_i = f_i - f_0.$$

т.е. эта формула выражает связь между приращениями функции и приращениями аргумента в трех точках  $P_1, P_2, P_3$  относительно точки  $P_0$ .

В случае определения производной, связь между приращением функции  $\Delta f$  и приращением аргумента  $\Delta x$  устанавливается через существующий предел простого отношения приращений, вычисленный в точке  $P_0$  при стремлении приращения аргумента к нулю. Таким образом, геометрически производная функции определяется положением касательной к кривой в одной точке, тогда как  $f^*(x; \mathcal{R})$  определяется положением и формой параболы (или прямой), построенной на основе *двойного отношения* четырех точек и проходящей через три фиксированные на "теле" кривой точки (см. рис.1). Из этого сравнения следует, что операция  $f^*(x; \mathcal{R})$  является как бы "проективной производной" функции для заданного репера  $\mathcal{R}$ .

### 2.4 Связь CR-функций с линейно-квадратичными функциями

Особый интерес с точки зрения DPT представляет семейство линейных и квадратичных функций  $y(x) = ax^2 + bx + c$ , где  $a, b, c$  - действительные числа. В этом случае векторы  $\vec{P}$  и  $\vec{Z}$  для каждого слагаемого (с точностью до множителя) имеют вид

$$\vec{Y} = (\lambda^k, L^k, x^k)^T, \quad \vec{Z} = (\lambda^k, L^k, x_0^k)^T, \quad k = 0, 1, 2,$$

и после переноса системы координат в точку  $P_0(x_0, y_0)$  и подстановки  $p_i$  и  $\vec{Y}$  в (4) получим  $h = 0$ , т.е. векторы  $\vec{P}$  и  $\vec{Y}$  становятся ортогональными:

$$(\vec{P}, \vec{Y}) = 0. \quad (15)$$

Свойство (15) отражает проективную природу DPT и играет важную роль в его структуре. Оно устанавливает взаимосвязь между четырьмя точками на прямой или параболе  $\{y_j = ax_j^2 + bx_j\}$ ,  $j = 0 \div 3$  евклидовой плоскости и проективными инвариантами (7) - функциями сложного отношения, вычисленными в точках  $x_j$ . Из (15), в частности, следует уравнение ошибки, возникающее при D-преобразовании линейных и квадратичных функций, заданных экспериментальными точками:

$$(\vec{P}, \vec{Y} + \vec{E}) = (\vec{P}, \vec{Y}) + (\vec{P}, \vec{E}) = 0 + c. \quad (16)$$

где  $\vec{E} = (e_\lambda, e_L, e_\tau)^T$  - вектор ошибок, а  $c$  - суммарная ошибка преобразования. Отсюда следует, что если случайные ошибки в системе 4-х точек имеют линейно-квадратичную зависимость, то ошибка  $c$  в точке преобразования обратится в 0.

Если обозначить  $e_{max} = \max\{|e_\lambda|, |e_L|, |e(\tau)|\}$ , то ошибку преобразования  $e_h(\tau)$  можно оценить следующим неравенством:

$$e_h(\tau) \leq U e_{max}, \quad (17)$$

где

$$U(\tau; \lambda, L) = \sum_{i=1}^3 |p_i(\tau; \lambda, L)|.$$

В частности, с учетом горизонтальных асимптот функций  $p_i$  (табл.1), при  $\tau \rightarrow \infty$  функция  $U \rightarrow \frac{|L+\lambda|}{|L-\lambda|}$  и, если  $\lambda L < 0$ , то  $U \rightarrow 1$ , т.е. если параметры выбрать с разными знаками, то оценка ошибки преобразования асимптотически не больше  $\epsilon_{max}$ .

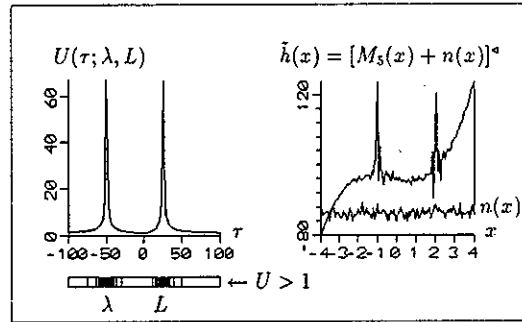


Рис.5. График функции  $U(\tau; 50, 25)$  и эффект преобразования шумов.

Пример графика функции  $U(\tau; \lambda, L)$  для фиксированных  $\lambda = -50, L = 25$  и  $x_0 = 0$  приведен на рис.5. На шкале под осью абсцисс показаны "шумовые" зоны, в которых функция  $U(\tau; -50, 25)$  превышает 1.

На рис.5 справа показан пример переноса шума  $n(x) \sim \mathcal{N}(0, \sigma)$  в случае преобразования точек многочлена пятого порядка  $M_5(x) = x^5 - 5x^3 + 4x + n(x)$  для  $x_0 = 0, \lambda = -1$  и  $L = 2$ . В результате преобразования получена зашумленная кубическая кривая  $\tilde{h}(x) = -2(x^3 + x^2 - 2x) + n^4(x)$  с "выбросами" в окрестностях точек  $\lambda$  и  $L$ .

Из (15) - (17) следует, что операция  $DPT$ , в отличие от производной, подавляет ошибку всюду, за исключением окрестностей двух полюсных ("шумовых") точек -  $\lambda$  и  $L$ . Это свойство играет важную роль при обработке экспериментальных данных, когда и производная, и разностные схемы являются крайне неустойчивыми даже к малым ошибкам измерений.

Далее рассматривается применение операции  $DPT$  для построения специального класса многочленов (базисных функций), обладающих свойствами локальных сплайнов, обеспечивающих равномерное приближение достаточно гладкой кривой на конечном отрезке и представляющих эффективный аппарат для создания адаптивных алгоритмов сглаживания экспериментальных данных.

### 3 Преобразование функций $\{x^n\}$

#### 3.1 Параметризация базисных функций (прямое преобразование)

Степенные функции (или мономы)  $\{x^n\}, n = 0, 1, 2, \dots$  играют важную роль в анализе прежде всего как линейно-независимый базис для разложения в степенные ряды основных элементарных функций. С точки зрения  $DPT$ , этот класс функций представляет особый интерес.

В работе [11] с помощью (4) была получена формула для  $D[x^n; \mathcal{R}_n]$  при  $x_0 = 0$  и  $\vec{F}_n = [\lambda^n, L^n, x^n]^T$ :

$$h_n = [x^n; \mathcal{R}_n]^4 = \lambda L x \sum_{i=1}^{n-1} \lambda^{i-1} \sum_{k=1}^{n-i-1} L^{k-1} x^{n-i-k-1} = \lambda L x G_n(x; \lambda, L), \quad (18)$$

где  $n = 0, 1, 2, \dots, G_n(x; \lambda, L)$  - элементарные симметрические функции, а  $\mathcal{R}_n$  - репер для  $x^n$

$$\mathcal{R}_n = \{P_0, P_\lambda^n, P_L^n\}, (\lambda, L \neq 0, \lambda \neq L), P_j^n = P_j(j, j^n), j = 0, \lambda, L. \quad (19)$$

Из (18) следует, что  $h_n$  являются однородными функциями относительно  $\lambda, L, x$  степени  $n$  и функциями степени  $n-2$  относительно  $x$ , т.е. в общем случае операция  $M^4(\cdot)$  понижает степень многочлена на два:

$$[M_n(x); \mathcal{R}]^4 = M_{n-2}(x; \lambda, L),$$

где  $M_{n-2}(x; \lambda, L)$  - многочлен степени  $n-2$  относительно  $x$ . В частности, прямая линия или квадратичная парабола преобразуются в константу, кубическая парабола - в прямую линию и т.д. ( $G_0 = G_1 = G_2 = 0$ ). Формулу (18) можно записать также в виде рекуррентных соотношений, что важно для ее программирования.

$$\begin{aligned} h_n(x; \lambda, L) &= h_3(x; \lambda, L) G_n(x; \lambda, L), & G_n(x; \lambda, L) &= g_n(x; L) + \lambda G_{n-1}(x; \lambda, L), \\ g_n(x; L) &= x g_{n-1}(x; L) + L^{n-3}, & h_3 &= \lambda L x, & g_3 &= 1, & G_3 &= 1, & n &= 4, 5, \dots \end{aligned}$$

(20)

Таким образом, многочлен  $M_{n-2}(x; \lambda, L)$  можно представить в виде произведения  $h_3 = \lambda L x$  на однородный многочлен степени  $n-3$  с новым параметризованным базисом  $\{G_n(x; \lambda, L)\}, (n > 3)$ , т.е.

$$D[M_n; \mathcal{R}] = \sum_{j=0}^n a_j [x^j; \mathcal{R}_n]^4 = \lambda L x \sum_{j=3}^n a_j G_j(x; \lambda, L).$$

При симметричном выборе параметров ( $L = -\lambda$ ) функции  $G_n(x; \lambda, L)$  зависят от одного параметра  $\lambda$  и принимают более простой вид:

$$G_n(x; \lambda) = x G_{n-1}(x; \lambda) + \frac{(-1)^{n-3} + 1}{2} \lambda^{n-3}, n = 3, 4, \dots, G_1 = G_2 = 0. \quad (21)$$

В таблице 2 приведены формулы функций  $G_n(x; \lambda, L)$  для  $n = 3, 4, \dots, 8$ .

Таблица 2

n	$G_n(x; \lambda, L)$	$G_n(x; \lambda)$
3	1	1
4	$x + L + \lambda$	$x$
5	$x(x + L) + L^2 + \lambda G_4$	$x^2 + \lambda^2$
6	$x(x(x + L) + L^2) + L^3 + \lambda G_5$	$x^3 + x \lambda^2$
7	$x(x(x(x + L) + L^2) + L^3) + L^4 + \lambda G_6$	$x^4 + x^2 \lambda^2 + \lambda^4$
8	$x(x(x(x(x + L) + L^2) + L^3) + L^4) + L^5 + \lambda G_7$	$x^5 + x^3 \lambda^2 + x \lambda^4$

### 3.2 Параметризация базисных функций (обратное преобразование)

Для заданного репера  $\mathcal{R}_n$  (19) с помощью (5) функции  $\{x^n\}$  запишем в виде

$$x^n = \lambda^n d_1 + L^n d_2 + h_n(x; \lambda, L) d_3, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Обозначим третье слагаемое в этом разложении через  $S_n(x; \lambda, L)$  и запишем его, подставляя  $d_3$  и  $h_n$  из (18):

$$S_n(x; \lambda, L) = x(x - \lambda)(x - L)G_n(x; \lambda, L), \quad n = 3, 4, 5, \dots \quad (22)$$

Уравнения (22) определяют семейство функций, нулями которых являются значения параметров -  $\lambda$ ,  $L$  и 0. Отсюда, при  $S_n(\lambda) = S_n(L) = 0$ , получим:

$$\{S_n; \mathcal{R}_n\}^n = 0p_1 + 0p_2 + S_n p_3 = \lambda L x G_n(x; \lambda, L) = h_n = [x^n; \mathcal{R}_n]^n,$$

т.е.  $\mathcal{D}$ -преобразования функций  $S_n$  и  $x^n$  совпадают, а сами они связаны соотношением

$$S_n(x; \lambda, L) = x^n - \lambda^n d_1 - L^n d_2 = x^n + (-1)^n \frac{\lambda^{n-1}}{H} x(x - L) - \frac{L^{n-1}}{H} x(x - \lambda), \quad (22a)$$

$n = 3, 4, 5, \dots$ , где  $H = L - \lambda$ , а  $d_1$  и  $d_2$  взяты из табл.1.

При симметричном выборе параметров ( $\lambda = -L$ ) формула (22a) принимает более простой вид:

$$S_n(x; \lambda) = x^n - \lambda^{n-m} x^m, \quad n = 3, 4, 5, \dots, \quad (23)$$

где  $m = 1 + \frac{(-1)^n + 1}{2}$ .

На рис.6 показаны фрагменты поверхностей  $S_n(x; \lambda)$  ( $x, \lambda \in [-1, 1]$ ), а на рис.7 приведены графики функций  $S_n(x; 1)$  для  $n = 3, 4, 5, 6$ .

Многочлены  $S_n(x; \lambda, L)$  имеют структуру *монослайнов*  $n$ -ой степени, которые в теории аппроксимации в известном смысле играют ту же роль, что и многочлены Чебышева в классической теории приближения функций [2]. Геометрически функции  $S_n(x; \lambda, L)$  получаются путем алгебраического сложения монома  $x^n$ , в зависимости от его четности, с прямой линией или квадратичной параболой, коэффициенты которых определяются опорными точками  $\lambda, L$  и порядком  $n$ .

Поведение  $S_n(x; \lambda, L)$  качественно отличается от поведения  $x^n$  вблизи нуля. Как известно, полиномиальная модель с базисом  $\{x^n\}$  при решении ряда статистических задач большой размерности  $n$  и большой выборки при малых  $x$  приводит к плохо обусловленным матрицам и накоплению ошибок округления. Этого недостатка лишены функции  $\{S_n(x; \lambda, L)\}$ , так как они имеют *демпфирующие* члены, которые обеспечивают устойчивость вычислений в подобных ситуациях. Следует также обратить внимание на расположение корней на плоскости:  $x^n$  имеет нуль корнем кратности  $n$ , тогда как корнями  $S_n(x; \lambda, L)$  являются точки  $0, \lambda, L$  и корни уравнения  $G_n(x; \lambda, L) = 0$ , в общем случае - комплексные. Для вычисления  $S_n(x; \lambda, L)$  используются рекуррентные формулы (20), (21).

Как следует из (12), произвольная функция  $f(x) \in C[a, b]$  при  $x_0 = 0$  может быть представлена в виде

$$f(x) = f(\lambda)d_1(x; \lambda, L) + f(L)d_2(x; \lambda, L) + h(x)d_3(x; \lambda, L). \quad (24)$$

Таким образом, если на кривой  $f(x) \in C[a, b]$  заданы три реперные точки и известна ее образ-функция  $h(x)$ , то  $f(x)$  может быть параметризована в виде (24). Эта формула

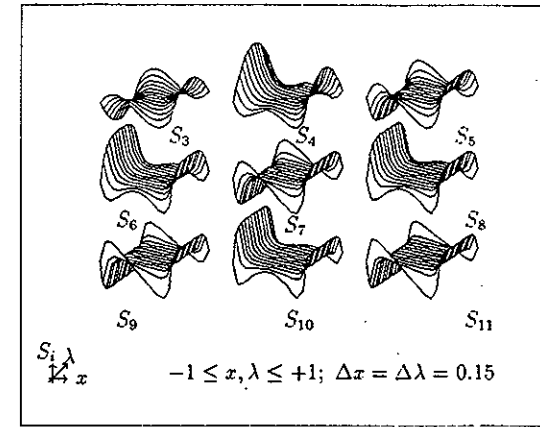


Рис.6. Поверхности  $S_n(x; \lambda)$  для  $x, \lambda \in [-1, 1]$ .

имеет ряд преимуществ при решении задач локальной аппроксимации по крайней мере в двух аспектах: а) число неизвестных параметров в разложении (24) на два меньше, чем в представлении  $f(x)$  традиционным многочленом; б) при задании  $f(x)$  в виде таблицы или массива измерений  $\{f_k\}, k = 1, 2, \dots$  выбор реперных точек допускает различные вариации, что создает гибкость в практическом применении метода, особенно в задачах распознавания и адаптивной обработки сигналов. В этих случаях значения  $\{f_k\}$  находятся по  $dpT$ -алгоритму (12) во всех точках интервала за возможным исключением "шумовых" зон (рис.5):

С другой стороны формулы (12), (22), (22a) и (23) позволяют получить приближение однозначной гладкой функции  $f(x)$  через функции  $d_1(x; \lambda, L)$ ,  $d_2(x; \lambda, L)$  и базис  $\{S_n(x; \lambda, L)\}, n = 3, 4, \dots$ , полученный с помощью  $\mathcal{D}$ -преобразований базиса  $\{x^n\}$  для реперов (19).

Например, если нам не известна функция  $h(x)$ , то, принимая  $\lambda$  и  $L$  в качестве границ интервала и полагая  $h(x) \approx \sum_k \alpha_k G_k(x; \lambda, L)$ , с помощью (24) мы получим разложение функции  $f(x)$  на  $[\lambda, L]$  многочленами  $d_1, d_2$  и  $\{S_n\}, n = 3, 4, \dots$  причем три параметра в этом разложении равны ординатам реперных точек:

$$f(x) \approx f_0 + f(x_\lambda)d_1(x; \lambda, L) + f(x_L)d_2(x; \lambda, L) + \sum_{k=3}^n \alpha_k(\lambda, L)S_k(x; \lambda, L). \quad (25)$$

Рассмотренный выше аппарат преобразований, их свойства и формулы (12)-(14), (20), (22)-(25) могут быть использованы для решения широкого класса практических задач, связанных с локальным приближением функций или сглаживанием экспериментальных данных. Они позволяют работать как с аналитически заданными функциями, так и с функциями, заданными массивами чисел или таблицей. Концепция привязки к кривой по ее трем реперным точкам дает возможность создавать гибкие *адаптивные* алгоритмы для обнаружения и распознавания кривых сложной формы, представленных точками на дискретной решетке при наличии ошибок и помех.

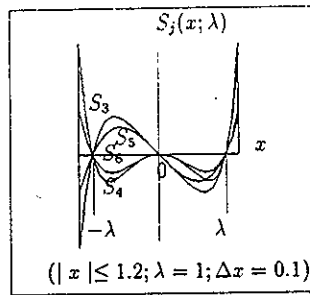


Рис. 7. Графики функций  $S_j(x; \lambda)$ .

Примечание 2. Так как многочлены  $S_n(x; \lambda)$  линейно независимы, выражаются через симметрические функции  $G_n(x; \lambda)$  и наполовину ортогональны

$$(S_i, S_j) = \int_{-\lambda}^{\lambda} S_i S_j dx = 0 \text{ при нечетном } (i + j),$$

то они легко поддаются процессу ортогонализации Грамма-Шмидта с коэффициентами, зависящими от  $\lambda$  и степени многочлена  $n$ . Полученные при этом многочлены, подобно тригонометрическим функциям  $\sin(nx)$  и  $\cos(nx)$ , образуют ортонормированную систему, состоящую из четных и нечетных функций. Как известно, использование ортонормированного базиса позволяет избегать обращения матриц, уменьшать ошибки округления и тем самым повышать эффективность вычислений.

## 4 Приближение и сглаживание функций

В этом разделе рассматриваются различные подходы к применению многочленов  $\{S_n(x; \lambda, L)\}$  и  $DPT$ , позволяющие эффективно решать задачи аппроксимации, интерполяции и сглаживания функций, заданных на конечном отрезке.

Как известно, традиционные многочлены имеют ряд недостатков, которые проявляются при интерполяции функций с особенностями поведения в локальной зоне, примером чего является функция О.Рунге [5]. Поэтому в последнее время широкое распространение получили сплайн-методы [1-4] приближения функций, которые лишены этого недостатка и являются эффективным инструментом как в теоретических исследованиях, так и в приложениях. На практике наибольшее распространение получили кубические многочлены, в частности, эрмитовы кубические сплайны  $S(f; x)$  с непрерывной второй производной. Эти сплайны обладают свойством локальности, и применяются для интерполяции достаточно гладких функций  $f(x)$ , заданных на некоторой сетке узлов  $\Delta_N: a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$  при выполнении следующих условий:

- степень  $S(f; x) \leq 3, x \in [x_i, x_{i+1}]$ ;
- $S(f; x) \in C^2[a, b]$ ;
- $S(x_i) = f(x_i), i = 0, 1, 2, \dots, N; N \geq 2$  и при задании различного типа краевых условий. В аналитическом виде  $S(f; x)$  представляются следующей формулой [2]:

$$S(f; x) = f_i(1-t)^2(1+2t) + f_{i+1}t^2(3-2t) + f'_i h_i t(1-t)^2 - f'_{i+1} h_i t^2(1-t), \quad (26)$$

где  $h_i = x_{i+1} - x_i, t = (x - x_i)h_i^{-1}, x \in [x_i, x_{i+1}], i = 0, 1, 2, \dots, N-1$ .

Неизвестными здесь являются  $f'_i$  и  $f'_{i+1}$ , которые определяются из условия непрерывности второй производной сплайна в узловых точках. Эти условия вместе с краевыми условиями позволяют получить систему  $N+1$  уравнений для определения  $N+1$  неизвестных  $f'_i, i = 0, 1, 2, \dots, N$ . Как известно, матрица этой системы является матрицей с диагональным преобладанием, невырожденной, т.е. неизвестные  $f'_i$  определяются однозначно. Существуют различные варианты построения кубических интерполяционных сплайнов, которые детально исследованы в литературе [1-3].

Так как сплайн (26) является многочленом степени не выше трех, то формула (25) для него будет выполняться точно при  $n \leq 3$  и, следовательно, его можно представить в виде разложения по функциям  $d_1, d_2$  и кубического многочлена  $S_3(\tau; \lambda, L)$ , если только будет задана одна дополнительная точка между соседними узлами. В этом случае мы получим новую модель кубического сплайна, использующую три точки для своего представления и эквивалентную сплайну (26), которую будем называть *трехточечной* моделью кубического сплайна или *TPS*. Так как модель *TPS* использует в своем представлении только один неизвестный параметр, то она имеет важное преимущество перед моделью (26), в частности по числу арифметических операций, необходимых для вычисления параметров.

В работе [7] дается подробное исследование естественных интерполяционных сплайнов (включая вопросы точности), которое может быть использовано и при исследовании предложенной трехточечной модели. Однако такое исследование выходит за рамки данной работы.

Ниже будут рассмотрены примеры построения алгоритмов для решения задач аппроксимации, интерполяции и сглаживания функций.

### 4.1 Локальное приближение функции $\varphi(x)$ кубической параболой

Как отмечалось выше, кубические сплайны играют ключевую роль в аппроксимации функций, и вопрос их применения подробно исследован в обширной литературе по теории и практике сплайнов [1, 2, 7]. Рассмотрим более подробно особенности  $D$ -преобразования кубической параболы на локальном отрезке.

Пусть на некотором конечном промежутке задана произвольная кубическая парабола

$$Y(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta, \quad \alpha \neq 0, \quad x \in [a, b]. \quad (27)$$

Зафиксируем на ней репер  $\mathcal{R}$  в точках  $(x_\lambda, Y_\lambda), (x_0, Y_0), (x_L, Y_L)$ , и на основе функций  $P_i(\tau; \lambda, L), i = 1, 2, 3$  найдем  $h(\tau)$ :

$$Y^*(x; \mathcal{R}) = h(\tau) = \alpha \lambda L \tau + Y_0.$$

Пользуясь сдвигом системы координат в базисную точку  $(x_0, Y_0)$ , это выражение всегда можно привести к виду

$$h(\tau) = D[\alpha x^3 + \dots; \mathcal{R}] = \alpha \lambda L \tau. \quad (28)$$

Таким образом,  $D$ -преобразование трансформирует кубическую параболу в прямую линию с угловым коэффициентом равным  $\alpha \lambda L$ , и, наоборот, обратное преобразование над этой прямой даст в результате исходную кубическую кривую, уравнение которой, согласно (24), (28) и табл.1, запишется в параметрической форме:

$$Q(\tau; \lambda, L) = \frac{-Q(\lambda)}{\lambda H} \tau(\tau - L) + \frac{Q(L)}{LH} \tau(\tau - \lambda) + \alpha \tau(\tau - \lambda)(\tau - L), \quad (29)$$



где  $H = L - \lambda$ . В отличие от формул (26) и (27), уравнение (29) содержит только один свободный параметр  $\alpha$  (коэффициент при  $x^3$ ), который легко найти путем сложения (13) с (14) при  $h(\lambda) = \alpha\lambda^2 L$  и  $h(L) = \alpha\lambda L^2$  из (28), в следующем виде:

$$\alpha = \frac{1}{H^2} [Q'(L) + Q'(\lambda) - \frac{2}{H}(Q(L) - Q(\lambda))]. \quad (30)$$

С точностью до постоянной, формула (29) представляет трехточечную модель локального кубического сплайна (TPS) на отрезке  $[\lambda, L]$ , параметрами которой являются реперные точки, включающие концы промежутка и коэффициент  $\alpha$  при  $x^3$ .

Геометрическая конструкция TPS-модели наглядно представлена на рис.8, где выделены координаты реперных точек. Произвольные кубические кривые  $f$  и  $\phi$  получаются при суммировании кубического моносплайна  $S_3(\tau; \lambda, L; \alpha)$  и проходящей через реперные точки параболы  $\Pi(\tau; \lambda, L)$  или прямой  $\Lambda(\tau; \lambda, L)$ , в зависимости от того, как располагаются реперные точки на плоскости. Приближение гладкой функции формулами (29), (30) покажем на конкретных примерах.

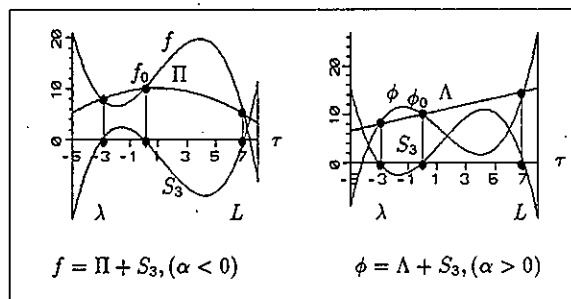


Рис.8. Геометрическая интерпретация TPS - модели.

Задача T1: Среди всех кривых (29) с тремя фиксированными реперными точками найти такую  $Q^*(\tau; \lambda, L)$ , которая аппроксимирует  $\varphi(\tau) \in C[\lambda, L]$  при выполнении следующих условий:

$$\frac{d^k \varphi(\tau)}{d\tau^k} \Big|_{\tau=\lambda, L} = \frac{d^k Q^*(\tau)}{d\tau^k} \Big|_{\tau=\lambda, L}, k = 0, 1. \quad (31)$$

Эти условия используются при построении кубических сплайнов [2]. Если известны значения производной  $\varphi'(x)$  в опорных точках и задан репер на кривой  $\varphi(x)$ , то решение задачи (T1) дается формулами (29) и (30).

Не нарушая общности, рассмотрим симметричный случай выбора границ интервала ( $\alpha = -\lambda, b = \lambda$ ),  $x_0 = 0$  и  $\varphi(0) = 0$ . После подстановки этих значений в (29) получим уравнение аппроксиманты

$$Q^*(x; \lambda) = 2\lambda^{-2} [\varphi(-\lambda)x(x - \lambda) + \varphi(\lambda)x(x + \lambda)] + \alpha x(x^2 - \lambda^2),$$

где

$$\alpha = \frac{1}{4\lambda^2} [\varphi'(-\lambda) + \varphi'(\lambda) - \frac{1}{\lambda}(\varphi(\lambda) - \varphi(-\lambda))].$$

Если  $\varphi(-\lambda) = -\varphi(\lambda)$ , то уравнение кубической кривой принимает упрощенный вид

$$Q^*(x; \lambda) = \frac{\varphi(\lambda)}{\lambda} x + \alpha x(x^2 - \lambda^2). \quad (32)$$

в котором параметр  $\alpha$  равен

$$\alpha = \frac{\lambda\varphi'(\lambda) - \varphi(\lambda)}{2\lambda^3}. \quad (33)$$

Таким образом, решение задачи (T1) дается формулами (29) и (30), а равенства (32) и (33) представляют решение той же задачи для симметричной, нечетной функции  $\varphi(x) \in C[-\lambda, \lambda]$ , которое в итоге примет следующий вид:

$$Q^*(x; \lambda) = \frac{\varphi(\lambda)}{\lambda} x + \frac{\lambda\varphi'(\lambda) - \varphi(\lambda)}{2\lambda^3} x(x^2 - \lambda^2). \quad (34)$$

Пример 1. Пусть  $\varphi(x) = \sin x$  и  $\lambda = \frac{\pi}{2}$ . Тогда, учитывая, что  $\sin \frac{\pi}{2} = 1$  и  $\sin' \frac{\pi}{2} = 0$  с помощью формул (33) и (34) получим

$$\alpha = -\frac{4}{\pi^3}, \text{ а } \sin x \approx \frac{3}{\pi}x - \frac{4}{\pi^3}x^3, x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}].$$

Этот результат совпадает с кубическим интерполяционным сплайном для  $\sin x$  на интервале  $[0, \frac{\pi}{2}]$  в примере на с.506 из [14], где для приближения синуса на отрезке  $[0, 2\pi]$  кубическим сплайном используется пятиточечная сетка узлов. Этот пример показывает, что решение, полученное на основе TPS - модели, полностью совпадает с решением, которое дает классический кубический сплайн.

#### 4.2 Среднеквадратичное кубическое приближение $\varphi(x) \in L_2[a, b]$

Пусть  $\varphi(x) \in L_2[a, b]$  и пусть на отрезке  $X : [\lambda, L] \subseteq [a, b]$ ,  $\lambda \neq L$  задан репер  $\mathcal{R} : \{(0, 0), (\lambda, \varphi(\lambda)), (L, \varphi(L))\}$ . Решаем следующую задачу:

Задача T2: Найти кубическую аппроксиманту  $S(x; \lambda, L, \alpha)$  в виде (29) для  $\varphi(x)$  из условия достижения минимума функционала  $J(x; \alpha)$ :

$$\min_{\alpha} J(x; \alpha) = \min_{\alpha} \int_X [\varphi(x) - S(x; \lambda, L, \alpha)]^2 dx. \quad (35)$$

Необходимое условие минимума

$$\frac{\partial J(x; \alpha)}{\partial \alpha} = 0, \text{ где } \frac{\partial S}{\partial \alpha} = \lambda L x d_3(x; \lambda, L).$$

позволяет найти искомое решение, т.е. определить параметр  $\alpha$ :

$$\alpha(\lambda, L) = \frac{1}{C(\lambda, L)} \left[ \int_X d_3 x \varphi(x) dx - \frac{\varphi(\lambda)}{\lambda H} A(\lambda, L) - \frac{\varphi(L)}{L H} B(\lambda, L) \right], \quad (36)$$

где  $A, B, C$  определяются формулами

$$A(\lambda, L) = \int_X x^2(x - \lambda)(x - L)^2 dx = \sum_{k=1}^4 a_k(\lambda, L)(L^{k+2} - \lambda^{k+2}),$$

$$B(\lambda, L) = \int_x x^2(x-\lambda)^2(x-L)dx = \sum_{k=1}^4 b_k(\lambda, L)(L^{k+2} - \lambda^{k+2}),$$

$$C(\lambda, L) = \int_x x^2(x-\lambda)^2(x-L)^2dx = \sum_{k=1}^5 c_k(\lambda, L)(L^{k+2} - \lambda^{k+2})$$

при следующих выражениях коэффициентов  $a_k, b_k, c_k$  через  $\lambda, L$ :

$$a_1 = -\frac{\lambda L^2}{3}, a_2 = \frac{L^2 + 2\lambda L}{4}, a_3 = -\frac{2L + \lambda}{5}, a_4 = \frac{1}{6},$$

$$b_1 = -\frac{L\lambda^2}{3}, b_2 = \frac{\lambda^2 + 2\lambda L}{4}, b_3 = -\frac{2\lambda + L}{5}, b_4 = \frac{1}{6},$$

$$c_1 = \frac{\lambda^2 L^2}{3}, c_2 = -\frac{\lambda L(L + \lambda)}{2}, c_3 = \frac{\lambda^2 + 4\lambda L + L^2}{5}, c_4 = -\frac{(L + \lambda)}{6}, c_5 = \frac{1}{7}.$$

В случае симметричного выбора границ интервала, члены с четными степенями  $\lambda$  в  $A(\lambda), B(\lambda)$  и  $C(\lambda)$  исчезают, а выражение (36) для параметра  $\alpha$  принимает вид:

$$\alpha = \frac{\int_{-\lambda}^{\lambda} (x^3 - 2\lambda x^2 - \lambda^2)\varphi(x)dx + (a_1\lambda + a_3\lambda^2)\varphi(-\lambda) - (b_1\lambda + b_3\lambda^2)\varphi(\lambda)}{2(c_1\lambda^3 + c_3\lambda^5 + c_5\lambda^7)} \quad (37)$$

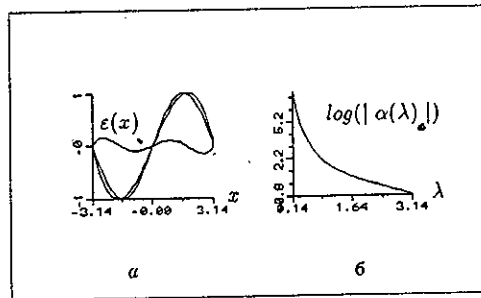


Рис.9.  $\text{Sin}x, S(x; \pi)$ , ошибка  $\varepsilon(x)$  (a) и параметр  $\alpha(\lambda)$  (b).

Пример 2. Снова рассмотрим функцию  $\varphi(x) = \text{Sin}x, x \in [-\lambda, \lambda]$ . Требуется найти кубическую кривую  $S(x; \lambda, \alpha)$ , дающую приближение для  $\text{Sin}x$  в метрике  $L_2$  (критерий (35)). Пользуясь формулой (37), получим

$$\alpha(\lambda) = \frac{105}{16\lambda^7} \left[ -\left(\frac{1}{15}\lambda^4 + 4\lambda^2 + 12\right)\text{Sin}\lambda + (4\lambda^2 + 12\lambda - 8)\text{Cos}\lambda \right].$$

На основании (29) имеем

$$\text{Sin}x \approx \mu \left( \frac{\text{Sin}\lambda}{\lambda} x + \alpha(\lambda)x^2(x^2 - \lambda^2) \right), \quad (38)$$

где  $\mu$  — нормирующий множитель, который определяется через максимальное значение функции  $|\text{Sin}x|$  на интервале  $[-\lambda, \lambda]$ .

Если взять  $\lambda = \pi$ , тогда на основе формул (37) и (38) получим

$$\alpha(\pi) = -\frac{105}{4\pi^7}(\pi^2 + 3\pi - 2).$$

Подставляя  $x = \frac{\pi}{2}$  и  $\alpha(\pi)$  в обе части (38), найдем  $\mu = 0.5579$ . В итоге получим следующее решение:

$$\text{Sin}x \approx -0.5579 \frac{105}{4\pi^7} (\pi^2 + 3\pi - 2)x(x^2 - \pi^2).$$

На рис.9 приведены графики  $\text{Sin}x, S(x; \pi)$ , ошибки  $\varepsilon(x) = \text{Sin}x - S(x; \pi, \alpha)$  полученной аппроксимации и параметра  $\alpha(\lambda), \lambda \in [0.14, \pi]$ . На графике хорошо видно, как аппроксимируется форма кривой на всем периоде с равномерным распределением ошибки, что важно, например, при решении задач описания формы объекта.

#### 4.3 Приближение $\varphi(x) \in C^{(n)}[\lambda, L]$ в базисе $\{S_n(x; \lambda, L)\}$

Если использовать формулу (25) и условия (31) для  $k = 1, 2, 3, \dots, n$ , то легко найти разложение функции  $f(x) - f(0) = \varphi(x) \in C^{(n)}[\lambda, L]$  через параметризованный базис  $\{S_n(x; \lambda, L)\}$  (формулы (22), (22а), (23)). В этом случае для определения параметров  $\alpha_k, k = 1, 2, \dots, n$  необходимо решить систему уравнений (31). Из (22а) и (25) видно, что, начиная с  $k = 3$ ,  $k$ -е производные базисных функций  $\{S_n\}$  и  $\{x^n\}$  совпадают, тогда как  $k$ -е производные функций  $d_1$  и  $d_2$  равны нулю.

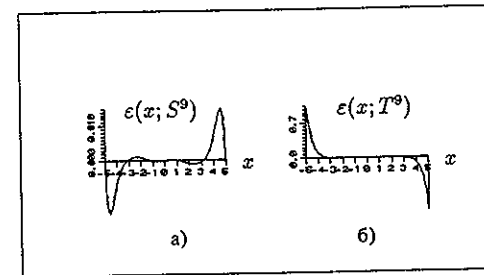


Рис.10. Характер поведения ошибок для  $S^9(x; \pi)$  (a) и  $T^9(x)$  (b).

Применяя эту схему для приближения синуса на отрезке  $[-\lambda, \lambda]$ , получим следующие формулы для определения  $\alpha_k(\lambda)$ :

$$\alpha_k(\lambda) = \frac{1}{\lambda^{(2k-4)}} \{ (c_{1k} - c_{2k}\lambda^2)\lambda \text{Sin}\lambda + (c_{3k} + c_{4k}\lambda^2)\text{Cos}\lambda \}, k = 3, 4, \dots, \quad (39)$$

где числа  $c_{jk}, j = 1, 2, 3, 4$  определяются через элементы матрицы системы (31), которые являются функциями индексов степени и производной.

Пример 3. Найти приближение  $\text{Sin}x, x \in [-\pi, \pi]$  многочленом 9-й степени.

Решение. Используя (23), (25) и (39) для  $n = 9$ , и с учетом равенства нулю функции  $\text{Sin}x$  в точках  $-\pi, \pi$  и  $0$ , получим

$$\text{Sin}x \approx \mu \sum_{j=1}^4 \alpha_j S_{2j+1}(x; \pi) = \mu x(x^2 - \pi^2) \sum_{j=1}^4 \alpha_j G_{2j+1}(x; \pi),$$

где  $G_{2j+1}(x; \pi)$  взяты из табл.2.

Коэффициенты  $\alpha_k$  находим как решение системы (31) при  $k = 4$ , и после их умножения на нормирующий множитель  $\mu = 1.000621$  разложение синуса принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} \text{Sin}x \approx & -0.16589653(x^3 - x\pi^2) + 0.008157788(x^5 - x\pi^4) - \\ & 0.000179591(x^7 - x\pi^6) + 0.000001731(x^9 - x\pi^8). \end{aligned} \quad (40)$$

На рис.10 приведены графики ошибок, показывающие качество приближения функции  $\text{Sin}x$  на отрезке  $[-\pi, \pi]$  методом *DPT* и усеченным рядом Тейлора для  $n = 9$ . На графиках ясно виден равномерный характер поведения ошибки для разложения в виде (40), которая в достаточно широкой зоне вне промежутка  $[-\pi, \pi]$  почти на два порядка меньше, чем ошибка разложения по Тейлору, хотя значительно уступает последней в центре промежутка.

#### 4.4 Интерполяция кубическими сплайнами (модель *TPS*)

Рассмотрим использование *TPS* для решения задачи интерполяции. Пусть на сетке  $\Delta_n : a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$  заданы значения достаточно гладкой функции  $f_k = f(x_k), k = 0, 1, 2, \dots, n$ .

Требуется построить сплайн, интерполирующий  $f(x)$  в точках  $x \in [x_k, x_{k+1}]$ . Известно, что решение этой задачи находится при помощи сплайн-интерполяции [2]. Мы же будем искать решение на основе *TPS*-модели кубического сплайна, которая использует одну промежуточную точку в  $k$ -ом звене.

Применение трехточечной модели (29) вместо классической двухточечной (26) обосновано тем, что кубический сплайн (26) является многочленом степени  $n \leq 3$ , для которого модель (29) является алгебраически эквивалентной. Действительно, если предположить, что кубический сплайн  $S(f; x)$  нам известен, т.е. найдены  $f'_k$  и  $f'_{k+1}$ , то для произвольной точки  $x_{0k} \in [x_k, x_{k+1}]$  значение  $S(f; x_{0k})$  и формулы (29), (30) позволяют однозначно построить многочлен степени не выше трех, в каждой точке совпадающий с кубическим сплайном (26). С другой стороны, конструкция (29) содержит как узлы сплайна, так и его значения в этих узлах в качестве своих параметров, а неизвестный параметр  $\alpha$  определяется через его первые производные в узловых точках.

Поэтому если заданная на отрезке система точек и сама функция позволяют построить подходящую сетку узлов, в которой для каждой пары граничных точек звена найдется по крайней мере одна, лежащая между ними, точка, то мы можем использовать трехточечную модель кубического сплайна в виде (29) для интерполяции функции в точках, лежащих между двумя соседними узлами (рис.11). Рассмотрим более подробно схему применения модели (29)-(30) для решения задачи интерполяции.

Предположим, что из данной системы точек  $\{x_j\}, (j = 0, 1, 2, \dots, N_j)$  отрезка  $[a, b]$ , в которых заданы значения функции  $f_j$ , подходящим образом выделено нечетное число точек  $\{x_k\} (k = 0, 1, 2, \dots, N; N \leq N_j)$ , задающих сетку узлов. Переобозначим точки сетки и припишем каждому звену индекс  $i$ , причем внутреннюю точку  $i$ -го звена обозначим через  $x_{0i}$ , а граничные точки - через  $x_i$  и  $x_{i+1}$  соответственно, т.е.  $x_i < x_{0i} < x_{i+1}, i = 1, 2, \dots, N_i$ , где  $N_i = \frac{N}{2}$ . Тогда, используя  $x_{0i}$  в качестве базисных точек, с помощью параллельного сдвига построим в каждом звене локальную систему отсчета с центром в точке  $(x_{0i}, f_{0i})$  (рис.11). В такой системе отсчета уравнение кубического

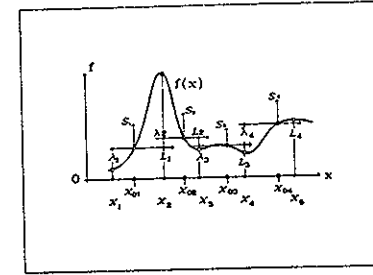


Рис.11. Сплайн-интерполяция для модели *TPS*.

сплайна принимает вид (29), а граничные точки звена становятся его параметрами:

$$\lambda_i = x_i - x_{0i}, L_i = x_{i+1} - x_{0i}, H_i = L_i - \lambda_i, \varphi_i = f_i - f_{0i} \text{ и } \varphi_{i+1} = f_{i+1} - f_{0i}.$$

После этого для  $\tau = x - x_{0i}$  и  $x \in [x_i, x_{i+1}]$  уравнение *TPS* для  $i$ -го звена запишется в виде

$$\begin{aligned} S_i(\tau; \lambda_i, L_i) = & \Pi_i(\tau; \lambda_i, L_i) + \alpha_i S_{3i}(\tau; \lambda_i, L_i) = \\ & \frac{-\varphi_i}{\lambda_i H_i} \tau(\tau - L_i) + \frac{\varphi_{i+1}}{L_i H_i} \tau(\tau - \lambda_i) + \alpha_i \tau(\tau - \lambda_i)(\tau - L_i). \end{aligned} \quad (41)$$

где  $\alpha_i$  - неизвестный параметр, который, в соответствии с (30), выражается через  $f'_i$  и  $f'_{i+1}$ . Мы видим, что этот кубический сплайн на каждом звене  $[x_i, x_{i+1}]$  является непрерывным вместе со своей первой производной всюду на отрезке  $[a, b]$ . Для определения параметра  $\alpha_i$ , как и в случае (26), используем условие непрерывности второй производной сплайна в точке стыковки, т.е.

$$S''_i(L_i; \lambda_i, L_i) = S''_{i+1}(\lambda_{i+1}; \lambda_{i+1}, L_{i+1}).$$

Выполняя эти условия в точках  $x_{i+1}$  для сплайна (41), получим систему  $N_i - 1$  уравнений для определения  $N_i$  неизвестных в виде

$$\mu_i \alpha_i - \mu_{i+1} \alpha_{i+1} = q_i, i = 1, 2, \dots, N_i - 1. \quad (42)$$

где  $\mu_i = L_i + H_i, \mu_{i+1} = \lambda_{i+1} - H_{i+1}, q_i = \frac{1}{2}(\beta_{i+1} - \beta_i), N_i = \frac{N}{2}$ , а

$$\beta_i = \frac{2}{\lambda_i L_i H_i} (\lambda_i \varphi_i - L_i \varphi_{i-1}) \text{ и } \beta_{i+1} = \frac{2}{\lambda_{i+1} L_{i+1} H_{i+1}} (\lambda_{i+1} \varphi_{i+1} - L_{i+1} \varphi_i).$$

Для однозначного определения  $\alpha_i$  к системе (42) необходимо добавить еще одно уравнение. Его можно получить, если нам задано хотя бы одно крайнее условие, например,  $S'_1(\lambda_1; \lambda_1, L_1) = \varphi'_1(\lambda_1)$ . Это условие позволяет найти параметр  $\alpha_1$  в виде

$$\alpha_1 = \frac{1}{\lambda_1^2 - \lambda_1 L_1} (\varphi'_1 - \Pi'_1), \text{ где } \Pi'_1 = -\frac{\varphi_1}{\lambda_1 H_1} (2\lambda_1 - L_1) + \frac{\varphi_2}{L_1 H_1} \lambda_1.$$

Уравнение для параметра  $\alpha_1$  вместе с уравнениями (42) позволяют однозначно найти все параметры  $\alpha_i$  в виде

$$\alpha_{i+1} = \frac{\mu_i}{\mu_{i+1}} \alpha_i - \frac{q_i}{\mu_{i+1}}, i = 1, 2, \dots, N_i - 1.$$

Для получения этого решения требуется в два раза меньше арифметических операций по сравнению с двухпараметрической моделью кубического сплайна. Кроме того, из сравнения моделей (26) и (29) видно, что последняя является более экономичной в вычислительном аспекте, и таким образом, общее число арифметических операций будет дополнительно сокращено.

Пример 4. Рассмотрим  $TPS$ -интерполяцию функции  $f(x) = \text{Sin}x$  для семиточечной сетки

$$\Delta\tau: -\frac{\pi}{2} < 0 < \frac{\pi}{2} < \pi < \frac{3\pi}{2} < 2\pi < \frac{5\pi}{2}.$$

В качестве базисных точек берем  $0, \pi$  и  $2\pi$ . Тогда  $\lambda_i = -\frac{\pi}{2}$ ,  $L_i = \frac{\pi}{2}$  а  $H_i = \pi$  для  $i = 1, 2, 3$ . Используем эти данные для вычисления  $\alpha_i$ :

$$\alpha_1 = \frac{2}{\pi^2}(0 - \Pi'_1) = \frac{2}{\pi^2}\left(\frac{2}{\pi^2}\left(-\frac{3\pi}{2}\right) + \frac{2}{\pi^2}\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = \frac{2}{\pi^2}\left(-\frac{3}{\pi} - \frac{1}{\pi}\right) = -\frac{4}{\pi^3}.$$

Величины  $\mu_i = \frac{3\pi}{2}$ ,  $\mu_{i+1} = -\frac{3\pi}{2}$ ,  $\beta_i = \beta_{i+1} = 0$  т.е.  $q_i = 0$ . Подставляя эти данные в (42), получим  $\alpha_{i+1} = -\alpha_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , которые позволяют записать окончательное решение, приведенное в Таблице 3.

Таблица 3

$j$	$x_j$	$f_j, \varphi_i$	$x_{0i}$	$\lambda_i$	$L_i$	$\tau$	$\alpha_i$	$S_i(\tau)$
0	$-\frac{\pi}{2}$	-1		$-\frac{\pi}{2}$				
1	0	0	0			$x$	$-\frac{4}{\pi^3}$	$-4\pi^{-3}\tau^3 + 3\pi^{-1}\tau$
2	$\frac{\pi}{2}$	1		$-\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$			
3	$\pi$	0	$\pi$			$x - \pi$	$\frac{4}{\pi^3}$	$4\pi^{-3}\tau^3 - 3\pi^{-1}\tau$
4	$\frac{3\pi}{2}$	-1		$-\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$			
5	$2\pi$	0	$2\pi$			$x - 2\pi$	$-\frac{4}{\pi^3}$	$-4\pi^{-3}\tau^3 + 3\pi^{-1}\tau$
6	$\frac{5\pi}{2}$	1		$\frac{\pi}{2}$				

Для получения этого результата по классической схеме необходимо было бы решать систему из шести уравнений.

#### 4.5 Локальное сглаживание экспериментальных данных

Возможности четырехточечного преобразования при сглаживании экспериментальных данных были показаны при решении актуальной в физике частиц задачи по обнаружению и распознаванию треков [12]. В этой задаче линейно-квадратичная модель была использована для разработки алгоритма адаптивных проективных фильтров (APF).

##### 4.5.1 Адаптивная фильтрация для поиска трековых сегментов

Легко видеть, что при заданном репере с помощью (24) уравнение квадратного трехчлена может быть записано в виде

$$y(x) = \frac{-y(x_0 + \lambda)}{\lambda H} x(x-L) + \frac{y(x_0 + L)}{LH} x(x-\lambda) + \frac{y(x_0)}{\lambda L} (x-\lambda)(x-L), \quad H = L - \lambda. \quad (43)$$

В уравнении (43) все переменные и константы доступны непосредственному измерению на практике, тогда как традиционная запись квадратного уравнения содержит

абстрактные коэффициенты, которые могут быть получены только косвенно, через дополнительные вычисления. Это уравнение было использовано в [12] при сглаживании данных для линейных и квадратичных моделей трековых сегментов. Там же получен алгоритм APF, построенный на свойстве (15) и формуле (43). APF предназначен для распознавания и обнаружения зашумленных участков траекторий на изображениях многотрековых событий, регистрируемых современными физическими установками. Алгоритм APF может быть обобщен также для слежения за кривыми более сложной формы, например при обработке контуров объектов [16,17], заданных на дискретной решетке. Основными элементами при описании отдельных участков контура являются дуги кубических парабол (кубические сплайны), которые широко применяются на практике.

##### 4.5.2 Локальное сглаживание кубической кривой

$D$ -преобразования позволяют повысить скорость вычислений при сглаживании экспериментальных данных. Увеличение скорости обработки является актуальной задачей, особенно в современных системах регистрации и обнаружения треков [15], при адаптивной дискретизации сигналов, при разработке систем технического зрения [17], при выделении и распознавании объекта на изображении и т.п..

По сравнению с традиционной моделью кубической кривой (27), модель трехточечного локального кубического сплайна (29) является достаточно гибким структурным элементом для разработки адаптивных алгоритмов распознавания контуров на оцифрованном изображении. Модель (29) содержит только один неизвестный параметр  $\alpha$ . Остальные три параметра выбираются (в общем случае произвольно) из входных данных с точностью ошибки измерения (оцифровки), которые при соответствующем выборе базы  $H = L - \lambda$  не вносят заметных искажений в геометрический образ искомого контура. Таким образом, эта модель позволяет естественным образом фиксировать концы сегмента контура, являющиеся одновременно параметрами модели. Эти и другие свойства дают возможность в несколько раз сократить число арифметических операций при сохранении допустимой точности и тем самым повысить скорость вычислений.

Рассмотрим более подробно стандартную задачу сглаживания для кубической модели.

Задача Т3. Найти кубическую параболу, которая на заданном отрезке наилучшим образом описывает соотношение между измеренными координатами

$$\{x_j\} \text{ и } \{\tilde{f}_j\}, \quad j = 1, 2, \dots, N; \quad N \gg 3,$$

где  $\tilde{f}_j = f_j + e_j$ ,  $e_j \sim \mathcal{N}(0, \sigma)$ , а  $x_j$  измерены без ошибок.

Классическое решение этой задачи дается методом наименьших квадратов для модели (27), в результате чего находятся оценки ее четырех параметров. Для модели (29) из условия

$$\sum_{j=1}^N \{\tilde{\varphi}_j - \tilde{\varphi}(\lambda)d_{1j} - \tilde{\varphi}(L)d_{2j} - \alpha\lambda L\tau_j d_{3j}\}^2 \rightarrow \min$$

получим адекватное решение задачи Т3 в виде следующей МНК-оценки параметра  $\alpha$ :

$$\hat{\alpha} = (\lambda L \sum_{j=1}^N z_j^2)^{-1} \left( \sum_{j=1}^N \tilde{\varphi}_j z_j - \tilde{\varphi}_\lambda \sum_{j=1}^N z_j d_{1j} - \tilde{\varphi}_L \sum_{j=1}^N z_j d_{2j} \right), \quad (44)$$

где  $z_j = \tau_j d_3 = \tau_j d_3(\tau_j; \lambda, L)$ , а  $\tau_j$  и  $\tilde{\varphi}_j$  получены при сдвиге системы отсчета в базисную точку  $(x_0, \tilde{f}_0)$  с одновременным изменением ошибок  $\epsilon_j = \epsilon_j - \epsilon_0$ . Параметры  $\lambda$  и  $L$  определяются по реперным координатам  $x_0, x_\lambda, x_L \in \{x_j\}$  так, чтобы  $x_\lambda < x_0 < x_L$ , а опорные координаты  $x_\lambda$  и  $x_L$  берутся на концах отрезка.

Таким образом, оценка параметра (44) дает решение задачи ТЗ для модели (29) в виде  $\hat{f}(x) = \tilde{f}_0 + \hat{\varphi}(x - x_0)$ , где

$$\hat{\varphi}(x - x_0) = \hat{\varphi}(\tau) = \hat{\varphi}(\lambda)d_1(\tau; \lambda, L) + \hat{\varphi}(L)d_2(\tau; \lambda, L) + \hat{\alpha}\lambda L\tau d_3(\tau; \lambda, L). \quad (45)$$

В частности, из (44) и (45) можно видеть, что число арифметических операций, необходимых для получения решения задачи ТЗ по модели (29), значительно меньше, чем в случае модели (27). Кроме того, табулирование семи функций

$$d_1, d_2, d_3, z d_1, z d_2, z \text{ и } z^2$$

в узлах сетки  $\tau_j \in [\lambda, L]$  выбранного окна дополнительно сокращает число динамических операций. Как показала оценка, даже при табулировании функций  $x_j^m$ , ( $m = 1 \div 6$ ) в модели (27), в зависимости от объема выборки  $N$ , требуется в 3 - 4 раза больше динамических операций, чем для модели (29).

Другое решение задачи ТЗ можно найти, используя свойства *DPT* понижать степень многочлена на два и подавлять ошибки измерений. В этом случае МНК - оценка параметра  $\alpha$  находится из условия

$$\min_{\alpha} \mathcal{H}(\tau_i; \alpha) = \min_{\alpha} \sum_{i=1}^{N_k} (\tilde{h}_i - \alpha \lambda L \tau_i)^2$$

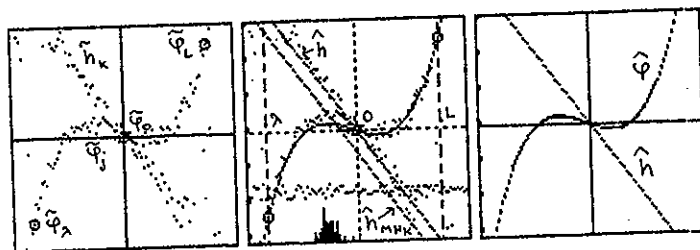
в следующем виде

$$\hat{\alpha} = (\lambda L \sum_{i=1}^{N_k} \tau_i^2)^{-1} \sum_{i=1}^{N_k} \tau_i \tilde{h}_i, \quad (46)$$

где

$$\tilde{h}_i = \tilde{\varphi}_{\lambda p_1}(\tau_i; \lambda, L) + \tilde{\varphi}_{L p_2}(\tau_i; \lambda, L) + \tilde{\varphi}_{i p_3}(\tau_i; \lambda, L), N_k \leq N, (N \gg 3). \quad (47)$$

Индекс  $i$  относится к тем точкам, для которых  $|\tau_i - \lambda| \leq T_n$  и  $|\tau_i - L| \leq T_n$ , где  $T_n$  - порог, задающий ширину "шумовой" зоны.



а) б) в)  
Рис.12. Сглаживание кубической кривой методом *DPT*.

В этом случае, в соответствии с оценкой (17), из заданного массива точек выбираются те, для которых модуль ошибки их  $\mathcal{D}$  - преобразования при фиксированном репере не превосходит заданного порога. При этом кубическая модель исходных данных переходит в модель прямой линии почти для всех преобразованных точек, за исключением, может быть, тех, которые попадают в зону неустойчивости (рис.5). После этого размерность задачи уменьшается на два. Пример сглаживания модельных данных по формулам (45)-(47) показан на рис. 12.

На решетке  $100 \times 100$  пикселей заданы точки  $\{\tilde{\varphi}_j\}$  кубической параболы, к ординатам которой добавлены случайные отклонения  $\{\epsilon_j\}$ , обладающие нормальным распределением с дисперсией равной 10 пикселям. На графике выделены три реперные точки, по которым определены параметры преобразования. Все точки  $\tilde{\varphi}_k$ , кроме реперных, по формуле (47) преобразованы в точки  $\tilde{h}_k$ , группирующиеся вдоль прямой линии (а) с угловым коэффициентом  $\alpha \lambda L$ . По точкам прямой получена МНК - оценка параметра  $\hat{\alpha}$  (формула (46)), после чего обратным преобразованием точек  $\{\tilde{h}_k\}$  (45) были найдены оценки  $\hat{\varphi}_k$  искомой кривой (б и в). На рис.12 (б) показана также прямая, полученная *DPT* преобразованием фита, полученного через МНК - оценки параметров традиционной модели (27). Параллельность прямых указывает на совпадение результатов обработки, полученных разными методами. Внизу показана гистограмма преобразованных точек  $\tilde{h}_k$ .

## 5 Заключение

Предложен новый подход к решению задач локального приближения функций и сглаживания экспериментальных данных, основанный на применении *DPT* или 4-точечных преобразований к исходным данным. Этот подход позволяет создавать новые методы и алгоритмы обработки данных, которые обеспечивают:

- параметризацию базиса  $\{x^n\}$  границами промежутка;
- сокращение числа неизвестных параметров и объема вычислений;
- устойчивость к случайным ошибкам всюду, за исключением окрестностей двух "шумовых" точек;
- устойчивость вычислений коэффициентов при  $r \rightarrow 0$ ;
- равномерное локальное приближение функций;
- построение трехточечной модели кубического сплайна;
- возможность создания адаптивных программ обработки;

Эти и другие особенности предлагаемого подхода позволяют получить ряд преимуществ при его программной реализации. В частности, пункты (а), (б) и (г) позволяют в несколько раз уменьшить число арифметических операций и тем самым повысить скорость обработки. Все перечисленные пункты являются важными элементами при разработке и создании гибких алгоритмов для решения многих практических задач.

В заключение выражаю благодарность Р. Ямалсеу и М. Назаренко за полезные обсуждения вопросов, затронутых в работе.

## Литература

- [1] *Алберг Дж., Нильсон Э., Уолли Дж.* Теория сплайнов и ее приложения. - М.: Мир, 1972.
- [2] *Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л.* Методы сплайн - функций. - М.: Наука, 1980.  
*Стечкин С.Б., Субботин Ю.Н.* Сплайны в вычислительной математике. - М.:Наука, 1976.
- [3] *Попов Б.А.* Равномерное приближение сплайнами. - Киев: Наукова Думка, 1984.
- [4] *Форсайт Дж., Малькольм М., Муллер К.* Машинные методы математических вычислений. - М.: Мир, 1980.  
*Wind H.* Function Parametrization. - CERN, 72-21.
- [5] *Ланцош К.* Практические методы прикладного анализа. - М.: ФМ, 1961.  
*Березин И.С., Жидков Н.П.* Методы вычислений. т.1. - М.: ФМ, 1962.
- [6] *Виноградов В.Н., Гай Е.В., Работнов Н.С.* Аналитическая аппроксимация данных в ядерной и нейтронной физике. - М.: Энергоатомиздат, 1987.
- [7] *Калиткин Н.Н., Кузьмина Л.В.* Математическое моделирование 6 (4) (1994) 77.
- [8] *Roy D., Bhattacharya R., Bhowmick S.* Comput. Phys. Commun. 78 (1993) 29.
- [9] *Tarek M. Nabhan, Albert Y. Zamaya* Neural Networks 7 (1) (1994) 88.
- [10] *Хардле В.* Прикладная непараметрическая регрессия. - М.: Мир, 1993.
- [11] *Дикусар Н.Д.* Математическое моделирование 3 (10) (1991) 50.
- [12] *Dikoussar N.D.* Comput. Phys. Commun. 79 (1994) 39.
- [13] *Клейн Ф.* Высшая геометрия. - Л.: ГОНТИ, 1939.
- [14] *Бронштейн И.Н., Семендяев К.А.* Справочник по математике. - М.: Наука, 1986.
- [15] *Риглер М., (ред.)* Методы анализа данных в физическом эксперименте. - М.: Мир, 1993.
- [16] *Дюррани С., Балл Р.* Твердотельные ядерные детекторы. - М.: Энергоатомиздат, 1990.  
*Третьякова С.П.* Диэлектрические детекторы и их использование в экспериментальной ядерной физике. - ФЭЧАЯ, т.23, вып.2, Дубна, 1992.
- [17] *Писаревский А.Н. и др.* Системы технического зрения. - Л.: Машиностроение, 1988.

Рукопись поступила в издательский отдел  
30 июня 1995 года.