ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

95-265

P5-95-265

П.Е.Жидков*

ИНВАРИАНТНЫЕ МЕРЫ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ КОРТЕВЕГА—ДЕ ФРИЗА, ПОРОЖДАЕМЫЕ ВЫСШИМИ ЗАКОНАМИ СОХРАНЕНИЯ

Направлено в журнал «Математический сборник»

*E-mail: zhidkov@theor.jinrc.dubna.su

1995

1. Введение

В последние годы появилось несколько статей, посвященных построению инвариантных мер (ИМ) на бесконечномерном фазовом пространстве (ФП) для динамических систем (ДС), порождаемых нелинейными уравнениями с частными производными математической физики, такими как нелинейное волновое уравнение или нелинейное уравнение Шредингера (см., например, [1-7]). При этом авторы опирались на то обстоятельство, что формально указанные уравнения являются гамильтоновыми, и обосновывали в бесконечномерном случае хорошо известное свойство конечномерных гамильтоновых систем, состоящее в том, что мера на ФП с плотностью $e^{-H(u)}$, где $H-$ гамильтониан, является инвариантной; при этом существенно использовалось то обстоятельство, что "гамильтониан" (функционал энергии) $H(u)$ рассматриваемых задач квадратичен по первым производным неизвестной функции, что позволяло, записывая формально под интегралом по ФП выражение типа const $e^{-H(u)}$, получить из квадратичной по производным части гауссовскую меру, т. е. получить выражение вида

$$\int\limits_{\Omega} e^{-H_1(u)}dw(u),$$

где $w-$ гауссовская мера на некотором ФП (обычно на L_2), а $H_1(u)-$ непрерывный (нелинейный) функционал на ФП. Таким образом, во всех указанных работах [1-7] ИМ строились по функционалу энергии. В работах [1,2,4] (в первой из них рассматривалось нелинейное уравнение Шредингера, а в остальных двух – периодическое по пространственной переменной нелинейное волновое уравнение) изучались нелинейности, растущие не быстрее линейной функции при стремлении неизвестной функции к бесконечности. Частично эти ограничения устранены в работах [3,6], в которых допускались степенные нелинейности. В работе [7] предлагается построение ИМ для некоторой абстрактной бесконечномерной ДС, к которой (формально) сводятся многие "солитонные" уравнения; в частности, полученный результат применен для построения ИМ для нелинейного уравнения Шредингера и нелинейного волнового уравнения.

Меры, подобные введенным в работах [1-7], ранее с другими целями и без доказательства их инвариантности изучались в ряде работ. Так,

в [8-12] они изучались в связи с задачами статистической механики систем с бесконечным числом степеней свободы. К сожалению, работа [13], также посвященная построению ИМ для нелинейного волнового уравнения, содержит неточности и пробелы.

Другим физически интересным явлением, обнаруженным в результате численного моделирования на компьютере для многих "солитонных" уравнений, является явление Ферми – Пасты – Улама [14,15]. На математическом языке оно означает устойчивость по Пуассону каждой траектории соответствующей ДС. Таким образом, если ДС обладает конечной ИМ, то теорема о возвращении Пуанкаре дает (частичное) объяснение этому явлению.

В настоящей работе строятся ИМ для ДС, порождаемых на подходящих ФП периодической по пространственной переменной задачей для обычного (интегрируемого) уравнения Кортевега – де Фриза

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0. \tag{1}$$

Отметим, что автору неизвестны строгие результаты по построению каких-либо ИМ для этого уравнения. В настоящей работе удается построить ИМ, ассоциированные с законами сохранения

$$I_n(u) = \int \left\{ \frac{1}{2}(u_x^{(n)})^2 + q_n(u, ..., u_x^{(n-1)}) \right\} dx$$

для $n \geq 3$. Одной из трудностей, которые не позволяют провести построение для $n = 0, 1, 2$, является отсутствие подходящих результатов о корректности задачи Коши для уравнения (1). Автор стремился сделать изложение по возможности замкнутым, приводя некоторые известные результаты.

2. Обозначения. Основные результаты

Всюду в дальнейшем через $C, C_1, C_2, C', C'', ...$ обозначаются положительные постоянные. Всюду $x, t \in R$ и все переменные вещественны. Фиксируем натуральное n и $A > 0$. Обозначим через L_2 обычное пространство Лебега периодических функций аргумента x с периодом A, со скалярным произведением $(f, g) = \int\limits_0^A f(x)g(x)dx$ и нормой $||f|| = (f, f)^{\frac{1}{2}}$.

Пусть D^∞– множество бесконечно дифференцируемых функций аргумента x, периодических с периодом A. Обозначим через Δ замыкание в L_2 оператора $-\frac{d^2}{dx^2}$ с областью определения D^∞. Хорошо известно, что Δ– самосопряженный (неограниченный) неотрицательный оператор. Пусть W_2^n– гильбертово пространство Соболева ($n \geq 0$ целое) периодических функций аргумента $x \in R$ с периодом A и со скалярным произведением $(u,v)_n = \int_0^A \{u(x)v(x) + \frac{d^n}{dx^n}u(x)\ \frac{d^n}{dx^n}v(x)\}dx$. Пусть X– гильбертово пространство, а I– связное подмножество вещественной прямой. Через $C(I;X)$ обозначим банахово пространство непрерывных и ограниченных на I функций со значениями в X, с нормой $||u(.)||_{C(I;X)} = \sup_{t\in I} ||u(t)||_X$, где $||.||_X$– норма в X.

Напомним основные факты из теории гауссовских мер на гильбертовом пространстве (см. [16,17]). Пусть H– сепарабельное вещественное гильбертово пространство и пусть S– самосопряженный положительный ядерный оператор на нем (напомним, что если $S = S^* > 0$– ядерный оператор, то существует счетный ортонормированный базис $\{e_k\}$, состоящий из его собственных векторов, с соответствующими собственными значениями $\lambda_k \geq 0$, $\lambda_k \to +0$ при $k \to \infty$, причем $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k < +\infty$). Назовем множество $M \subset H$ цилиндрическим, если

$$M = \{f \in H|\ [(f,e_1)_H, ..., (f,e_k)_H] \in F\} \tag{2}$$

для некоторых натурального k и борелевского множества $F \subset R^k$ (здесь $(.,.)_H$– скалярное произведение в H). Для множества M указанного вида (2) положим

$$w(M) = (2\pi)^{-\frac{k}{2}} \prod_{i=1}^{k} \lambda_i^{-\frac{1}{2}} \int_F e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k}\lambda_i^{-1}z_i^2} dz_1...dz_k.$$

Тогда нетрудно проверить, что множество всех цилиндрических множеств в H является алгеброй, на которой функция w нормирована ($w(H) = 1$), неотрицательна и аддитивна. Далее, поскольку S– ядерный, мера w счетно-аддитивна на алгебре цилиндрических множеств, следовательно, она может быть продолжена на минимальную сигма-алгебру $\mathcal{M}$, содержащую алгебру цилиндрических множеств, которая оказывается борелевской сигма-алгеброй в H (см. [16,17]). Мера w, определенная на $\mathcal{M}$, называется центрированной гауссовской мерой, а S– ее

корреляционным оператором. Отметим еще следующий результат (доказательство см., например, в [7]).

Утверждение.
Для любого шара $B_r(a) = \{f \in H|\ ||f-a||_H < r\}$ $w(B_r(a)) > 0$, если $r > 0$ (здесь $a \in H$).

Рассмотрим следующую задачу:

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0, \quad x,t \in R, \tag{3}$$

$$u(x+A,t) = u(x,t), \quad x,t \in R, \tag{4}$$

$$u(x,t_0) = u_0(x). \tag{5}$$

В работе [18] доказано, что для любых $A > 0$ и $u_0 \in D^\infty$ задача (3)-(5) имеет единственное определенное для всех x и t и бесконечно дифференцируемое по x и t решение.

Замечание 1.
Имеется значительное число результатов о корректности задачи Коши для уравнения Кортевега – де Фриза как в случае быстроубывающих достаточно гладких начальных данных, так и в случае периодической по x задачи (см., например, [19-22], а также список литературы в работе [18]). В настоящей работе указаны в основном лишь те результаты, которые необходимы для построения ИМ.

Известно (см. [23,24]), что для указанного класса решений задача (3)-(5) имеет счетный набор законов сохранения вида

$$I_n(u) = \int_0^A \left\{\frac{1}{2}(D_x^n u)^2 + c_n u(D_x^{n-1}u)^2 + q_n(u,...,D_x^{n-2}u)\right\} dx,$$

где $n \geq 2$– натуральное, $D_x^k = \frac{\partial^k}{\partial x^k}$, c_n– вещественные постоянные, а q_k– полиномы от своих аргументов (по поводу такого представления для законов сохранения см. [24]). Кроме того,

$$I_0(u) = \int_0^A u^2 dx \quad \text{и} \quad I_1(u) = \int_0^A \left\{\frac{1}{2}u_x^2 + u^3\right\} dx$$

также являются законами сохранения.

Пусть $n \geq 2$– натуральное. Положим

$$J_n(u) = \int_0^A \left\{ -\frac{1}{2}u^2 + c_n u (D_x^{n-1}u)^2 + q_n(u, ..., D_x^{n-2}u) \right\} dx.$$

Пусть w^n– центрированная гауссовская мера на W_2^{n-1} с корреляционным оператором $S = (I + \Delta^{n-1})(\Delta^n + I)^{-1}$ (здесь Δ– замыкание оператора $-\frac{d^2}{dx^2}$, определенного на D^∞, в W_2^{n-1}; ясно, что S– ядерный оператор). Для борелевского $\Omega \subset W_2^{n-1}$ положим формально

$$\mu^n(\Omega) = \int_\Omega e^{-J_n(u)} dw^n(u).$$

Первый результат работы составляет

Теорема 1.

Пусть n– натуральное, $n \geq 2$. Тогда для любых $A>0, T>0$, $t_0 \in R$ и $u_0 \in W_2^n$ существует единственное (обобщенное) решение задачи (3)-(5), $u(x,t) \in C([t_0 - T, t_0 + T]; W_2^{n-2})$, причем $u(.,t) \in W_2^n$ для любого фиксированного t как функция аргумента x. Для этого решения функционалы $I_k(u(.,t))$ $(k = \overline{0,n})$ определены и не зависят от t (являются законами сохранения). При любом фиксированном t отображение $h(u_0, t - t_0): u_0 \to u(.,t)$ является гомеоморфизмом как отображение из W_2^n в W_2^n. Кроме того, $h(u, t+\tau) = h(h(u,t),\tau)$ для любых $u \in W_2^n$, $t, \tau \in R$.

Замечание 2.

Определение обобщенного решения задачи (3)-(5) дано далее. Не вдаваясь в тонкости определений (в литературе имеются различные определения ДС), примем, что функция $h(u_0,t)$ является ДС на ФП W_2^n. Отметим только, что если на W_2^n существует борелевская ИМ m, так что $m(\Omega) = m(h(\Omega,t))$ для любых $t \in R$ и борелевского $\Omega \subset W_2^n$ (здесь $h(\Omega,t) = \{v \in W_2^n | \ v = h(u,t)$ для некоторого $u \in \Omega\}$), то справедлива теорема о возвращении Пуанкаре (см. [25]). Наконец, нетрудно проверить, что функционалы I_k, $k = \overline{0,n}$, определены и непрерывны на W_2^n.

Основной результат работы составляет

Теорема 2.

При любом $n \geq 3$ мера μ^n является корректно определенной на W_2^{n-1} неотрицательной борелевской ИМ для ДС, определенной в теореме 1. Для любого достаточно большого $d > 0$ $\quad 0 < \mu^n(R_d) < +\infty$, где

$$R_d = \{u \in W_2^{n-1} | \ I_k(u) \leq d, \quad k = \overline{0, n-1}\}.$$

Поскольку R_d является инвариантным множеством построенной ДС, оно может быть взято в качестве нового ФП, следовательно, справедлива теорема о возвращении Пуанкаре.

Везде под $||u(.,t)||_k$ понимается норма u как функции аргумента x при фиксированном t.

3. Доказательство теоремы 1

В этом и следующем разделах все оценки проводятся для $t > t_0$. Соответствующие оценки для $t < t_0$ могут быть получены полностью аналогично. В этом и следующем разделах $n \geq 2$– целое.

Определение.

Пусть $u_0 \in W_2^n$ для некоторого целого $n \geq 2$ и пусть для некоторого $T > 0$ существует последовательность $u_0^{(m)} \in D^\infty$, сходящаяся к u_0 сильно в W_2^n, такая, что для некоторой функции $u(x,t) \in C([t_0 - T, t_0 + T]; W_2^{n-2})$ выполнено условие

$$||u_m(.,t) - u(.,t)||_{C(t_0 - T, t_0 + T]; W_2^{n-2})} \to 0 \quad (m \to \infty),$$

где $u_m(.,t)$– решение задачи (3)-(5) класса C^∞, соответствующее $u_0 = u_0^{(m)}$. Тогда назовем функцию $u(x,t)$ (обобщенным) решением задачи (3)-(5) на отрезке времени $[t_0 - T, t_0 + T]$.

Лемма 1.

Для произвольных целого неотрицательного n и $d > 0$ существует такое $R > 0$, что если $u \in D^\infty$ и

$$I_0(u) < d, ..., I_n(u) < d,$$

то $||u||_n < R$.

Доказательство. Рассмотрим закон сохранения ($n \geq 2$):

$$\frac{1}{2}I_0(u) + I_n(u) = \int\limits_0^A \Big\{ \frac{1}{2}(D_x^n u)^2 + \frac{1}{2}u^2 +$$

$$+c_n u(D_x^{n-1}u)^2 + q_n(u, ..., D_x^{n-2}u) \Big\} dx \geq \frac{1}{2}||u(.)||_n^2 - \eta_n(||u(.)||_{n-1}), \quad (6)$$

где $\eta_n(s)$– монотонно возрастающая непрерывная функция на $[0, +\infty)$. Повторим эти оценки для функционалов $\frac{1}{2}I_0(u)+I_2(u), ..., \frac{1}{2}I_0(u)+I_{n-1}(u)$. Для функционала $I_1(u)$ имеем в силу известного неравенства $||u||_{L_p} \leq ||u||^{\frac{1}{2}+\frac{1}{p}}(||D_x u|| + ||u||)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}}$, где $p \geq 2$:

$$I_1(u) + \frac{1}{2}I_0(u) \geq \frac{1}{2}||u||_1^2 - \eta_1(||u||)||u||_1^{\frac{1}{2}}.$$

Из этих оценок и из (6) последовательно получаем

$$||u||_1 \leq C_1(d), ..., ||u||_n \leq C_n(d)$$

для всех $t \in R$, и лемма 1 доказана.

Лемма 2.

Для любой $u_0 \in W_2^n$ *и любого* $T > 0$ *существует единственное обобщенное решение задачи* (3)-(5) *класса* $C([t_0 - T, t_0 + T]; W_2^{n-2})$ (*напомним, что всюду* $n \geq 2$).

Доказательство. Для произвольных бесконечно гладких периодических решений u и v уравнения (3) и $w = u - v$ имеем в силу леммы 1 ($t > t_0$):

$$w_t - 6uw_x - 6wv_x + w_{xxx} = 0,$$

откуда получаем в силу леммы 1 ($t > t_0$):

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||D_x^{n-2}w||^2 = 6\int\limits_0^A \{D_x^{n-2}(v_x w)D_x^{n-2}w + D^{n-2}(uw_x)D_x^{n-2}w\}\, dx =$$

$$= 6\int\limits_0^A \{v_x(D_x^{n-2}w)^2 + \sum_{k=1}^{n-2} C_{n-2}^k (D_x^{k+1}v)(D_x^{n-2-k}w)(D_x^{n-2}w) -$$

$$-\frac{1}{2}(D_x^{n-2}w)^2 u_x + \sum_{k=1}^{n-2} C_{n-2}^k (D_x^k u)(D_x^{n-k-1}w)(D_x^{n-2}w)\} dx \leq$$

$$\leq C(||u_0||_n, ||v_0||_n)(||D_x^{n-2}w(.,t)||^2 + ||w||^2). \quad (7)$$

Аналогично

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||w(.,t)||^2 \leq C_1(||u_0||_n, ||v_0||_n)||w(.,t)||^2. \quad (8)$$

Из (8) сразу получаем

$$||w(.,t)||^2 \leq ||w(.,t_0)||^2 e^{C_1(t-t_0)}. \quad (9)$$

Фиксируем $T > 0$. Тогда для $t \in [t_0 - T, t_0 + T]$ из (7)-(9) следует неравенство:

$$||D_x^{n-2}w||^2 \leq C_2(||D_x^{n-2}w(.,t_0)||^2 + ||w(.,t_0)||^2)e^{C_3(t-t_0)}. \quad (10)$$

Для $t < t_0$ оценки, подобные (9) и (10), могут быть получены по аналогии. Из (9) и (10) получаем:

$$||w(.,t)||_{n-2}^2 \leq ||w(.,t_0)||_{n-2}^2 e^{C_4(t-t_0)}. \quad (11)$$

Из оценки (11) сразу следует утверждение леммы 2.

Лемма 3.

Решение $u(x,t)$ *из леммы 2 принадлежит* W_2^n *при любом* $t \in [t_0 - T, t_0 + T]$.

Доказательство. Фиксируем произвольную последовательность $u_0^{(m)} \to u_0$ в W_2^n, $u_0^{(m)} \in D^\infty$, и произвольное $t \in [t_0 - T, t_0 + T]$. В силу леммы 1 последовательность соответствующих решений задачи (3)-(5) $u_m(.,t)$ ограничена по норме W_2^n, следовательно, слабо компактна в W_2^n при любом фиксированном t. Следовательно, в силу единственности решения существует подпоследовательность $u_0^{(m_i)}$ такая, что $u_{m_i}(.,t)$ слабо сходится к $u(.,t)$ в W_2^n при $i \to \infty$ и, следовательно, $u(.,t) \in W_2^n$. Лемма 3 доказана.

Пусть $u_0^{(m)} \to u_0$ сильно в W_2^n. Пусть $u_m(.,t)$– последовательность соответствующих бесконечно дифференцируемых решений задачи

(3)-(5). Докажем, что $u_m(.,t) \to u(.,t)$ сильно в W_2^n для любого фиксированного t. Фиксируем произвольное $t \in R$. Очевидно, что достаточно доказать, что $||u_m(.,t)||_n \to ||u(.,t)||_n$ при $m \to \infty$. Предположим противное. Не ограничивая общности рассуждений, можно считать, что существует $\lim\limits_{m\to\infty} ||u_m(.,t)||_n > ||u(.,t)||_n$. Тогда, как легко показать, $\lim\limits_{m\to\infty} I_n(u_m(.,t)) > I_n(u(.,t))$, поскольку все слагаемые, входящие в I_n, за исключением слагаемого $\frac{1}{2}||D_x^n u||^2$, слабо непрерывны в W_2^n. Фиксируем произвольную последовательность w_m^0 $(m = 1,2,3,...)$ из D^∞, сильно сходящуюся к $u(.,t)$ в W_2^n, и пусть $w_m(.,t)$- последовательность решений задачи (3)-(4) с начальным условием

$$u(x,t) = w_m^0(x).$$

Тогда $w_m(x,t_0)$ слабо сходится к u_0, следовательно,

$$I_n(u(.,t)) = \lim_{m\to\infty} I_n(w_m^0) = \lim_{m\to\infty} I_n(w_m(x,t_0)) \geq I_n(u_0),$$

откуда $I_n(u_0) \leq I_n(u(.,t)) < \lim\limits_{m\to\infty} I_n(u_m(.,t)) = I_n(u_0)$, т. е. получаем противоречие.

Фиксируем произвольное $t \in R$ и покажем, что соответствие $u_0 \to u(.,t)$ взаимно однозначно. Рассмотрим произвольную последовательность $u_0^{(m)} \in D^\infty$, сходящуюся к u_0 сильно в W_2^n. Пусть $u_m(.,t)$- последовательность соответствующих бесконечно дифференцируемых решений задачи (3)-(5). В силу предыдущего последовательность $u_m(.,t)$ сходится к решению задачи $u(.,t)$ сильно в W_2^n при любом $t \in R$. Рассмотрим для задачи (3)-(4) в качестве начальных условий значение $u(.,t) = v \in W_2^n$. Тогда, в силу предыдущего, $u_m(.,t_0)$- значения решений этой задачи с $v = u_m(.,t)$ в точке $t = t_0$. Таким образом, если $u(.,t) \in W_2^n$- значение решения задачи (3)-(5) при некотором $t \neq t_0$, то, взяв это значение в качестве начального условия для задачи (3)-(4), получим, что решение этой задачи при $t = t_0$ равно u_0. Из этих же рассуждений следуют групповые свойства

$$h(u_0, 0) = u_0 \quad \text{и} \quad h(h(u_0,\tau),t) = h(u_0, t+\tau).$$

В частности, отсюда следует, что при $t \in R$ отображение $h(t,.): W_2^n \to W_2^n$ взаимно однозначно.

Докажем, что отображение $u_0 \to u(.,t)$ сильно непрерывно на W_2^n при любом фиксированном t. Предположим противное. Тогда для некоторых $u_0 \in W_2^n$, $\epsilon > 0$ и $t \in R$ существует последовательность $u_0^{(m)} \to u_0$

сильно в W_2^n, такая, что $||u_m(.,t) - u(.,t)||_n \geq \epsilon$ для всех $m = 1,2,3,...$, где $u_m(x,t)$- решение задачи (3)-(5) с $u_0 = u_0^{(m)}$. По доказанному для каждого номера m существует $v_0^{(m)} \in D^\infty$ такое, что $||v_0^{(m)} - u_0^{(m)}||_n < 2^{-m}$ и

$$||v_m(.,t) - u_m(.,t)||_n \leq \epsilon 2^{-m-1},$$

где v_m- решение задачи (3)-(5) с $u_0 = v_0^{(m)}$. Но тогда $v_0^{(m)} \to u_0$ сильно в W_2^n, но

$$||v_m(.,t) - u(.,t)||_n \geq ||u_m(.,t) - u(.,t)||_n - ||u_m(.,t) - v_m(.,t)||_n \geq$$

$$\geq \epsilon - \epsilon 2^{-m-1},$$

т. е. получаем противоречие. Тем самым, теорема 1 доказана.

4. Аппроксимация уравнения Кортевега – де Фриза

Пусть $\{e_m\}_{m=0,1,2,...}$- ортонормированный базис в W_2^n, состоящий из собственных функций оператора Δ, а $\{\lambda_m\}$- соответствующая неубывающая последовательность его собственных значений ($\lambda_0 = 0$). Пусть P_m- ортогональный проектор в W_2^n на подпространство L_m, натянутое на векторы $e_0, ..., e_{2m}$, а $P_m^\perp$- проектор на подпространство $L_m^\perp$, ортогональное L_m в W_2^n. Пусть

$$e_0(x) \equiv \frac{1}{\sqrt{A}}, \quad e_{2k-1}(x) = \sqrt{\frac{2}{A(1+\lambda_{2k-1}^n)}} \sin\frac{\pi k x}{A},$$

$$e_{2k}(x) = \sqrt{\frac{2}{A(1+\lambda_{2k}^n)}} \cos\frac{\pi k x}{A}.$$

Рассмотрим следующую задачу:

$$u_t^m - 6P_m[u^m u_x^m] + u_{xxx}^m = 0, \quad x \in (0,A),\ t \in R, \tag{12}$$

$$u^m(x,t_0) = P_m u_0(x). \tag{13}$$

Ясно, что для любого $u_0 \in L_2$ она имеет единственное решение $u^m(x,t) \in C([t_0 - T, t_0 + T]; L_m)$ для любого $T > 0$. Поскольку, как нетрудно проверить, $\frac{d}{dt}I_0(u^m) = \frac{d}{dt}I_1(u^m) = 0$, и в силу рассуждений, подобных приведенным в доказательстве леммы 1, имеем:

$$||u^m(.,t)||_1 \leq C(||u^m(.,t_0)||_1)$$

для всех t, и, следовательно, решение задачи (12)-(13) определено для всех $t \in R$. (Здесь используется известный факт, состоящий в том, что в конечномерном линейном пространстве любые две нормы эквивалентны).

Предложение 1.
Пусть $u_0 \in W_2^n$ и пусть последовательность $u_0^{m_k}$ такова, что $m_k \to +\infty$ при $k \to \infty$, $u_0^{m_k} \in L_{m_k}$ и $u_0^{m_k} \to u_0$ сильно в W_2^n при $k \to \infty$. Тогда для любого $t \in R$ $u^{m_k}(.,t) \to u(.,t)$ при $k \to \infty$ сильно в W_2^n, где $u(.,t)$– решение задачи (3)-(5), а $u^{m_k}(.,t)$– решение уравнения (12) с $m = m_k$ и с начальным условием

$$u^{m_k}(.,t_0) = u_0^{m_k}.$$

Доказательству этого утверждения предпошлем ряд лемм. Пусть

$$Lg = 6gg_x - g_{xxx}, \quad L_m g = 6P_m[gg_x] - g_{xxx}.$$

Лемма 4.
Существуют такие непрерывные на множестве $(R,s) \in [0,+\infty) \otimes [0,+\infty)$ монотонно неубывающие по второму аргументу функции $\gamma_n(R,s)$, $\gamma_n(R,0) \equiv 0$, что $\frac{d}{dt}I_n(u^{m_k}(.,t)) \leq$

$$\leq \gamma_n(R, \max_{\substack{0\leq i,j\leq n-1\\ i+j\neq 2n-2}} ||P_{m_k}^{\perp}[D_x^i u^{m_k}(.,t) D_x^j u^{m_k}(.,t)]|| + R^2||P_m^{\perp}(u^{m_k}u_x^{m_k})||_1)$$

для всех $t \in R$, всех $n = 3,4,5,\ldots$, всех $k = 1,2,3,\ldots$ и всех $u_0 \in W_2^{n-1}$ таких, что $||u_0||_{n-1} \leq R$.

Доказательство. Для $u_0 \in W_2^{n-1}$ имеем, поскольку при подстановке Lu^{m_k} вместо $u_t^{m_k}$ в выражение для $\frac{d}{dt}I_n(u^{m_k}(.,t))$ получается нуль (см. [24]):

$$\frac{d}{dt}I_n(u^{m_k}(.,t)) =$$

$$= \int_0^A \frac{\partial}{\partial t}\Big\{\frac{1}{2}(D_x^n u^{m_k})^2 + c_n u^{m_k}(D_x^{n-1}u^{m_k})^2 +$$

$$+ q_n(u^{m_k},\ldots,D_x^{n-2}u^{m_k})\Big\}\Big|_{u_t^{m_k}=6P_{m_k}^{\perp}(u^{m_k}u_x^{m_k})} dx =$$

$$= \int_0^A \Big\{6(-1)^n D_x^{2n}u^{m_k}P_{m_k}^{\perp}(u^{m_k}u_x^{m_k}) + 6c_n P_{m_k}^{\perp}(u^{m_k}u_x^{m_k})(D_x^{n-1}u^{m_k})^2 +$$

$$+(-1)^{n-1}12c_n D_x^{n-1}(u^{m_k}D_x^{n-1}u^{m_k}) \times P_{m_k}^{\perp}(u^{m_k}u_x^{m_k}) +$$

$$+6\sum_{i=0}^{n-2}\frac{\partial q_n(u^{m_k},\ldots,D_x^{n-2}u^{m_k})}{\partial(D_x^i u^{m_k})} D_x^i P_{m_k}^{\perp}(u^{m_k}u_x^{m_k})\Big\} =$$

$$= \int_0^A \Big\{6c_n P_{m_k}^{\perp}(u^{m_k}u_x^{m_k})(D_x^{n-1}u^{m_k})^2 +$$

$$+12c_n(u^{m_k}D_x^{n-1}u^{m_k})\Big[P_{m_k}^{\perp}D_x\sum_{i=0}^{n-2}C_{n-2}^i D_x^{n-2-i}u^{m_k}D_x^{i+1}u^{m_k}\Big] +$$

$$+6\sum_{i=0}^{n-2}\frac{\partial q_n(u^{m_k},\ldots,D_x^{n-2}u^{m_k})}{\partial(D_x^i u^{m_k})} P_{m_k}^{\perp}[D_x^i(u^{m_k}u_x^{m_k})]\Big\}dx =$$

$$= \int_0^A \Big\{6c_n P_{m_k}^{\perp}(u^{m_k}u_x^{m_k})(D_x^{n-1}u^{m_k})^2 +$$

$$+12c_n P_{m_k}^{\perp}(u^{m_k}D_x^{n-1}u^{m_k})\Big[D_x\sum_{i=0}^{n-3}C_{n-2}^i D_x^{n-2-i}u^{m_k}D_x^{i+1}u^{m_k}\Big] +$$

$$+6\sum_{i=0}^{n-2}\frac{\partial q_n(u^{m_k},\ldots,D_x^{n-2}u^{m_k})}{\partial(D_x^i u^{m_k})} P_{m_k}^{\perp}[D_x^i(u^{m_k}u_x^{m_k})]\Big\}dx,$$

откуда следует утверждение леммы 4.

Лемма 5.

Для любого $I = [t_0 - T, t_0 + T]$ существует непрерывная монотонно неубывающая на $[0, +\infty)$ функция $\beta_n(s)$ такая, что для любого $u_0 \in W_2^n$ величины $||u^m(.,t)||_n$ равномерно по $t \in I$ и $m = 1, 2, 3, \ldots$ ограничены величиной $\beta_n(||u_0||_n)$.

Доказательство с учетом леммы 4 следует из неравенств $(t > t_0)$:

$$||D_x^n u^m(.,t)||^2 \le ||D_x^n u^m(.,t_0)||^2 + \int_{t_0}^{t} \sigma_n(||u^m(.,s)||_{n-1})ds +$$

$$+ \int_{t_0}^{t} \gamma_n(||u_0||_n, \max_{\substack{0\le i,j\le n-1\\ i+j\ne 2n-2}} ||P_m^\perp [D_x^i u^m(.,s) \times D_x^j u^m(.,s)]||)ds \le$$

$$\le ||D_x^n u^m(.,t_0)||^2 + \int_{t_0}^{t} \theta_n(||u^m(.,s)||_{n-1})ds,$$

где $\sigma_n(s)$ и $\theta_n(s)$– неубывающие на $[0, +\infty)$ функции $(n \ge 2)$. Фиксируем произвольное $R > 0$ и пусть $||u_0|| \le R$. Тогда, учитывая, что, как и выше, $||u^m(.,t)||_1 \le C(R)$, последовательно получаем:

$$||u^m(.,t)||_2 \le C_2(R), \ldots, ||u^m(.,t)||_n \le C_n(R),$$

и лемма 5 доказана.

Лемма 6.

Для любых $u_0 \in W_2^n$ и $T > 0$ выполнено

$$||u^{m_k}(.,t) - u(.,t)||_{n-1} \to 0 \quad \text{при} \quad k \to \infty$$

равномерно по $t \in [t_0 - T, t_0 + T]$.

Доказательство. Используя леммы 1 и 5 и теорему 1, получаем:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^A ||D_x^{n-1}(u^{m_k}(.,t) - u(.,t))||^2 dx =$$

$$= 3\int_0^A D_x^{n-1}(u^{m_k}(.,t) - u(.,t)) \times D_x^{n-1}[(u^{m_k}(.,t))_x^2 - (u(.,t))_x^2]dx +$$

$$+3\int_0^A P_{m_k}^\perp D_x^{n-1}(u(.,t)) D_x^{n-1}[(u^{m_k}(.,t))_x^2]dx \le$$

$\le C_1||P_{m_k}^\perp(u(.,t))||_n + C_2(||u^{m_k}(.,t_0)||_n, ||u(.,t_0)||_n)||u^{m_k}(.,t) - u(.,t)||_{n-1}^2$, где $||P_{m_k}^\perp(u(.,t))||_n \to 0$ при $k \to \infty$ для любого t и $||P_{m_k}^\perp(u(.,t))||_n \le C$ для всех t. Следовательно,

$$\int_0^A ||D_x^{n-1}(u^{m_k}(.,t) - u(.,t))||^2 dx \le \int_0^A ||D_x^{n-1}(u^{m_k}(.,t_0) - u(.,t_0))||^2 dx +$$

$$+ \int_{t_0}^{t} \left\{ \int_0^A ||D_x^{n-1}(u^{m_k}(.,s) - u(.,s))||^2 dx \right\} ds + a_{m_k},$$

где $a_{m_k} \to +0$ при $k \to \infty$, и лемма 6 доказана.

Лемма 7.

При любом $u_0 \in W_2^n$ и любом $t \in R$

$$\lim_{k\to\infty}[I_n(u^{m_k}(.,t)) - I_n(u^{m_k}(.,t_0))] = 0.$$

Доказательство. В силу лемм 4 и 5, поскольку

$$|I_n(u^{m_k}(.,t)) - I_n(u^{m_k}(.,t_0))| \le \Bigg| \int_{t_0}^{t} \gamma_n(R, \max_{\substack{0\le i,j\le n-1\\ i+j\ne 2n-2}} ||P_{m_k}^\perp(D_x^i u^{m_k}(.,s) \times$$

$$\times D_x^j u^{m_k}(.,s))|| + R^2||P_{m_k}^\perp(u^{m_k}u_x^{m_k})||_1)ds \Bigg|$$

и $||u^{m_k}(.,s)||_{n-1}$ равномерно по $s \in [t_0, t]$ и $m = 1, 2, 3, \ldots$ ограничены, достаточно доказать, что

$$\lim_{k\to\infty} ||P_{m_k}^\perp[D_x^i u^{m_k}(.,s) \times D_x^j u^{m_k}(.,s)]|| = \lim_{k\to\infty} ||P_{m_k}^\perp(u^{m_k}u_x^{m_k})||_1 = 0$$

для всех $s \in [t_0, t]$ при $0 \le i, j \le n-1$, $i + j \ne 2n-2$. Имеем:

$$\|P^{\perp}_{m_k}[D^i_x u^{m_k}(.,s) \times D^j_x u^{m_k}(.,s)]\| \le$$

$$\le \|P^{\perp}_{m_k}[D^i_x u^{m_k}(.,s) \times D^j_x u^{m_k}(.,s) - D^i_x u(.,s) \times D^j_x u(.,s)]\| +$$

$$+\|P^{\perp}_{m_k}[D^i_x u(.,s) \times D^j_x u(.,s)]\| \to 0$$

при $k \to \infty$ в силу леммы 6. Аналогично $\lim\limits_{k\to\infty} \|P^{\perp}_{m_k}(u^{m_k}(.,t)u^{m_k}_x(.,t))\|_1 = 0$ для любого t, и лемма 7 доказана.

Далее так же, как при доказательстве теоремы 1, можно доказать, что

$$\|u^{m_k}(.,t) - u(.,t)\|_n \to 0$$

при любом t и $k \to \infty$, если $u_0 \in W^n_2$, и предложение 1 доказано.

Следствие 1.
При любом $u_0 \in W^{n-1}_2$ и любом t

$$\lim_{m\to\infty} [I_n(u^m(.,t)) - I_n(u^m(.,t_0))] = 0.$$

Доказательство повторяет доказательство леммы 7 с учетом доказанного предложения 1.

Для дальнейшего нам необходимы еще три утверждения.

Предложение 2.
Для любых $u_0 \in W^n_2$, $\epsilon > 0$ и $t \in R$ существует $\delta > 0$ такое, что

$$\|u^m(.,t) - u^m_1(.,t)\|_n < \epsilon$$

для любого $m = 1,2,3,\ldots$ и любого решения $u^m_1(.,t)$ задачи (12)-(13) такого, что

$$\|u^m(.,t_0) - u^m_1(.,t_0)\|_n < \delta$$

(здесь $u^m(x,t)$– решение задачи (12)-(13)).

Доказательство. Предположим противное. Пусть существует $\epsilon > 0$ такое, что для любого $\delta > 0$ найдутся m и $u_1 \in L_m$ такие, что

$$\|u^m_1(.,t) - u^m(.,t)\|_n \ge \epsilon \quad \text{и} \quad \|u^m_1(.,t_0) - u^m(.,t_0)\|_n < \delta$$

(здесь u^m_1– решение задачи (12)-(13) с $u_0 = u_1$). Тогда существуют последовательности m_k и $u^{m_k}_1 \in L_{m_k}$, $\|u^{m_k}_1 - P_{m_k}u_0\|_n \to 0$ при $k \to \infty$, такие, что

$$\|u^{m_k}_1(.,t) - u^{m_k}(.,t)\|_n \ge \epsilon,$$

где $u^{m_k}_1$– решение задачи (12)-(13) с $u_0 = u^{m_k}_1$ и $m = m_k$. Ясно, что последовательность m_k не ограничена, и, не ограничивая общности рассуждений, можно считать, что $m_k \to +\infty$ при $k \to \infty$. Но тогда, в силу предложения 1, $u^{m_k}_1(.,t) \to u(.,t)$ и $u^{m_k}(.,t) \to u(.,t)$ в W^n_2 при $k \to \infty$, т. е. получаем противоречие. Предложение 2 доказано.

Предложение 3.
Для любого $t \in R$ существует монотонно неубывающая непрерывная на $[0,+\infty)$ функция $\eta_n(s)$ такая, что

$$|I_n(u^m(.,t)) - I_n(u^m(.,t_0))| \le \eta_n(\|u^m(.,t_0)\|_{n-1})$$

для всех $m = 1,2,3,\ldots$ и $u_0 \in W^{n-1}_2$.

Доказательство следует из лемм 4 и 5.

Предложение 4.
Пусть $K \subset W^{n-1}_2$– компакт. Тогда для любого $t \in R$ $I_n(u^m(.,t)) - I_n(u^m(.,t_0)) \to 0$ при $m \to \infty$ равномерно по $u_0 \in K$ (здесь $u^m(.,t_0) = P_m u_0$).

Доказательство. Сначала докажем, что для любых $\epsilon > 0$ и $\bar{u} \in K$ существуют $r > 0$ и номер m_0 такие, что

$$|I_n(u^m(.,t)) - I_n(u^m(.,t_0))| < \epsilon$$

для всех $u_0 \in B_r(\bar{u}) = \{u \in W^{n-1}_2 \mid \|u - \bar{u}\|_{n-1} < r\}$ и всех $m \ge m_0$. Как и при доказательстве леммы 7, имеем для любого $r > 0$ и $u_0 \in B_r(\bar{u})$:

$$|I_n(u^m(.,t)) - I_n(u^m(.,t_0))| \le \left| \int_{t_0}^{t} \gamma_n(R, \max_{\substack{0\le i,j\le n-1 \\ i+j\ne 2n-2}} \|P^{\perp}_m(D^i_x u^m(.,s) \times \right.$$

$$\left. \times D^j_x u^m(.,s))\| + R^2 \|P^{\perp}_m(u^m(.,s)u^m_x(.,s))\|_1) ds \right|.$$

Оценим интеграл в правой части этого неравенства. Имеем:

$$\|P^{\perp}_m[D^i_x u^m(.,s) \times D^j_x u^m(.,s)]\| \le$$

$$\leq ||D_x^i u^m(.,s) \times D_x^j u^m(.,s) - D_x^i \bar{u}^m(.,s) \times D_x^j \bar{u}^m(.,s)|| +$$
$$+ ||D_x^i \bar{u}^m(.,s) \times D_x^j \bar{u}^m(.,s) - D_x^i \bar{u}(.,s) \times D_x^j \bar{u}(.,s)|| +$$
$$+ ||P_m^{\perp}[D_x^i \bar{u}(.,s) \times D_x^j \bar{u}(.,s)]||,$$

где $\bar{u}^m(.,s)$ и $\bar{u}(.,s)$– решения задач (12)-(13) и (3)-(5) соответственно с $u_0 = \bar{u}$.

Так же, как в лемме 5 и следствии 1, второе и третье слагаемые в правой части этого неравенства стремятся к нулю при $m \to \infty$ и не зависят от u_0. Далее, в силу предложения 2 для данных $\epsilon > 0$ и $t \in R$ существует $r > 0$ такое, что первое слагаемое меньше ϵ при всех $u_0 \in B_r(\bar{u})$. Оценивая подобным образом слагаемое $||P_m^{\perp}(u^m u_x^m)||_1$, получим, что для любых $\epsilon > 0$ и s существуют $r_0 > 0$ и номер m_0 такие, что

$$\psi(m,r) = \sup_{u_0 \in B_r(\bar{u})} \gamma_n(R, \max_{\substack{0 \leq i,j \leq n-1 \\ i+j \neq 2n-2}} ||P_m^{\perp}[D_x^i u^m(.,s) \times$$
$$\times D_x^j u^m(.,s)]|| + R^2 ||P_m^{\perp}(u^m(.,s) u_x^m(.,s))||_1) < \epsilon$$

для всех $0 < r < r_0$ и $m \geq m_0$, если $u_0 \in B_r(\bar{u})$. Кроме того, функция $\psi(m,r)$ ограничена при всех $0 < r < 1$ и $m = 1,2,3,...$ в силу леммы 5. Отсюда (используя, например, теорему Егорова [26]) получаем, что для любого $\epsilon > 0$ существуют $r > 0$ и номер m_0 такие, что

$$|I_n(u^m(.,t)) - I_n(u^m(.,t_0))| < \epsilon \tag{14}$$

для всех $m \geq m_0$, если $||u_0 - \bar{u}||_{n-1} < r$.

Фиксируем произвольное $\epsilon > 0$ и сопоставим каждой точке компакта K шар, обладающий указанным выше свойством. Пусть $B_{r_1}(u_1), ..., B_{r_l}(u_l)$– конечное покрытие компакта K этими шарами и пусть $m_1, ..., m_l$– номера такие, что при любом i выполнено (14), если $m \geq m_i$ и $u_0 \in B_{r_i}(u_i)$. Тогда, очевидно, (14) имеет место для всех $u_0 \in K$ при $m \geq \max_i m_i$, и предложение 4 доказано.

5. Доказательство теоремы 2

Сведения из общей теории меры, используемые в дальнейшем, содержатся, например, в [26]. Фиксируем некоторое целое $n \geq 3$. В этом

разделе используются результаты из разделов 3 и 4 (в частности, теорема 1).Здесь $\{e_k\}$– ортонормированный базис в W_2^{n-1}.

На подпространствах $L_k \subset W_2^{n-1}$ рассмотрим гауссовские меры w_k, определенные по правилу

$$w_k(\Omega) = (2\pi)^{-\frac{2k+1}{2}} \prod_{i=1}^{2k+1} \lambda_i^{-\frac{1}{2}} \int_F e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2k+1} \lambda_i^{-1} z_i^2} dz_1 ... dz_{2k+1},$$

где $\Omega = \{u \in L_k | \, [(u,e_1)_n, ..., (u,e_{2k+1})_n] \in F\}$ и $F \subset R^{2k+1}$– борелевское множество. Очевидно, что w_k– борелевская мера на L_k. Положим для произвольного борелевского $\Omega \subset W_2^{n-1}$ $w_k(\Omega) = w_k(\Omega \bigcap L_k)$. Тогда получим последовательность борелевских мер $\{w_k\}$ на W_2^{n-1}. Действительно, чтобы убедиться в этом, достаточно доказать, что если $\Omega \subset W_2^n$– борелевское множество, то $\Omega \bigcap L_k$– борелевское как подмножество пространства L_k (в топологии, заданной нормой в W_2^{n-1}). Ясно, что множество всех подмножеств L_k вида $\Omega \bigcap L_k$, где $\Omega \subset W_2^{n-1}$– борелевское, образует сигма-алгебру в L_k, содержащую все открытые подмножества из L_k, поскольку если $\Omega \subset W_2^{n-1}$ открыто, то $\Omega \bigcap L_k$ открыто в L_k и наоборот, для любого открытого $B \subset L_k$ существует открытое подмножество $\Omega \subset W_2^{n-1}$ такое, что $\Omega \bigcap L_k = B$. Остается убедиться в том, что полученная сигма-алгебра $\mathcal{K}$ множеств из L_k является минимальной, содержащей открытые множества. Предположим противное. Пусть $\mathcal{K}_1$– борелевская сигма-алгебра в L_k и пусть $\mathcal{K}_1 \subset \mathcal{K}$ и $\mathcal{K}_1 \neq \mathcal{K}$. Рассмотрим множество $\mathcal{M}_1$ всех борелевских множеств из W_2^{n-1} таких, что для любого $A \subset \mathcal{M}_1$ $A \bigcap L_k \subset \mathcal{K}_1$. Очевидно, что $\mathcal{M}_1$– сигма-алгебра, содержащаяся в борелевской сигма-алгебре и не совпадающая с ней. Кроме того, $\mathcal{M}_1$ содержит все открытые подмножества W_2^{n-1}. Тем самым, получаем противоречие и требуемое утверждение доказано.

Лемма 8.

Последовательность борелевских мер в W_2^{n-1} w_k слабо сходится к мере w^n.

Замечание 3. Напомним, что по определению последовательность борелевских мер $\{\nu_k\}_{k=1,2,3,...}$ в сепарабельном метрическом пространстве слабо сходится к борелевской мере ν, если

$$\lim_{m \to \infty} \int_R \phi(r) d\nu_m(r) = \int_R \phi(r) d\nu(r)$$

для любого непрерывного ограниченного вещественного функционала ϕ на R.

Доказательство леммы 8. Как легко можно доказать (см. [3,7]), используя теорему Прохорова о слабой компактности множества мер [16], последовательность мер $\{w_k\}$ слабо компактна. Кроме того, для любого цилиндрического множества M имеем: $w_k(M) = w^n(M)$ для всех достаточно больших номеров k.

Предположим, что последовательность w_k не сходится слабо к w^n. Тогда существует подпоследовательность w_{k_m}, слабо сходящаяся к некоторой мере $w' \neq w^n$. В силу единственности продолжения меры с алгебры на минимальную ее содержащую сигма-алгебру, существует цилиндрическое множество M такое, что $w'(M) \neq w^n(M)$. По известной теореме $w'(M) = \lim_{i\to\infty} w'(M_i)$, где $\{M_i\}$– некоторая последовательность открытых цилиндрических множеств вида (2) с одним и тем же k, содержащих M, и такая, что $M_1 \supset M_2 \supset \ldots \supset M_i \supset \ldots$ и $M = \bigcap_i M_i$. Тогда, очевидно, $w'(M_i) \neq w^n(M_i)$ для достаточно больших номеров i. Поэтому можно считать множество M открытым. Для произвольного $\epsilon > 0$ рассмотрим непрерывный функционал $\phi_\epsilon = \phi_\epsilon(z_1e_1 + \ldots + z_{2r+1}e_{2r+1})$, где

$$M = \{u \in W_2^{n-1} \mid [(u,e_1)_{n-1}, \ldots, (u,e_{2r+1})_{n-1}] \in F\}$$

и $F \subset R^{2r+1}$– открытое, такой, что $\phi_\epsilon(u) = 1$, если $\mathrm{dist}(u;\partial M) \geq \epsilon$, $\phi_\epsilon(u) \geq 0$ для всех u и $\phi_\epsilon(u) = 0$ при $u \notin M$. Ясно, что

$$\int_{W_2^{n-1}} \phi_\epsilon(u)dw_k(u) = \int_F \phi_\epsilon(z_1e_1 + \ldots + z_{2r+1}e_{2r+1})\times$$

$$\times(2\pi)^{-\frac{2r+1}{2}} \prod_{i=1}^{2r+1} \lambda_i^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2r+1}\lambda_i^{-1}z_i^2} dz_1\ldots dz_{2r+1} = \int_{W_2^{n-1}} \phi_\epsilon(u)dw^n(u)$$

при $k \geq r$. Далее, $\lim_{\epsilon\to+0} \int_{W_2^{n-1}} \phi_\epsilon(u)dw^n(u) = w^n(M)$. Но, с другой стороны, найдется $\epsilon > 0$ столь малое, что выражения

$$\int_{W_2^{n-1}} \phi_\epsilon(u)dw^n(u) \quad \text{и} \quad \lim_{m\to\infty} \int_{W_2^{n-1}} \phi_\epsilon(u)dw_{k_m}(u) = \int_{W_2^{n-1}} \phi_\epsilon(u)dw'(u)$$

отличаются соответственно от $w^n(M)$ и $w'(M)$ менее чем на $\frac{|w'(M)-w^n(M)|}{3}$, что противоречит доказанному выше. Тем самым, лемма 8 доказана.

Положим

$$\mu_k(\Omega) = \int_\Omega e^{-J_n(u)}dw_k(u) \quad \text{и} \quad \mu^n(\Omega) = \int_\Omega e^{-J_n(u)}dw^n(u).$$

Поскольку функционал J_n непрерывен на W_2^{n-1}, это корректно определенные меры. Пусть $h_m(u,t)$– ДС, порождаемая системой (12)-(13), так что функция $h_m(.,t)$ при любом фиксированном t отображает L_m в L_m и каждой $u_0 \in L_m$ сопоставляет решение $u^m(.,t-t_0)$ задачи (12)-(13) в момент времени $t-t_0$. Очевидно, что $h_m(.,t)$ отображает также W_2^{n-1} в L_m по правилу $h_m(u,t) = h_m(P_mu,t)$.

Лемма 9 [26,7].

$\liminf_{k\to\infty} \mu_k(\Omega) \geq \mu^n(\Omega)$ *для любого открытого ограниченного множества* $\Omega \subset W_2^{n-1}$.

$\limsup_{k\to\infty} \mu_k(K) \leq \mu^n(K)$ *для любого замкнутого ограниченного множества* $K \subset W_2^{n-1}$.

Лемма 10.

Пусть $t \in R$ *и* $\Omega \subset W_2^{n-1}$ *– замкнутое ограниченное множество. Тогда*

$$\lim_{m\to\infty} (\mu_m(h_m(\Omega,t)) - \mu_m(\Omega)) = 0.$$

Доказательство. Перепишем систему (12)-(13) в координатах $z(t) = (z_1(t), \ldots, z_{2m+1}(t))$, где $u^m(x,t) = z_1(t)e_1(x) + \ldots + z_{2m+1}(t)e_{2m+1}(x)$, получим

$$\dot{z}(t) = J\nabla_z H(z(t)), \tag{15}$$

$$z_i(t_0) = (u_0, e_i)_{n-1}, \tag{16}$$

где $H(z) = I_1(z_1e_1 + \ldots + z_{2m+1}e_{2m+1})$ и $J^* = -J$– кососимметрическая матрица, $(J)_{2k-1,2k} = -\frac{\pi k}{A}$, $(J)_{2k-1,l} = 0$, если $l \neq 2k$, $(J)_{2k,2k-1} = \frac{\pi k}{A}$, $(J)_{2k,l} = 0$, если $l \neq 2k-1$.

Докажем, что определитель $D = \left|\det\left(\frac{\partial z_i(t)}{\partial z_{0,j}}\right)_{i,j=\overline{1,2m+1}}\right| = 1$ для всех t. В самом деле, согласно результатам из [25], глава VI, мера $\sigma_m(\Omega) = \int\limits_\Omega dz_1...dz_{2m+1}$ является ИМ для ДС на L_m, порождаемой задачей (15)-(16). Поэтому

$$\sigma_m(h_m(\Omega,t)) = \int\limits_{h_m(\Omega,t)} dz_1...dz_{2m+1} = \int\limits_\Omega D dz_1...dz_{2m+1} = \int\limits_\Omega dz_1...dz_{2m+1}$$

для произвольного борелевского множества $\Omega \subset R^{2m+1}$. Отсюда, в силу непрерывности функции D, сразу следует, что $D \equiv 1$.

Фиксируем произвольное ограниченное замкнутое множество $\Omega \subset W_2^{n-1}$. В силу предыдущего получаем:

$$\mu_m(h_m(\Omega,t)) = \int\limits_\Omega e^{H(P_m u)-H(h_m(u,t))} d\mu_m(u).$$

Далее,

$$|\mu_m(\Omega) - \mu_m(h_m(\Omega,t))| \le \int\limits_\Omega |1 - e^{I_n(P_m u)-I_n(h_m(u,t))}| d\mu_m(u),$$

откуда, согласно предложению 3, получаем, что подынтегральное выражение в правой части этого неравенства – равномерно по m и u ограниченная в Ω функция. Фиксируем произвольное $\epsilon > 0$ и компакт $K \subset W_2^{n-1}$ такой, что $\mu(\Omega \setminus K) < \epsilon$, который существует согласно предыдущему и в силу теоремы Прохорова [16]. Далее, по предложению 4

$$\lim_{m\to\infty} [\mu_m(K) - \mu_m(h_m(K,t))] = 0,$$

поэтому

$$\limsup_{m\to\infty} [\mu_m(\Omega) - \mu_m(h_m(\Omega,t))] \le C_1\epsilon,$$

откуда, в силу произвольности $\epsilon > 0$, следует утверждение леммы 10. Лемма 10 доказана.

Следствие 2.

Для любого ограниченного открытого множества $\Omega \subset W_2^{n-1}$ и любого $t \in R$

$$\lim_{m\to\infty} |\mu_m(\Omega) - \mu_m(h_m(\Omega,t))| = 0.$$

Лемма 11.

Пусть $\Omega \subset W_2^{n-1}$ – открытое ограниченное множество и $t \in R$. Тогда $\mu^n(\Omega) = \mu^n(h(\Omega,t))$.

Доказательство. По теореме 1 и лемме 1 $h(\Omega,t)$ – также ограниченное открытое множество в W_2^{n-1}. Фиксируем произвольное $\epsilon > 0$. По известной теореме найдется компакт $K \subset \Omega$ такой, что $\mu^n(\Omega \setminus K) < \epsilon$. Пусть $K_1 = h(K,t)$. Тогда K_1 – также компакт и $K_1 \subset h(\Omega,t) = \Omega_1$. Пусть $\alpha = \min\{\text{dist}(K,\partial\Omega); \text{dist}(K_1,\partial\Omega_1)\}$, где

$$\text{dist}(A,B) = \inf_{u\in A,\ v\in B} ||u-v||_{n-1}$$

и ∂A – граница множества $A \subset W_2^{n-1}$. Очевидно, $\alpha > 0$. По предложению 2 для любого $u \in K$ существует шар $B_r(u) = \{v \in W_2^n |\ ||u-v||_{n-1} < r\}$ с положительным радиусом r такой, что

$$\text{dist}(h_m(u,t); h_m(v,t)) < \frac{\alpha}{3}$$

для всех $v \in B_r(u)$ и всех m. Пусть $B_1,...,B_l$ – конечное покрытие компакта K указанными шарами. Пусть $\Omega_\beta = \{v \in \Omega_1 |\ \text{dist}(v,\partial\Omega_1) \ge \beta\}$, где $\beta > 0$, и $D = \bigcup\limits_{i=1}^{l} B_i$.

Поскольку $h_m(u,t) \to h(u,t)$ в W_2^{n-1} при $m \to \infty$ для любого $u \in W_2^{n-1}$, получаем, что

$$h_m(D,t) \subset \Omega_{\frac{\alpha}{4}}$$

для всех достаточно больших m. Далее, согласно леммам 9 и 10 и следствию 2,

$$\mu^n(\Omega) \le \mu^n(D) + \epsilon \le \liminf_{m\to\infty} \mu_m(D) + \epsilon =$$

$$= \liminf_{m\to\infty} \mu_m(h_m(D,t)) + \epsilon \le \mu^n(\Omega_{\frac{\alpha}{4}}) + \epsilon \le \mu^n(\Omega_1) + \epsilon.$$

Поэтому, ввиду произвольности $\epsilon > 0$, получаем:

$$\mu^n(\Omega) \le \mu^n(\Omega_1).$$

Аналогично $\mu^n(\Omega_1) \le \mu^n(\Omega)$. Следовательно,

$$\mu^n(\Omega) = \mu^n(\Omega_1),$$

и лемма 11 доказана.

Докажем теорему 2. Пусть сначала $\Omega \subset W_2^{n-1}$– открытое неограниченное множество. Положим

$$\Omega^k = \{u \in \Omega |\ ||h(u,t)||_{n-1} + ||u||_{n-1} < k\},$$

где $k > 0$. Тогда $\Omega = \bigcup_{k=1}^{\infty} \Omega^k$, и каждое множество Ω^k ограничено, причем $h(\Omega,t) = \bigcup_{k=1}^{\infty} h(\Omega^k,t)$ и $\mu^n(\Omega^k) = \mu^n(h(\Omega^k,t))$. Поэтому

$$\mu^n(h(\Omega,t)) = \lim_{k\to\infty} \mu^n(h(\Omega^k,t)) = \lim_{k\to\infty} \mu^n(\Omega^k) = \mu^n(\Omega).$$

Далее, для произвольного борелевского множества $A \subset W_2^{n-1}$ равенство $\mu^n(A) = \mu^n(h(A,t))$ получим, приближая это множество снаружи открытыми множествами. Последнее утверждение теоремы 2 следует из леммы 1, непрерывности функционалов $I_0, ..., I_{n-1}$ на W_2^{n-1} и их ограниченности на любом ограниченном множестве из W_2^{n-1}. Тем самым, теорема 2 полностью доказана.

Литература

1. Жидков П.Е. Об инвариантной мере для нелинейного уравнения Шредингера// ДАН СССР. 1991. Т. **317**. N 3. С. 543-546.
2. Zhidkov P.E. An invariant measure for a nonlinear wave equation// Nonlinear Anal.: Theory, Meth. Appl. 1994. V. **22**. P. 319-325.
3. Жидков П.Е. Инвариантная мера для нелинейного уравнения Шредингера. Сообщ. ОИЯИ. P5-94-199. Дубна: ОИЯИ, 1994.
4. McKean H.P., K.L. Vaninsky. Statistical mechanics of nonlinear wave equations. In: "Trends and Perspectives in Appl. Math." (Ed. by L. Sirovich), New York: Springer, 1994. P. 239-264.

5. Casati G., Guarneri I., Valz-Griz F. Preliminaries to the ergodic theory of infinite-dimensional systems: a model of radiant cavity// J. Statist. Phys. 1983. V. **30**. No 1. P. 195-218.
6. Bourgain J. Periodic nonlinear Schrödinger equation and invariant measures// Commun. Math. Phys. 1994. V. **166**. P. 1-26.
7. Zhidkov P.E. On invariant measures for some infinite-dimensional dynamical systems// Annales de l'Institut H. Poincare, Phys. Theor. 1995. V. **62**. No 3. P. 267-287.
8. Арсеньев А.А. Об инвариантных мерах для классических динамических систем с бесконечномерным фазовым пространством// Матем. сб. 1983. Т. **121**. С. 297-309.
9. Чуешов И.Д. Равновесные статистические решения для динамических систем с бесконечным числом степеней свободы// Матем. сб. 1986. Т. **130**. С. 394-403.
10. Чуешов И.Д. О структуре равновесных решений для класса динамических систем, связанных со скобками Пуассона// Теор. Матем. Физ. 1988. Т. **75**. С. 445-450.
11. Песков Н.В. О состоянии Кубо-Мартина-Швингера системы синус-Гордон// Теор. Матем. Физ. 1985. Т. **64**. N 1. С. 32-40.
12. Lebowitz J.L., Rose H.A., Speer E.R. Statistical mechanics of the nonlinear Schrödinger equation// J. Statist. Phys. 1988. V. **50**. P. 657-687.
13. Friedlander L. An invariant measure for the equation $u_{tt} - u_{xx} + u^3 = 0$// Commun. Math. Phys. 1985. V. **98**. P. 1-16.
14. Заславский Г.М., Сагдеев Р.З. Введение в нелинейную физику. М.: Наука, 1988.
15. Додд Р., Эйлбек Дж., Гиббон Дж., Моррис Х. Солитоны и нелинейные волновые уравнения. М.: Мир, 1988.
16. Далецкий Ю.Л., Фомин С.В. Меры и дифференциальные уравнения в бесконечномерных пространствах. М.: Наука, 1983.

17. Скороход А.В. Интегрирование в гильбертовом пространстве. М.: Наука, 1975.

18. Жидков П.Е. О задаче Коши для обобщенного уравнения Кортевега – де Фриза с периодическими начальными данными// Дифференц. Уравн. 1990. Т. **26**. No 5. С. 823-829.

19. Kato T. On the Korteweg – de Vries equation// Manuscr. Math. 1979. V. **28**. No 1-3. P. 88-99.

20. Kato T. On the Cauchy problem for the (generalized) Korteweg – de Vries equation// Studies in Appl. Math. 1983. V. **8**. P. 93-128.

21. Кружков С.Н., Фаминский А.В. Обобщенные решения задачи Коши для уравнения Кортевега – де Фриза// Матем. сб. 1983. Т. **120**. No 3. С. 396-425.

22. Фаминский А.В. Задача Коши для уравнения Кортевега – де Фриза и его обобщений// Труды семин. им. И.Г. Петровского. 1988. М.: МГУ. Вып. **13**. С. 56-105.

23. Захаров В.Е., Манаков С.В., Новиков С.П., Питаевский Л.П. Теория солитонов. Метод обратной задачи. М.: Наука, 1980.

24. Kruskal M.D., Miura R.M., Gardner C.S., Zubusky N.Z. Korteweg – de Vries equation and generalizations. V. Uniqueness and nonexistence of polynomial conservation laws// J. Math. Phys. 1970. V. **11**. No 3. P. 952-960.

25. Немыцкий В.В., Степанов В.В. Качественная теория дифференциальных уравнений. М.–Л., 1949.

26. Халмош П. Теория меры. М.: ИЛ, 1953.

Рукопись поступила в издательский отдел
23 июня 1995 года.