

ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

95-202

P5-95-202

С.И.Сердюкова*

ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ
СХЕМЫ РУСАНОВА С КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ
НА СТЫКЕ ДВУХ ОБЛАСТЕЙ
С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ CAS REDUCE

Направлено в «Журнал вычислительной математики
и математической физики»

*sis@lcta36.jinr.dubna.su

1995

При численном моделировании области сложной геометрии заменяются на перекрывающиеся подобласти, в которых используются различные сетки. Такого рода составные перекрывающиеся сетки используются также в случаях, когда нужно локализовать особенности. Для стыковки полученных результатов обычно производится интерполяция. При этом возникает проблема сохранения устойчивости. Результаты по исследованию устойчивости, связанной с перекрывающимися областями, содержатся в работах [1-3]. В таких исследованиях успешно используется теория устойчивости разностных краевых задач, развитая в работах шведских математиков Gustafsson, Kreiss, Sundström [4],[5] и получившая название GKS-теории.

В предлагаемой работе рассматривается схема Русанова [6],[7] с дополнительными граничными и стыковочными условиями на концах интервала перекрытия двух областей. Разработан и реализован на PC-486 с применением системы REDUCE [8] алгоритм проверки устойчивости возникающей разностной краевой задачи. Основная трудность связана с вычислением спектра, который описывается системой пяти полиномиальных уравнений с пятью переменными. Этими переменными являются спектральный параметр z , $|z| \geq 1$, и собственные значения резольвентных матриц κ , $|\kappa(z)| \leq 1$ (задаче с вытеканием отвечают κ_1, κ_2 , задаче с втеканием отвечают $\hat{\kappa}_1, \hat{\kappa}_2$).

Переходим к новым переменным, которые являются симметричными функциями исходных: Используя соотношения Виета, сводим задачу к решению двух полиномиальных уравнений с двумя переменными

$$P(x, y) = 0, \quad Q(x, y) = 0, \quad x = \kappa_1 \kappa_2, \quad y = \hat{\kappa}_1 \hat{\kappa}_2.$$

Вычисляем $R(x) = \text{resultant}(P, Q, y)$. Результант $R(x)$ является многочленом высокого порядка с громоздкими коэффициентами. Нам приходится вычислять все корни этого многочлена с высокой точностью. Для каждого

корня x , $|x| \leq 1$, находим все решения $P(x, y) = 0$, $|y| \leq 1$. Пары (x, y) отвечает z . Оставляем z , $|z| \geq 1$. Так как не все (x, y) удовлетворяют второму уравнению $Q(x, y) = 0$, не все найденные z являются точками спектра исходной разностной краевой задачи. Кроме того, в программе никак не оговаривается, что x, y являются произведениями собственных значений, меньших по модулю единицы при $|z| \geq 1$. Что также приводит к появлению "ложных точек спектра". Разработан и реализован на PC алгоритм отделения "ложных точек спектра". Для отдельных практически интересных значений параметров установлена устойчивость рассматриваемой разностной краевой задачи в L_2 и в C . Постановка задачи заимствована автором из работы шведских математиков K.Otto и M.Thune' [9], в которой обсуждается устойчивость схемы Гари. Эта схема имеет второй порядок точности. Для схемы Гари задача Коши устойчива, при естественном ограничении на отношение шагов сетки, в L_2 [9], в C устойчивости нет. Схема Русанова имеет третий порядок точности. Соответствующая задача Коши устойчива в C [10]. Известно [9], что в случае схемы Гари наблюдается неустойчивость при чётном числе шагов на интервале перекрытия областей для задачи с вытеканием. Схема Русанова не имеет такого недостатка. Явная схема Гари имеет в основании семь точек, схема Русанова - пять. Это упрощает исследование. Тем не менее развитый алгоритм проверки устойчивости применим и к схеме Гари [11].

Дальнейший порядок изложения следующий. Для устойчивости задач с краевыми условиями необходима устойчивость задачи Коши. Поэтому предварительно в §1 обсуждается устойчивость задачи Коши. В §2 приводится математическая постановка задачи. Для схемы Русанова формулируются дополнительные граничные условия и условия стыковки. В §3 ставится задача вычисления спектра. В §4 решение системы пяти полиномиальных уравнений, описывающей спектр, сводится к решению системы двух поли-

номиальных уравнений. В §5 описан алгоритм отделения "ложных точек спектра". В §6-7 обсуждаются результаты расчётов.

§1. Схема Русанова. Устойчивость задачи Коши

Схема Русанова используется при решении нелинейных уравнений газовой динамики [6],[7]. Но явления неустойчивости обычно исследуются на простейшем гиперболическом уравнении $u_t = u_x$, для которого схема Русанова имеет вид

$$u_\nu^{n+1} = u_\nu^n + \frac{\alpha}{12}(-u_{\nu+2}^n + 8u_{\nu+1}^n - 8u_{\nu-1}^n + u_{\nu-2}^n) + \frac{\alpha^2}{8}(u_{\nu+2}^n - 2u_\nu^n + u_{\nu-2}^n) + \frac{\alpha^3}{12}(u_{\nu+2}^n - 2u_{\nu+1}^n + 2u_{\nu-1}^n - u_{\nu-2}^n) - \frac{\omega}{24}(u_{\nu+2}^n - 4u_{\nu+1}^n + 6u_\nu^n - 4u_{\nu-1}^n + u_{\nu-2}^n). \quad (1.1)$$

Здесь $n \geq 0$, ν пробегает все целочисленные значения, $x = \nu h$, $t = n\tau$, $\alpha = \frac{\tau}{h}$. Параметр ω позволяет управлять устойчивостью. Схеме (1.1) отвечает характеристическая функция

$$f(e^{i\theta}) = 1 - \frac{\alpha^2}{2} \sin^2 \theta - \frac{2}{3} \omega \sin^4 \frac{\theta}{2} + \alpha i \sin \theta \left(1 + \frac{2}{3}(1 - \alpha^2) \sin^2 \frac{\theta}{2}\right),$$

$$|f(e^{i\theta})|^2 = 1 - \frac{4}{9} F(\sin^2 \frac{\theta}{2}) \sin^4 \frac{\theta}{2}, \quad \text{где}$$

$$F(\sin^2 \frac{\theta}{2}) = (4\alpha^2(1 - \alpha^2)^2 - (\omega - 3\alpha^2)^2) \sin^4 \frac{\theta}{2} - 2(2\alpha^2(1 - \alpha^2)^2 + 3\alpha^2(\omega - \alpha^2 - 2)) \sin^2 \frac{\theta}{2} + 3(\omega - 4\alpha^2 + \alpha^4).$$

Задача Коши устойчива в L_2 , если и только если [6]

$$\alpha^2 \leq 1, \quad 4\alpha^2 - \alpha^4 \leq \omega \leq 3.$$

Необходимость этих условий становится очевидной из соотношений:

$$F(0) = 3(\omega - 4\alpha^2 + \alpha^4) \geq 0, \quad |f(-1)| = |1 - \frac{2}{3}\omega| \leq 1.$$

Внутри области устойчивости в L_2 есть устойчивость в C [10]. Устойчивость задачи Коши в C зависит от структуры характеристической функции

в окрестности определяющих точек, где $|f(e^{i\theta})| = 1$. При $0 < \alpha^2 < 1$, $4\alpha^2 - \alpha^4 < \omega < 3$, $\theta = 0$ является единственной определяющей точкой и в её окрестности справедливо разложение

$$f(e^{i\theta}) = \exp\left\{i\alpha\theta - \frac{\omega - 4\alpha^2 + \alpha^4}{24}\theta^4 + i\left(\frac{\alpha(\omega - 4\alpha^2 + \alpha^4)}{24} - \frac{\alpha(\alpha^2 - 1)(\alpha^2 - 4)}{120}\right)\theta^5 + \left(\frac{(1 + 3\alpha^2)(\omega - 4\alpha^2 + \alpha^4)}{144} - \frac{\alpha^2(\alpha^2 - 1)(\alpha^2 - 4)}{144}\right)\theta^6 + O(\theta^7)\right\}.$$

Заметим, что коэффициент при младшем нелинейном члене (чётного четвёртого порядка) отрицательный. Отсюда следует [10] устойчивость задачи Коши в C . Далее обсуждается устойчивость задачи с начальными данными на составной сетке.

§2. Постановка задачи на составной сетке

Следуя [9], рассматриваем область, составленную из двух перекрывающихся интервалов с разными сетками $G1, G2$; h_1, h_2 - шаги сеток $G1, G2$ соответственно. На рис.1

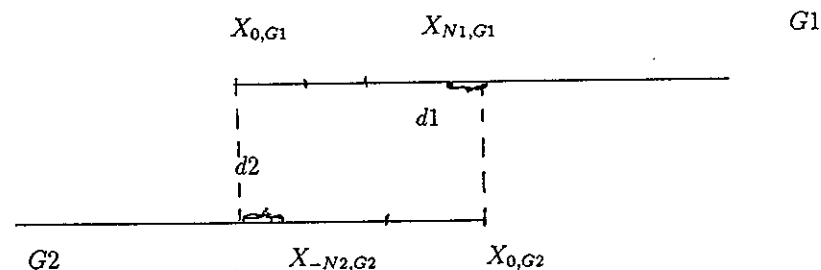


Рис. 1

$X_{0,G1}$ и $X_{0,G2}$ - левая и правая граничные точки $G1$ и $G2$ соответственно. $X_{N1,G1}$ - ближайшая слева к $X_{0,G2}$ точка $G1$, $d1$ - расстояние между этими точками. Аналогично $X_{-N2,G2}$ - ближайшая справа к $X_{0,G1}$ точка $G2$, $d2$ - расстояние между этими точками. Предполагается, что $N1, N2$ не зависят

от величины шагов h_1, h_2 . Переход от слоя к слою при решении задачи с начальными данными на составной сетке происходит следующим образом. На G_1 решается левая краевая задача (задача с вытеканием). Значения решения во внутренних узлах сетки $u_\nu^{n+1}, \nu \geq 2$, считаются по схеме Рундана (1.1) с $\alpha = \tau/h_1$. Недостающее u_1^{n+1} находится из дополнительного граничного условия. Следуя [12], выбираем в качестве дополнительного граничного условия аппроксимацию $u_t = u_x$ по схеме Вендрофа - Лакса второго порядка точности:

$$u_1^{n+1} = u_1^n + \frac{\alpha}{2}(u_2^n - u_0^n) + \frac{\alpha^2}{2}(u_2^n - 2u_1^n + u_0^n). \quad (2.1)$$

Значение u_0^{n+1} определяется путём интерполяции по значениям решения v_ν^n в ближайших узлах сетки G_2 . Прежде чем привести соответствующие формулы, определим v_ν^{n+1} . Решение правой краевой задачи для уравнения $u_t = u_x$ (задачи с втеканием) является решением левой краевой задачи для уравнения $v_t = -v_x$. Значения решения во внутренних узлах $v_\nu^{n+1}, \nu \geq 2$, считаются по схеме Рундана (1.1), где α заменяется на $\hat{\alpha} = -\phi\alpha, \phi = h_1/h_2$. Недостающее v_1^{n+1} находится из дополнительного граничного условия:

$$v_1^{n+1} = v_1^n - \phi \frac{\alpha}{2}(v_2^n - v_0^n) + \phi^2 \frac{\alpha^2}{2}(v_2^n - 2v_1^n + v_0^n). \quad (2.2)$$

Положим $\beta_j = d_j/h_j, j = 1, 2$. Краевые значения u_0^{n+1}, v_0^{n+1} определяются из условий стыковки [9]. В случае линейной интерполяции u_0^{n+1}, v_0^{n+1} вычисляются по $v_{N_2}^{n+1}, v_{N_2+1}^{n+1}$ и $u_{N_1}^{n+1}, u_{N_1+1}^{n+1}$ соответственно:

$$u_0^{n+1} = (1 - \beta_2)v_{N_2}^{n+1} + \beta_2 v_{N_2+1}^{n+1}, \quad v_0^{n+1} = (1 - \beta_1)u_{N_1}^{n+1} + \beta_1 u_{N_1+1}^{n+1}. \quad (2.3)$$

В случае квадратичной интерполяции дополнительно используются $v_{N_2-1}^{n+1}, u_{N_1-1}^{n+1}$ соответственно:

$$u_0^{n+1} = \frac{1}{2}\beta_2(\beta_2 - 1)v_{N_2-1}^{n+1} + (1 - \beta_2^2)v_{N_2}^{n+1} + \frac{1}{2}\beta_2(\beta_2 + 1)v_{N_2+1}^{n+1}, \quad (2.4)$$

$$v_0^{n+1} = \frac{1}{2}\beta_1(\beta_1 - 1)u_{N_1-1}^{n+1} + (1 - \beta_1^2)u_{N_1}^{n+1} + \frac{1}{2}\beta_1(\beta_1 + 1)u_{N_1+1}^{n+1}.$$

§3. Задача вычисления спектра

Переходим к исследованию устойчивости. В §2 был определён оператор перехода от слоя к слою G для схемы Рундана с дополнительными граничными и стыковочными условиями. Устойчивость означает ограниченность степеней оператора перехода от слоя к слою: $\|G^n\| \leq c, n \geq 0$. Для устойчивости необходимо, чтобы оператор G не имел точек спектра вне единичного круга. Используется классическое определение спектра: точка комплексной плоскости z_0 является точкой спектра оператора G , если существует ненулевая последовательность w такая, что $Gw = z_0 w$. В рассматриваемом случае w состоит из двух полубесконечных последовательностей $\{u_\nu\}, \{v_\nu\}, \nu \geq 0$, удовлетворяющих граничным условиям (2.1), (2.2) и связанным условиями стыковки (2.3), (2.4). При исследовании устойчивости в L_2 предполагается, что $\{u_\nu\}, \{v_\nu\}$ принадлежат L_2 . При исследовании устойчивости в C предполагается, что элементы последовательностей $\{u_\nu\}, \{v_\nu\}$ равномерно ограничены по модулю.

Для рассматриваемой краевой задачи спектральная задача имеет вид

$$(1 - z)u_\nu + \frac{\alpha}{12}(-u_{\nu+2} + 8u_{\nu+1} - 8u_{\nu-1} + u_{\nu-2}) + \quad (3.1)$$

$$+ \frac{\alpha^2}{8}(u_{\nu+2} - 2u_\nu + u_{\nu-2}) + \frac{\alpha^3}{12}(u_{\nu+2} - 2u_{\nu+1} + 2u_{\nu-1} - u_{\nu-2}) - \\ - \frac{\omega}{24}(u_{\nu+2} - 4u_{\nu+1} + 6u_\nu - 4u_{\nu-1} + u_{\nu-2}) = 0, \quad \nu \geq 2;$$

$$(1 - z)v_\nu - \phi \frac{\alpha}{12}(-v_{\nu+2} + 8v_{\nu+1} - 8v_{\nu-1} + v_{\nu-2}) + \quad (3.2)$$

$$+ \phi^2 \frac{\alpha^2}{8}(v_{\nu+2} - 2v_\nu + v_{\nu-2}) - \phi^3 \frac{\alpha^3}{12}(v_{\nu+2} - 2v_{\nu+1} + 2v_{\nu-1} - v_{\nu-2}) - \\ - \frac{\omega}{24}(v_{\nu+2} - 4v_{\nu+1} + 6v_\nu - 4v_{\nu-1} + v_{\nu-2}) = 0, \quad \nu \geq 2;$$

$$(1 - z)u_1 + \frac{\alpha}{2}(u_2 - u_0) + \frac{\alpha^2}{2}(u_2 - 2u_1 + u_0) = 0, \quad (3.3)$$

$$(1 - z)v_1 - \phi \frac{\alpha}{2}(v_2 - v_0) + \phi^2 \frac{\alpha^2}{2}(v_2 - 2v_1 + v_0) = 0;$$

в случае линейной интерполяции

$$u_0 = (1 - \beta_2)v_{N2} + \beta_2 v_{N2+1}, \quad v_0 = (1 - \beta_1)u_{N1} + \beta_1 u_{N1+1}; \quad (3.4)$$

в случае квадратичной интерполяции

$$u_0 = \frac{1}{2}\beta_2(\beta_2 - 1)v_{N2-1} + (1 - \beta_2^2)v_{N2} + \frac{1}{2}\beta_2(\beta_2 + 1)v_{N2+1}, \quad (3.5)$$

$$v_0 = \frac{1}{2}\beta_1(\beta_1 - 1)u_{N1-1} + (1 - \beta_1^2)u_{N2} + \frac{1}{2}\beta_1(\beta_1 + 1)u_{N1+1}.$$

Уравнениям (3.1), (3.2) отвечают характеристические многочлены

$$P_1(z, \kappa) = (1 - z)\kappa^2 + \frac{\alpha}{12}(-\kappa^4 + 8\kappa^3 - 8\kappa + 1) + \frac{\alpha^2}{8}(\kappa^4 - 2\kappa^2 + 1) + \\ + \frac{\alpha^3}{12}(\kappa^4 - 2\kappa^3 + 2\kappa - 1) - \frac{\omega}{24}(\kappa^4 - 4\kappa^3 + 6\kappa^2 - 4\kappa + 1),$$

$$P_2(z, \hat{\kappa}) = (1 - z)\hat{\kappa}^2 - \phi \frac{\alpha}{12}(-\hat{\kappa}^4 + 8\hat{\kappa}^3 - 8\hat{\kappa} + 1) + \phi^2 \frac{\alpha^2}{8}(\hat{\kappa}^4 - 2\hat{\kappa}^2 + 1) - \\ - \phi^3 \frac{\alpha^3}{12}(\hat{\kappa}^4 - 2\hat{\kappa}^3 + 2\hat{\kappa} - 1) - \frac{\omega}{24}(\hat{\kappa}^4 - 4\hat{\kappa}^3 + 6\hat{\kappa}^2 - 4\hat{\kappa} + 1).$$

Известно [4], что если выполняются условия устойчивости задачи Коши на однородных сетках: $\alpha^2 \leq 1$, $4\alpha^2 - \alpha^4 \leq \omega \leq 3$,

$$\phi^2 \alpha^2 \leq 1, \quad 4\phi^2 \alpha^2 - \phi^4 \alpha^4 \leq \omega \leq 3,$$

то при $|z| > 1$ характеристические уравнения $P_1(z, \kappa) = 0$, $P_2(z, \hat{\kappa}) = 0$ имеют по два решения, меньших по модулю единицы: κ_1, κ_2 и $\hat{\kappa}_1, \hat{\kappa}_2$ соответственно. Для $z, |z| > 1$ общего положения ($\kappa_1 \neq \kappa_2$, $\hat{\kappa}_1 \neq \hat{\kappa}_2$) ищем решение спектральной задачи в виде

$$u_\nu = c_1 \kappa_1^\nu + c_2 \kappa_2^\nu, \quad v_\nu = c_3 \hat{\kappa}_1^\nu + c_4 \hat{\kappa}_2^\nu, \quad \nu \geq 0.$$

После подстановки в (3.3), (3.4) (или (3.5) в случае квадратичной интерполяции) получаем линейную однородную систему для определения c_1, c_2, c_3, c_4 .

Условием её разрешимости является равенство нулю определителя. Так получается детерминантное уравнение [4]

$$D(z) = \det \begin{bmatrix} -1 & -1 & e_{11} & e_{12} \\ e_{21} & e_{22} & -1 & -1 \\ 0 & 0 & e_{31} & e_{32} \\ e_{41} & e_{42} & 0 & 0 \end{bmatrix} = 0.$$

Определяем элементы e_{ji} . В случае линейной интерполяции

$$e_{1i} = (1 - \beta_2)\hat{\kappa}_i^{N2} + \beta_2 \hat{\kappa}_i^{N2+1}, \quad e_{2i} = (1 - \beta_1)\kappa_i^{N1} + \beta_1 \kappa_i^{N1+1}, \quad (3.6) \\ i = 1, 2.$$

В случае квадратичной интерполяции

$$e_{1i} = \frac{1}{2}\beta_2(\beta_2 - 1)\hat{\kappa}_i^{N2-1} + (1 - \beta_2^2)\hat{\kappa}_i^{N2} + \frac{1}{2}\beta_2(\beta_2 + 1)\hat{\kappa}_i^{N2+1}, \quad (3.7)$$

$$e_{2i} = \frac{1}{2}\beta_1(\beta_1 - 1)\kappa_i^{N1-1} + (1 - \beta_1^2)\kappa_i^{N1} + \frac{1}{2}\beta_1(\beta_1 + 1)\kappa_i^{N1+1}, \quad i = 1, 2.$$

Элементы e_{3i}, e_{4i} определяются из дополнительных граничных условий:

$$e_{3i} = (1 - z)\hat{\kappa}_i - \phi \frac{\alpha}{2}(\hat{\kappa}_i^2 - 1) + \phi^2 \frac{\alpha^2}{2}(\hat{\kappa}_i - 1)^2, \quad (3.8)$$

$$e_{4i} = (1 - z)\kappa_i + \frac{\alpha}{2}(\kappa_i^2 - 1) + \frac{\alpha^2}{2}(\kappa_i - 1)^2, \quad i = 1, 2.$$

Итак, спектр рассматриваемой задачи с дополнительными граничными условиями и условиями стыковки описывается системой пяти полиномиальных уравнений с пятью переменными:

$$D(z, \kappa_1, \kappa_2, \hat{\kappa}_1, \hat{\kappa}_2) = 0, \quad |z| \geq 1,$$

$$P_1(z, \kappa_1) = 0, \quad P_1(z, \kappa_2) = 0, \quad (3.9)$$

$$P_2(z, \hat{\kappa}_1) = 0, \quad P_2(z, \hat{\kappa}_2) = 0.$$

§4. Переход к системе двух уравнений

Решение (3.9) удаётся свести к решению системы двух полиномиальных уравнений с двумя переменными. Вводим в рассмотрение

$$x1 = \kappa_1 + \kappa_2, \quad y1 = \kappa_3 + \kappa_4, \quad \hat{x}1 = \hat{\kappa}_1 + \hat{\kappa}_2, \quad \hat{y}1 = \hat{\kappa}_3 + \hat{\kappa}_4,$$

$$x2 = \kappa_1 \times \kappa_2, \quad y2 = \kappa_3 \times \kappa_4, \quad \hat{x}2 = \hat{\kappa}_1 \times \hat{\kappa}_2, \quad \hat{y}2 = \hat{\kappa}_3 \times \hat{\kappa}_4.$$

Здесь κ_3, κ_4 и $\hat{\kappa}_3, \hat{\kappa}_4$ - решения $P_1(z, \kappa) = 0$ и $P_2(z, \hat{\kappa}) = 0$ соответственно, большие по модулю единицы при $|z| > 1$. Покажем, что все новые переменные и спектральный параметр z могут быть явно выражены через $x = x2 = \kappa_1 \times \kappa_2$ и $y = y2 = \hat{\kappa}_1 \times \hat{\kappa}_2$. Соотношения Виета для $P_1(z, \kappa), P_2(z, \hat{\kappa})$ могут быть представлены в виде:

$$x1 + y1 = c1, \quad \hat{x}1 + \hat{y}1 = \hat{c}1, \quad (4.1a)$$

$$x2 + x1 \times y1 + y2 = c2 = a + b \times z, \quad \hat{x}2 + \hat{x}1 \times \hat{y}1 + \hat{y}2 = \hat{c}2 = \hat{a} + \hat{b} \times z, \quad (4.1б)$$

$$x2 \times y1 + x1 \times y2 = c3, \quad \hat{x}2 \times \hat{y}1 + \hat{x}1 \times \hat{y}2 = \hat{c}3, \quad (4.1в)$$

$$x2 \times y2 = c4, \quad \hat{x}2 \times \hat{y}2 = \hat{c}4. \quad (4.1г)$$

Только $c2, \hat{c}2$ зависят (линейно!) от z . Из соотношений (4.1a) и (4.1г) получаем

$$y1 = c1 - x1, \quad y2 = \frac{c4}{x2} = \frac{c4}{x}, \quad \hat{y}1 = \hat{c}1 - \hat{x}1, \quad \hat{y}2 = \frac{\hat{c}4}{\hat{y}}.$$

Подставляем эти формулы в оставшиеся (4.1б), (4.1в) соотношения:

$$x + x1(c1 - x1) + \frac{c4}{x} = a + b \times z, \quad y + \hat{x}1(\hat{c}1 - y) + \frac{\hat{c}4}{y} = \hat{a} + \hat{b} \times z, \quad (4.2a)$$

$$x(c1 - x1) + x1 \frac{c4}{x} = c3, \quad y(\hat{c}1 - \hat{x}1) + \hat{x}1 \frac{\hat{c}4}{y} = \hat{c}3. \quad (4.2б)$$

Из соотношений (4.2б) находим

$$x1 = (c3 - c1 \times x) / (\frac{c4}{x} - x), \quad \hat{x}1 = (\hat{c}3 - \hat{c}1 \times y) / (\frac{\hat{c}4}{y} - y). \quad (4.3)$$

Остаётся подставить эти формулы в соотношения (4.2a) и разрешить их относительно $z : z(x), z(y)$ являются отношениями многочленов. Первое из двух соотношений, связывающих x, y , построено: $z(x) - z(y) = 0$. Второе получается из детерминантного уравнения. В рассматриваемом случае

$$D(z) = \det \begin{bmatrix} -1 & -1 & c1(\hat{\kappa}_1) & c1(\hat{\kappa}_2) \\ e2(\kappa_1) & e2(\kappa_2) & -1 & -1 \\ 0 & 0 & e3(\hat{\kappa}_1) & e3(\hat{\kappa}_2) \\ e4(\kappa_1) & e4(\kappa_2) & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Здесь $e_i, i = 1, \dots, 4$, - многочлены (см. (3.6)-(3.8)). Производим элементарные преобразования над столбцами:

$$D(z) = \det ||E_1, E_2, E_3, E_4|| :$$

I. Вычитаем из первого столбца второй, из третьего - четвёртый и выносим за знак определителя множители $(\kappa_1 - \kappa_2), (\hat{\kappa}_1 - \hat{\kappa}_2)$:

$$D = (\kappa_1 - \kappa_2)(\hat{\kappa}_1 - \hat{\kappa}_2)D', \quad D' = \det ||E'_1, E_2, E'_3, E_4||,$$

$$E'_1 = (E_1 - E_2)/(\kappa_1 - \kappa_2), \quad E'_3 = (E_3 - E_4)/(\hat{\kappa}_1 - \hat{\kappa}_2).$$

II. Вычитаем из второго столбца первый, умноженный на κ_2 , и из четвёртого - третий, умноженный на $\hat{\kappa}_2$:

$$D = (\kappa_1 - \kappa_2)(\hat{\kappa}_1 - \hat{\kappa}_2)D'', \quad D'' = \det ||E'_1, E'_2, E'_3, E'_4||,$$

$$E'_2 = E_2 - \kappa_2 E'_1, \quad E'_4 = E_4 - \hat{\kappa}_2 E'_3.$$

В результате проделанных манипуляций третья и четвёртая строки преобразуются к виду

$$(0, 0, 1 - z - \phi^2 \alpha^2 + (\phi^2 \frac{\alpha^2}{2} - \phi \frac{\alpha}{2}) \hat{x}1, (\phi \frac{\alpha}{2} - \phi^2 \frac{\alpha^2}{2}) y + (\phi \frac{\alpha}{2} + \phi^2 \frac{\alpha^2}{2})).$$

$$(1 - z + (\frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha^2}{2}) x1, -(\frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha^2}{2}) x - \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha^2}{2}, 0, 0).$$

Первая и вторая строки принимают вид $(0, -1, e''_{11}, e''_{12})$, $(e''_{21}, e''_{22}, 0, -1)$ соответственно. В случае линейной интерполяции e''_{21}, e''_{22} определяются соотношениями:

$$e''_{21} = (1 - \beta_1)\Delta_1(\kappa_1, \kappa_2, N1) + \beta_1\Delta_1(\kappa_1, \kappa_2, N1 + 1),$$

$$e''_{22} = (1 - \beta_1)\Delta_2(\kappa_1, \kappa_2, N1) + \beta_1\Delta_2(\kappa_1, \kappa_2, N1 + 1).$$

В случае квадратичной интерполяции

$$e''_{21} = \frac{1}{2}\beta_1(\beta_1 - 1)\Delta_1(\kappa_1, \kappa_2, N1 - 1) + (1 - \beta_1^2)\Delta_1(\kappa_1, \kappa_2, N1) + \\ + \frac{1}{2}\beta_1(\beta_1 + 1)\Delta_1(\kappa_1, \kappa_2, N1 + 1),$$

$$e''_{22} = \frac{1}{2}\beta_1(\beta_1 - 1)\Delta_2(\kappa_1, \kappa_2, N1 - 1) + (1 - \beta_1^2)\Delta_2(\kappa_1, \kappa_2, N1) + \\ + \frac{1}{2}\beta_1(\beta_1 + 1)\Delta_2(\kappa_1, \kappa_2, N1 + 1).$$

Элементы e''_{11}, e''_{12} определяются аналогично: в формулах для e''_{21}, e''_{22} величины $\beta_1, N1, \kappa_1, \kappa_2$ заменяются на $\beta_2, N2, \hat{\kappa}_1, \hat{\kappa}_2$. Остаётся определить

$$(\Delta_1(\kappa_1, \kappa_2, N), \Delta_2(\kappa_1, \kappa_2, N)):$$

$$N = 0, \quad (0, 1); \quad N = 1, \quad (1, 0);$$

$$N = 2, \quad (x1, -x); \quad N = 3, \quad (x1^2 - x, -x1 \times x);$$

$$N = 4, \quad (x1^3 - 2x1 \times x, -x1^2 \times x + x^2);$$

$$N = 5, \quad (x1^4 - 3x1^2 \times x + x^2, -x1^3 \times x + 2x1 \times x^2);$$

$$N = 6, \quad (x1^5 - 4x1^3 \times x + 3x1 \times x^2, -x1^4 \times x + 3x1^2 \times x^2 - x^3);$$

$$N = 7, \quad (x1^6 - 5x1^4 \times x + 6x1^2 \times x^2 - x^3, -x(x1^5 + 3x1 \times x^2 - 4x1^3 \times x)).$$

После подстановки в D'' формул (4.3), представляющих $x1 = x1(x)$, $\hat{x}1 = \hat{x}1(y)$, и $z = z(x)$, получаем, что D'' является отношением двух многочленов от двух переменных x, y . Итак, спектр рассматриваемой задачи с

дополнительными граничными условиями и условиями стыковки описывается системой двух полиномиальных уравнений с двумя переменными:

$$P(x, y) = \text{num}(z(x) - z(y)) = 0, \quad Q(x, y) = \text{num}(D''(x, y)) = 0. \quad (4.4)$$

Замечание. Система (4.4) автоматически описывает точки спектра $z, |z| \geq 1$, которым отвечают $\kappa_1 = \kappa_2$ или $\hat{\kappa}_1 = \hat{\kappa}_2$. Это следует из структуры решения разностной краевой задачи в случае, когда характеристическое уравнение имеет кратные решения.

§5. Отделение ложных точек спектра

Попытки решать (4.4) с помощью системы REDUCE прямым способом ($\text{solve}(\{P, Q\}, \{x, y\})$) не дали результатов. После этого был использован метод результата. Как уже отмечалось во введении, сведение системы полиномиальных уравнений к результату приводит к ложным решениям. Другим источником ложных решений является следующее обстоятельство. В §4 был описан алгоритм сведения задачи вычисления спектра к решению двух полиномиальных уравнений. Реализованный на РС "алгоритм сведения" таков, что новые переменные $x1, x2, \hat{x}1, \hat{x}2$ зависят от двух произвольно выбранных решений характеристических уравнений $P_1(z, \kappa) = 0, P_2(z, \hat{\kappa}) = 0$ соответственно. Априори в программе не оговаривается, что $x1, x2$ и $\hat{x}1, \hat{x}2$ зависят соответственно от κ_j и $\hat{\kappa}_j$, меньших по модулю единицы. Отделение "ложных точек спектра" проходит два этапа. На первом этапе простой проверкой отделяем подмножество решений, удовлетворяющих условиям:

$$|z| \geq 1 - \epsilon, \quad |x1| \leq 2, \quad |\hat{x}1| \leq 2, \quad |x| \leq 1, \quad |y| \leq 1.$$

Точки z из ϵ -окрестности единичной окружности, $1 - \epsilon \leq |z| \leq 1 + \epsilon$, при дальнейшем анализе заменяются на $z/|z|$. Затем решается более деликатная проблема отделения "ложных точек спектра", связанных с переходом к результату $R(x) = \text{resultant}(P, Q, y)$. Идея отделения проста. Пусть

$x_0, |x_0| \leq 1$, является решением $R(x) = 0$ и $y_0, |y_0| \leq 1$, является решением $P(x_0, y) = 0$. Мы должны проверить, удовлетворяют ли x_0, y_0 второму уравнению $Q(x, y) = 0$. Трудность состоит в том, что $Q(x, y)$ является громоздким многочленом с большими коэффициентами. Версия REDUCE 3.4 (см. [8]) позволяет находить решения многочленов с высокой точностью. Мы задавали PRECISION 15. Так что решения, меньшие по модулю единицы, находятся с пятнадцатью верными знаками. В качестве критерия отбора принимается выполнение следующего неравенства:

$$|Q(x_0, y_0)| < 2 \times 10^{-15} |Q_x(x_0, y_0) + Q_y(x_0, y_0) \frac{P_x(x_0, y_0)}{P_y(x_0, y_0)}|. \quad (5.1)$$

На втором этапе для каждой из оставшихся "точек спектра" $z, |z| \geq 1$, решаем $P_1(z, \kappa) = 0$, $P_2(z, \hat{\kappa}) = 0$, находим $\kappa_j, |\kappa_j| \leq 1$ и $\hat{\kappa}_j, |\hat{\kappa}_j| \leq 1$. В этом случае критерием отбора является выполнение неравенств

$$|x_1 - (\kappa_1 + \kappa_2)| < \delta |x_1|, \quad |\hat{x}_1 - (\hat{\kappa}_1 + \hat{\kappa}_2)| < \delta |\hat{x}_1|. \quad (5.2)$$

В наших расчётах $\epsilon = 10^{-10}$, $\delta = 10^{-3}$. Критерии (5.1), (5.2) и константы ϵ, δ были выбраны в процессе численных экспериментов и хорошо зарекомендовали себя в расчётах. В §6, 7 обсуждаются результаты исследования устойчивости в двух конкретных случаях.

§6. Случай $\alpha = 1/2$, $\omega = 2$, $N_1 = 2$, $N_2 = 1$, $\phi = 1/2$,

$$\beta_1 = 1/2, \quad \beta_2 = 1/4, \quad int = 2$$

Последняя величина $int = 2$ означает, что используется квадратичная интерполяция. В рассматриваемом случае функции $x_1(x), \hat{x}_1(y)$ имеют вид:

$$x_1(x) = (2x(-31x + 1))/(x^2 - 7), \quad (6.1)$$

$$\hat{x}_1(y) = (2y(65y - 191))/(5(5y^2 - 11)).$$

Спектральный параметр z имеет два представления:

$$z(x) = (-x^6 + 24x^5 - 117x^4 + 26576x^3 - 819x^2 + \quad (6.2)$$

$$+ 1176x - 343)/(96x(x^4 - 14x^2 + 49)).$$

$$z(y) = (625y^6 + 8400y^5 + 48285y^4 - 220064y^3 + 106227y^2 + \quad + 40656y + 6655)/(768y(25y^4 - 110y^2 + 121)).$$

Задача вычисления спектра сводится к решению двух полиномиальных уравнений:

$$P(x, y) = -200x^6y^5 + 880x^6y^3 - 968x^6y - 625x^5y^6 - 3600x^5y^5 - 48285x^5y^4 + 198944x^5y^3 - 106227x^5y^2 - 17424x^5y - 6655x^5 - 23400x^4y^5 + 102960x^4y^3 - 113256x^4y + 8750x^3y^6 + 5432800x^3y^5 + 675990x^3y^4 - 26467776x^3y^3 + 1487178x^3y^2 + 26294752x^3y + 93170x^3 - 163800x^2y^5 + 720720x^2y^3 - 792792x^2y - 30625xy^6 - 176400xy^5 - 2365965xy^4 + 9748256xy^3 - 5205123xy^2 - 853776xy - 326095x - 68600y^5 + 301840y^3 - 332024y, \quad (6.3)$$

$$Q(x, y) = 4500x^{15}y^3 + 2700x^{15}y^2 - 9900x^{15}y - 5940x^{15} + 1075125x^{14}y^3 + 1132115x^{14}y^2 - 3025371x^{14}y - 1996445x^{14} + 74553375x^{13}y^3 + 95341305x^{13}y^2 - 242073777x^{13}y - 151310775x^{13} + 800678250x^{12}y^3 + 1395377830x^{12}y^2 - 4152634902x^{12}y - 1279603930x^{12} - 51469443750x^{11}y^3 - 65975659850x^{11}y^2 + 159980499930x^{11}y + 110146847030x^{11} - 320999302125x^{10}y^3 - 21170073435x^{10}y^2 + 746771980419x^{10}y + 16197131445x^{10} + 8884902056625x^9y^3 + 5776710085175x^9y^2 - 20183894331615x^9y - 12231763745465x^9 + 876664435500x^8y^3 + 343155930420x^8y^2 - 2105471002068x^8y - 622567539660x^8 - 620836398000x^7y^3 - 1816976886480x^7y^2 + 3518558022672x^7y + 2385628383600x^7 - 179670259125x^6y^3 - 7777428620115x^6y^2 + 187454456091x^6y + 17265936033885x^6 - 501286335375x^5y^3 - 158285351945x^5y^2 + 1418053336833x^5y + 112222821095x^5 - 78964173750x^4y^3 + 1601402848710x^4y^2 + 2179532179146x^4y - 5024819107770x^4 + 45967745250x^3y^3 + 324439518830x^3y^2 - 184203716382x^3y - 651569670290x^3 + 9561082125x^2y^3 - 46066558405x^2y^2 - 384370526883x^2y + 373372967275x^2 + 397065375xy^3 - 25061001735xy^2 - 5646633361xy + 93896255145x - 2635337600y^2 + 5797742720.$$

Результант $P(x, y)$, $Q(x, y)$ является многочленом 106 порядка с большими коэффициентами. Версия REDUCE 3.4 позволяет разложить $R(x)$ на множители:

$$R(x) = 19674272225520000000x^3(x^2 - 7)^4(x^3 + 63x^2 - 9x - 7)^6S_2(x).$$

Последний множитель является многочленом 77 порядка:

$$\begin{aligned} & 2159095979520000x^{77} + 2361673478001715200x^{76} + \\ & + 1042443717193867707648x^{75} + 214162150131413280117504x^{74} + \\ & + 7998830135790642471954384x^{73} - 6246055354757651487946051992x^{72} - \\ & - 1588979336013492891100770790149x^{71} + \dots + \\ & + 237762757389338487499289208122297361908147179915984266004934853326 \times \\ & \times x^{37} - \dots - 2809985398043025932557940986558603263157645788512256x^3 - \\ & - 151380511694613488783219094629551828483053407174656x^2 - \\ & - 4950216772592684585809615764644890919916326092800x - \\ & - 74641296172716523877555595692671815028572160000. \end{aligned}$$

Характеристические уравнения не имеют нулевых решений. Так что нас интересуют $0 < |x| \leq 1$. Многочлен $x^3 + 63x^2 - 9x - 7$ имеет два таких корня:

$$x = -0.269929504265927, \quad x = 0.410712311103496.$$

Многочлен $S_2(x)$ имеет 37 ненулевых корней, меньших по модулю единицы:

$$\begin{aligned} x &= -0.360803174177911 \pm 0.721146281684657i, \\ x &= -0.347553300546285 \pm 0.0238795868845647i, \\ x &= -0.317320296033016 \pm 0.596043186029235i, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &= -0.296523864681695 \pm 0.003397145694083i, \\ x &= -0.211303289995534 \pm 0.039131565051551i, \\ x &= -0.185986308585818 \pm 0.164624212680923i, \\ x &= -0.185316592811757 \pm 0.012948376618457i, \\ x &= -0.180579077019511 \pm 0.054173580347115i, \\ x &= -0.157776974885849 \pm 0.085541952147992i, \\ x &= -0.155860468813153 \pm 0.042614044372741i, \\ x &= -0.131777282497495 \pm 0.047776562586862i, \\ x &= -0.024960293592013 \pm 0.171609858115577i, \\ x &= +0.030663424300404 \pm 0.505814742088412i, \\ x &= +0.304649160271859 \pm 0.609173005019248i, \\ x &= +0.373169581861516 \pm 0.063450203291174i, \\ x &= 0.241132677068413, x = 0.417550457853634, x = 0.499083049968596, \\ x &= +0.454615646591345 \pm 0.005496642569081i, \\ x &= +0.699324410607308 \pm 0.064889427299874i, \end{aligned}$$

Итак, $R(x) = 0$ имеет 39 решений $x \neq 0$, меньших по модулю единицы. По x вычисляем z (см.(6.2)). Оставляем x , которым отвечают $|z| \geq 1 - \epsilon$. Для каждого из оставшихся x решаем уравнение $P(x, y) = 0$, (см. (6.3)), которое имеет шестой порядок по y . Отбираем $y \neq 0, |y| \leq 1$. Используя (6.1), находим $\hat{x}1, \hat{x}1$. После этого отфильтровываем $[z, x1, \hat{x}1, x, y]$, удовлетворяющие критерию (5.1) и неравенствам $|x1| \leq 2, |\hat{x}1| \leq 2$. Первый этап отделения "ложных точек спектра" закончен. Остаётся всего три элемента $[z, x1, \hat{x}1, x, y]$, подлежащих дальнейшему исследованию:

ZROOTS={ [1.0370381621219, 1.46132552723516, 1.05246335761816,
0.417550457853634, 0.158337807785756],
[1, 1.4107123111035, 1.17793091226657, 0.410712311103496,
0.177930912266573],
[1, 0.730070495734075, 1.17793091226657, -0.269929504265927,
0.177930912266574]}.

Как уже говорилось в §5, на втором этапе для каждого из оставшихся z решаются характеристические уравнения $P_1(z, \kappa) = 0, P_2(z, \hat{\kappa}) = 0$. Отбираются решения, меньшие или равные по модулю единицы, $\kappa_1, \kappa_2, \hat{\kappa}_1, \hat{\kappa}_2$, и проверяются неравенства (5.2) - ётивость $\kappa_1 + \kappa_2, \hat{\kappa}_1 + \hat{\kappa}_2$ к соответствующим x_1, \hat{x}_1 . Элементами нижеследующего массива являются

$[z, \kappa_1 + \kappa_2, \kappa_1 \times \kappa_2, \kappa_1, \kappa_2, \hat{\kappa}_1 + \hat{\kappa}_2, \hat{\kappa}_1 \times \hat{\kappa}_2, \hat{\kappa}_1, \hat{\kappa}_2] :$

SV =

{ [1.0370381621219, 0.124332351619517, -0.103354220962079, -0.265276726658578,
0.389609078278095, 1.05246335761816, 0.158337807785756, 0.181874346962542,
0.870589010655618],
[1, 0.140782806837569, -0.11086337053208, -0.269929504265927,
0.410712311103496, 1.17793091226657, 0.177930912266574, 1,
0.177930912266574],
[1, 0.140782806837569, -0.11086337053208, -0.269929504265927,
0.410712311103496, 1.17793091226657, 0.177930912266574, 1,
0.177930912266574]}.

Второй и третий элементы массива SV, отвечающие $z = 1$, естественно совпадают. Но $\kappa_1 + \kappa_2 = 0.140 \dots$ очевидно не равно значениям x_1 во втором и третьем элементах ZROOTS: $x_1 = 1.4107 \dots, \hat{x}_1 = 0.730 \dots$. Аналогично, в первом элементе массива SV на втором месте стоит $\kappa_1 + \kappa_2 = 0.124 \dots$, что не равно $x_1 = 1.461 \dots$ первого элемента массива ZROOTS. Этим элементам отвечает одно и то же $z = 1.037 \dots$. В результате установлено, что при рассматриваемых значениях параметров схема Русанова с дополнительными граничными и стыковочными условиями не имеет точек спектра вне и на границе единичного круга. Задача Коши устойчива в L_2 и в C на соответствующих однородных сетках ($\alpha = 1/2, \hat{\alpha} = -1/4, \omega = 2$). Отсюда следует устойчивость рассматриваемой задачи на неоднородной сетке в L_2 и в C (см. [4], [10]). В конце работы программы выдаётся диагностика: $sp := \{ \}; \quad result := stability.$

§7. Случай $\alpha = 1/2, \omega = 2, N_1 = 2, N_2 = 1, \phi = 1/2,$
 $\beta_1 = 1/2, \beta_2 = 1/4, int = 1$

В отличие от §6 здесь используется линейная интерполяция, $int=1$. Остальные параметры сохранили старые значения. При этом $x_1, \hat{x}_1, z, P(x, y)$, естественно, определяются теми же формулами, (см. (6.1)-(6.3)). Из детерминантного уравнения получаем

$$Q(x, y) = 625x^{15}y^3 - 1375x^{15}y + 130975x^{14}y^3 + 77075x^{14}y^2 - 431395x^{14}y - 62315x^{14} + 8177875x^{13}y^3 + 8527590x^{13}y^2 - 34661041x^{13}y - 6280230x^{13} + 72421250x^{12}y^3 + 154150090x^{12}y^2 - 522157226x^{12}y - 67482250x^{12} - 5822738725x^{11}y^3 - 5362682630x^{11}y^2 + 22704729007x^{11}y + 4389825110x^{11} - 42876114775x^{10}y^3 + 8952380085x^{10}y^2 + 100733158171x^{10}y - 24491131005x^{10} + 1189397427225x^9y^3 + 71632155620x^9y^2 - 2752591117983x^9y - 55831060340x^9 + 120856728300x^8y^3 - 1042562940x^8y^2 - 299650459164x^8y + 27573685260x^8 - 172887832425x^7y^3 - 244543122180x^7y^2 + 851365571007x^7y + 185352122340x^7 - 37418530975x^6y^3 - 499329851475x^6y^2 + 112457777635x^6y + 1075962362475x^6 - 20426790475x^5y^3 + 18057565750x^5y^2 +$$

$$55052835985x^5y - 47298829270x^5 - 1824914350x^4y^3 + 104787072810x^4y^2 + 127245550726x^4y - 322793317770x^4 + 2428191325x^3y^3 + 19084324490x^3y^2 - 12842735311x^3y - 36369795770x^3 + 454209175x^2y^3 - 3257112565x^2y^2 - 23861855899x^2y + 24282669565x^2 + 20588575xy^3 - 1581202560xy^2 - 3281112961xy + 5901273840x - 164708600y^2 + 362358920.$$

Результант многочленов $P(x, y)$, $Q(x, y)$ является многочленом 105 порядка:

$$R(x) = 1229642014095000000x^3(x^2 - 7)^5(x^3 + 63x^2 - 9x - 7)^6S_1(x).$$

Последний множитель является многочленом 74 порядка, который имеет внутри единичного круга 41 ненулевой корень. Всего $R(x) = 0$ имеет 43 ненулевых решения, меньших по модулю единицы. После первого отделения "ложных точек спектра" остаётся два элемента $[z, x1, \hat{x}1, x, y]$:

$$ZROOTS = \{[1, 1.4107123111035, 1.17793091226657,$$

$$0.410712311103496, 0.177930912266573],$$

$$[1, 0.730070495734075, 1.17793091226657, -0.269929504265927,$$

$$0.177930912266574]\}.$$

В обоих элементах $z = 1$. Как уже говорилось в предыдущем параграфе, $z = 1$ отвечает $\kappa_1 + \kappa_2 = 0.1407\dots$, что не равно значениям $x1$ в первом и втором элементах массива $ZROOTS$: $x1 = 1.4107\dots, x1 = 0.73007\dots$. При $\alpha = 1/2, \omega = 2, z = 1$ характеристическое уравнение $P_1(z, \kappa) = 0$ имеет такие решения:

$$\kappa_1 = 0.410712\dots, \kappa_2 = -0.269929\dots, \kappa_3 = 1, \kappa_4 = -63.1407\dots$$

(Заметим, что при $\alpha = 1/2, \omega = 2, z = 1.001$ характеристическое уравнение $P_1(z, \kappa) = 0$ имеет решения:

$$\kappa_1 = 0.41007\dots, \kappa_2 = -0.2698\dots, \kappa_3 = 1.0019\dots, \kappa_4 = -63.1422\dots)$$

Отсюда видно, что полученные в обоих случаях $x1 \neq \kappa_1 + \kappa_2$ на самом деле являются суммами: $1.4107\dots = \kappa_1 + \kappa_3, 0.73007\dots = \kappa_2 + \kappa_3$. В результате и в случае линейной интерполяции доказана устойчивость рассматриваемой задачи в L_2 и в C .

Приношу благодарность Н.С.Бахвалову за поддержку проводимых исследований. Приношу благодарность Antony C. Hearn и всем участникам REDUCE-FORUM, помогавшим мне в решении громоздких многочленов. Приношу особую благодарность Stan Kameny, любезно приславшему мне специальный пакет, ускоряющий процесс решения. Приношу благодарность А.М.Рапортиренко и В.А.Ростовцева за полезные консультации.

Исследование, описанное в этой публикации, стало возможным, в частности, благодаря грантам № NKC000 и № NKC300 Международного научного фонда и Российского правительства.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Berger M.J. Stability of interfaces with mesh refinement//Math. Comp. 1985. V.45, P. 301.
2. Starius G. On composite mesh difference methods for hyperbolic differential equations//Numer. Math. 1980. V.35, P.241.
3. Thune' M. Stability of difference approximations of hyperbolic systems on substructured domains//Report 106, Department of Scientific Computing, Uppsala University, 1986.
4. Kreiss H.-O. Stability theory for mixed initial boundary value problems// Math. Comp. 1968. V.22, No.104. P. 703.
5. Gustafsson B., Kreiss H.-O. and Sundström. Stability theory of difference approximations for mixed initial boundary value problems. II// Math. Comp. 1972. V.26, No.119. P. 649
6. Rusanov V.V. Difference scheme of third-order accuracy for "across"-

- computation discontinuous solutions//Fluid Dynam. Trans. 1969. V.4. P. 285.
7. Rusanov V.V. On difference schemes of third order accuracy for nonlinear hyperbolic systems//Jour. of Comp. Phys. 1970. V.5. No.3, P.507.
 8. Hearn A.C. REDUCE User's Manuel. Version 3.4: Rand Publication. 1991. CP78 (Rev.7/91).
 9. Kurt Otto and Michael Thuné. Stability of a Runge-Kutta method for the Euler equations on a substracted domain//SIAM J. Sci. Stat. Comput. 1989. V.10, No.1. P.154.
 10. Сердюкова С.И. Схема Русанова. Исследование устойчивости в равномерной метрике. Асимптотика в окрестности изолированного разрыва// Сообщение ОИЯИ, P5-10708, Дубна, 1977.
 11. Serdyukova S.I. Algebraic problem of studing difference boundary value problems stability on PC// Preprint JINR, E5-94-485, Dubna, 1994.
 12. Мазела Н.Е., Сердюкова С.И. Исследование устойчивости одной разностной краевой задачи с применением системы аналитических вычислений// Известия вузов. Математика. 1985. N 10(281). С. 55.
 13. Сердюкова С.И. Об устойчивости в C разностных краевых задач// Вычислительные процессы и системы. Вып. 8/Под ред. Г.И.Марчука -М.: Наука. 1991. С. 292.

Рукопись поступила в издательский отдел
27 апреля 1995 года.