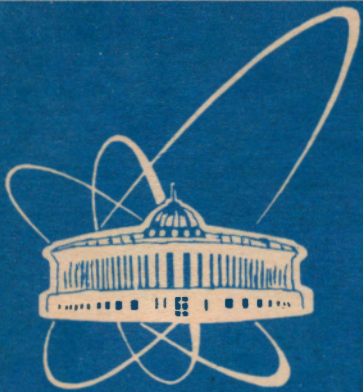


95-12



СООБЩЕНИЯ  
ОБЪЕДИНЕННОГО  
ИНСТИТУТА  
ЯДЕРНЫХ  
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

P5-95-12

Е.В.Ивашкевич

О КОРРЕЛЯЦИОННЫХ ФУНКЦИЯХ  
В МОДЕЛИ ВЕТВЯЩИХСЯ ПОЛИМЕРОВ

1995

# 1. Введение

Проблема ветвящихся полимеров или покрывающих деревьев на решетке хорошо известна в статистической физике. Как было показано Кирхгофом более ста лет тому назад [1], проблема покрывающих деревьев связана с задачей о вычислении сопротивлений между двумя произвольными узлами цепи резисторов. Далее Фортун и Кастеллини показали, что эти проблемы соответствуют пределу  $q \rightarrow 0$  модели Поттса [2, 3]. Недавно модель ветвящихся полимеров нашла новое приложение к абелевой модели самоорганизованной критичности [4, 5]. В применении к этой модели теорема Кирхгофа представляет собой мощное, и на сегодняшний день единственное, средство получения точных результатов [6-14].

Однако модель ветвящихся полимеров несмотря на долгую историю имеет и свои внутренние не решенные до сих пор проблемы. Это проблема предшественников на корневом дереве, проблема вычисления фрактальной размерности химического пути на решетке с  $d > 2$  и т.д. Одной из таких проблем является также вопрос о наличии логарифмических поправок к асимптотикам корреляторов в этой модели. Его история такова. В работе [15] Х.Салёр и Б.Дюплантье начали изучение критических показателей полимерных корреляторов такого типа, как показано на рис.1.

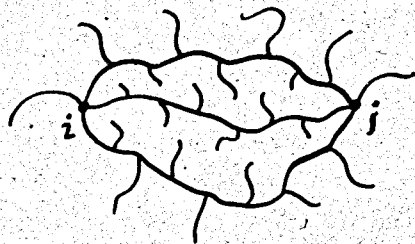


Рис.1

Используя технику кулоновского газа в применении к  $q$ -компонентной модели Поттса, они нашли, что асимптотики этих корреляторов имеют степенной вид с критическими индексами

$$x_k = \frac{1}{8} g k^2 - \frac{(4-g)^2}{8g}, \quad (1)$$

где  $g$  константа, связанная с компонентностью  $q$  модели Поттса следующим соотношением:

$$q = 2 + 2 \cos(\pi g/2), \quad g \in [2, 4], \quad (2)$$

а  $k$  — число полимеров в пучке (на рис.1  $k$  равно 3) В пределе  $q \rightarrow 0$  (что соответствует фазе, в которой полимеры плотно покрывают всю решетку) мы имеем  $g \rightarrow 2$  и

$$x_k = \frac{k^2 - 1}{4}. \quad (3)$$

Однако позже, изучая эту же проблему с точки зрения конформной теории поля, Х.Салёр [16] обнаружил, что эта теория допускает наличие логарифмических поправок к корреляторам в этой модели. Недавно В.Гурарий [17] показал, что наличие логарифмических поправок вообще является неотъемлемым свойством конформной теории поля с центральным зарядом  $c = -2$ .

В данной работе, пользуясь теоремой Кирхгофа, мы точно вычисляем некоторые из корреляторов и тем самым раскрываем причины возникновения логарифмических поправок.

## 2. 0-компонентная модель Поттса

Здесь мы кратко опишем предельный переход  $q \rightarrow 0$  в модели Поттса, следуя в основном работе [2]. Гамильтониан модели Поттса можно записать в виде

$$H = \sum_{e \in E} J_e (1 - \delta(\sigma_e, \sigma'_e)), \quad (4)$$

где суммирование проводится по всем ребрам решетки  $e$ , а  $\sigma_e$  и  $\sigma'_e$  — спиновые переменные в узлах, смежных данному ребру  $e$ . Статистическая сумма этой модели

$$Z(\{J\}, q) = \sum_{\{\sigma\}} \exp\{-\beta H(\sigma)\} \quad (5)$$

может быть представлена в виде [2]:

$$Z(\{a\}, q) = \sum_{C \subseteq E} a^C b^{E-C} q^{\gamma(C)}, \quad a_e = \exp(-2\beta J_e), \quad b_e = 1 - a_e. \quad (6)$$

Здесь суммирование проводится по всем подмножествам множества  $E$  ребер решетки,  $\gamma(C)$  — число связанных компонент в подмножестве  $C$ . Это представление статистической суммы часто называют кластерной моделью. Для того чтобы совершить предельный переход  $q \rightarrow 0$  в данной статистической сумме, введем следующие формальные переменные:

$$a_e = \frac{\kappa S_e}{1 + \kappa S_e}, \quad b_e = \frac{1}{1 + \kappa S_e}, \quad \kappa = \sqrt{q}. \quad (7)$$

Тогда статистическая сумма переписывается следующим образом:

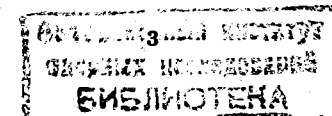
$$Z(\{S\}, \kappa) = \frac{\kappa^{|V|+1}}{(1 + \kappa S)^E} \sum_{C \subseteq E} S^C \kappa^{\omega(C) + \gamma(C) - 1}, \quad (8)$$

где  $|V|$  — полное число вершин на решетке,  $\omega(C)$  — число замкнутых циклов в подмножестве ребер  $C$ . При этом мы воспользовались соотношением Эйлера:

$$\omega(C) + |V| = \gamma(C) + |C|, \quad (9)$$

где  $|C|$  — число ребер в подмножестве  $C$ .

Перепишем её как ряд по степеням  $\kappa$ , опустив для простоты множитель перед знаком суммы:



$$Z(\{S\}, \kappa) \sim \sum_{\substack{\omega(C)+\gamma(C)=1 \\ C \subseteq E}} S^C + \kappa \sum_{\substack{\omega(C)+\gamma(C)=2 \\ C \subseteq E}} S^C + \kappa^2 \sum_{\substack{\omega(C)+\gamma(C)=3 \\ C \subseteq E}} S^C + \dots, \quad (10)$$

и рассмотрим подробнее каждый член этого ряда. Первый из них соответствует таким подмножествам  $C$  ребер на решетке, для которых  $\omega(C) + \gamma(C) = 1$ . Это возможно, только если число циклов в этой конфигурации ребер  $\omega(C) = 0$ , а число связанных компонент  $\gamma(C) = 1$ , т.е. первый член этого ряда соответствует сумме по всем покрывающим деревьям на решетке. Во втором члене ряда (10) суммирование проводится по конфигурациям, для которых  $\omega(C) + \gamma(C) = 2$ . Здесь возможны два случая:  $\omega(C) = 0, \gamma(C) = 2$  и  $\omega(C) = 1, \gamma(C) = 1$ . Первый соответствует двукомпонентным деревьям, а второй — покрывающим деревьям, содержащим один цикл. Интересно заметить, что дуальным преобразованием первые из этих конфигураций переходят во вторые и наоборот. Аналогично можно рассмотреть и другие члены этого ряда.

В пределе  $q \rightarrow 0$  мы делаем все члены этого ряда исчезающе малыми на фоне первого. Именно поэтому говорят, что модель покрывающих деревьев соответствует пределу  $q \rightarrow 0$  модели Поттса.

Ситуация, однако, может сильно измениться, если мы интересуемся не вычислением статистической суммы, а вычислением средних по основному состоянию от операторов различных физических величин. При этом может оказаться, что значение операторов на конфигурациях, соответствующих первым членам ряда (10), тождественно равно нулю, и тогда основной вклад будет давать не первый, а какой-то более высокий член ряда.

Рассмотрим для примера среднее от оператора  $1 - \delta(\sigma_i, \sigma_j)$  в модели Поттса. Этот оператор равен 1, если спины  $\sigma_i$  и  $\sigma_j$  принимают разные значения, и 0, если они совпадают. В терминах кластерной модели этот оператор совпадает с индикатором  $\delta_{ij}$  так, что точки  $i$  и  $j$  принадлежат разным компонентам связности. Поэтому на всех конфигурациях, состоящих только из одной компоненты связности (в том числе и на покрывающих деревьях), этот индикатор тождественно равен нулю. Это означает, что, хотя статистическая сумма 0-компонентной модели Поттса действительно пропорциональна числу покрывающих деревьев на решетке, для вычисления средних от операторов в этой модели может оказаться необходимым рассмотрение конфигураций более сложных, чем просто покрывающие деревья. Именно это обстоятельство, как мы увидим в дальнейшем, приводит к возникновению логарифмов в корреляционных функциях.

Прежде чем перейти к вычислению корреляционных функций, введенных Х.Саллером и Б.Дюплантье, мы сформулируем теорему Кирхгофа и кратко напомним как с её помощью можно вычислять локальные древообразные диаграммы.

### 3. Теорема Кирхгофа и её обобщение

Для того чтобы сформулировать теорему Кирхгофа, мы напомним некоторые определения из теории графов.

- 1) Связный подграф графа  $\mathcal{L}$ , который содержит все его точки и не имеет циклов, называется *покрывающим деревом*.

- 2) Покрывающее дерево с одной отмеченной точкой (*корнем*), отличающейся таким образом от всех остальных точек решетки только этим фактом, называется *корневым покрывающим деревом*.

- 3) Поскольку корневое покрывающее дерево является связным графом и не имеет циклов, то существует единственный путь, ведущий из любого узла решетки к корню, который проходит только по этому дереву. Поэтому мы можем *ориентировать* этот путь, поместив на все связи стрелки, направленные к корню.

*Теорема Кирхгофа.* Если любому ребру графа  $\mathcal{L}$  с прилежащими точками  $i$  и  $j$ , отличными от корня дерева, приписать вес  $S_{ij}$ , то детерминант матрицы

$$\Delta_{ij}(\{S\}) = \begin{cases} \sum_k S_{ik} & , & i = j \\ -S_{ij} & , & i \text{ и } j \text{ ближайшие соседи} \\ 0 & , & \text{в остальных случаях} \end{cases} \quad (11)$$

будет производящей функцией корневых покрывающих деревьев на решетке. В частности, когда все  $S_{ij} = 1$  для любых точек  $i$  и  $j$ , эта матрица совпадает с матрицей дискретного лапласиана и её детерминант дает полное число корневых покрывающих деревьев.

Доказательство этой теоремы можно найти в любом стандартном учебнике по теории графов, например [19].

Теорема Кирхгофа представляет собой эффективное средство для вычисления локальных древесных диаграмм. Хотя метод её использования далеко не нов, стоит кратко напомнить его основные идеи.

Любое изменение весов конечного числа связей на решетке называется локальным дефектом. Например, удаление или, наоборот, введение дополнительных ребер в решетку может рассматриваться как соответствующий локальный дефект. Разность между дискретным лапласианом на новой решетке  $\Delta'$  и дискретным лапласианом на старой решетке  $\Delta$  называется матрицей дефекта  $\delta$ . Условие локальности означает, что только конечное число строк и столбцов этой матрицы содержит ненулевые элементы.

Другое важное понятие, которое необходимо для дальнейшего изложения, это понятие локальной древесной диаграммы. Мы определяем её как набор черных и белых стрелок на ребрах решетки. Любое ориентированное покрывающее дерево, проходящее через все черные стрелки, но не проходящее через белые, называется совместимым с данной локальной диаграммой. Для того чтобы найти полное число покрывающих деревьев, совместимых с данной диаграммой, мы должны построить по заданной локальной диаграмме соответствующую матрицу дефекта. Поступим следующим образом: приравняем веса ребер с белыми стрелками нулю, а веса ребер с черными стрелками —  $\epsilon$ . Тогда, согласно теореме Кирхгофа, коэффициент при старшем члене полинома  $\det \Delta'(\epsilon)$  как раз равен интересующему нас числу. Таким образом, отношение числа покрывающих деревьев, совместимых с данной диаграммой, и числа всех деревьев на решетке  $\mathcal{L}$  дается следующим легко вычисляемым детерминантом:

$$Prob(\delta) = \lim_{\epsilon \rightarrow \infty} \frac{\det \Delta'}{\epsilon^n \det \Delta} = \lim_{\epsilon \rightarrow \infty} \det(1 + G\delta)/\epsilon^n, \quad (12)$$

где  $n$  — число черных стрелок на диаграмме,  $\mathbf{1}$  — единичная матрица, а  $G = \Delta^{-1}$  — решеточная функция Грина, которая зависит от граничной задачи для лапласиана. Если подразумевается бесконечно удаленная открытая граница, то гриновская функция имеет следующее интегральное представление:

$$G(n, m) - G(0, 0) = \frac{1}{8\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos n\beta \cos m\alpha - 1}{2 - \cos \beta - \cos \alpha} d\alpha d\beta \quad (13)$$

Как показал В.Б.Приезжев [18], теорема Кирхгофа допускает естественное обобщение. Оказывается, что если в матрице  $\Delta$  на место диагональных элементов записать произвольные веса вершин  $V_{ij}$ , то детерминант новой матрицы

$$\Delta_{ij}(\{V\}, \{S\}) = \begin{cases} V_i & , & i = j \\ -S_{ij} & , & i \text{ и } j \text{ ближайшие соседи} \\ 0 & , & \text{в остальных случаях} \end{cases} \quad (14)$$

является производящей функцией циклов на решетке, причем каждый цикл имеет вес  $-1$ . Если же веса вершин

$$V_i = \sum_{k \neq i} S_{ik} \quad (15)$$

то при разложении детерминанта произведение этих вершинных весов дает все возможные конфигурации ребер, плотно покрывающих решетку. Остальные же члены этого разложения последовательно исключают все циклы, оставляя только ациклические, т.е. древесные конфигурации.

Это, в принципе, дает возможность использовать формулу (12) также для перечисления конфигураций, содержащих циклы. При этом, однако, нужно помнить о том, что каждый цикл имеет вес  $-1$  и, следовательно, конфигурации, содержащие четное и нечетное число циклов, будут иметь разные знаки.

Простейший способ перечисления конфигураций, содержащих циклы, при помощи теоремы Кирхгофа заключается в следующем: мы строим матрицу дефекта  $\delta$  таким образом, чтобы в результирующей матрице  $\Delta'$  диагональные элементы не изменились, а веса ребер, через которые должны проходить циклы, изменились на  $\epsilon$ . Тогда формула (12) даст число всех возможных циклов, проходящих по этим ребрам, при условии, что те из них, которые содержат нечетное число циклов, будут входить со знаком "минус".

#### 4. Вычисление корреляционных функций

Теперь мы перейдем к вычислению корреляционных функций, введенных Х.Саллером и Б.Дюплантье. Эти авторы интересовались асимптотическим поведением корреляторов, таких, что две точки  $i$  и  $j$  на расстоянии  $r$  соединены пучком из  $k$  полимеров при  $r \rightarrow \infty$ .

Рассмотрим сначала простейший случай:  $k = 1$ . Усреднение по конфигурациям, представляющим последовательные члены ряда (10), приводит к следующему: поскольку покрывающие деревья соединяют любые две точки решетки, то значение этого коррелятора на конфигурациях, соответствующих первому члену ряда (10),

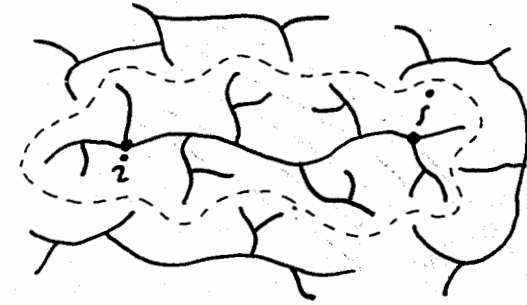


Рис.2

равно 1 и не зависит от расстояния  $r$ . Это, конечно, тривиальный случай. Конфигурации, принадлежащие второму члену этого ряда и дающие нетривиальный результат, — это покрывающие деревья, состоящие из двух компонент связности. Графическое представление коррелятора может выглядеть так, как показано на рис.2.

Пользуясь обобщением теоремы Кирхгофа, мы можем легко пересчитать все такие конфигурации. Для этого добавим в решетку дополнительное ребро и потребуем, чтобы через него обязательно проходил замкнутый цикл так, как это было описано в предыдущем разделе. Матрица дефекта в этом случае имеет простой вид:

$$\delta_{ij} = \begin{matrix} & & i & & j & & \\ & & \vdots & & \vdots & & \\ i & \left( \begin{array}{cccc} \dots & 0 & \dots & \epsilon & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & 0 & \dots & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{array} \right) & & j & & \\ & & \vdots & & \vdots & & \end{matrix} \quad (16)$$

и все остальные элементы этой матрицы равны нулю. Вычисление по формуле (12) дает полное число (со знаком минус) таких конфигураций:

$$Prob(\delta_{ij}) = G_{ij} \sim \ln r, \quad (17)$$

т.е. усреднение по двумерным покрывающим деревьям приводит к появлению логарифмических корреляций. В принципе, усреднение по конфигурациям, представляющим другие члены (10), может привести к появлению степеней логарифма.

Теперь рассмотрим общий случай, когда две точки соединены пучком из  $k$ -полимерных цепочек, где  $k$  — любое нечетное число. В этом случае мы добавим в решетку  $k$  дополнительных ребер (мостов) и потребуем, как и в предыдущем случае, чтобы через них проходили циклы. Оказывается, что если расположить дополнительные ребра так, как показано на рис.3, то по топологическим причинам существует только две возможности обхода этих мостов.

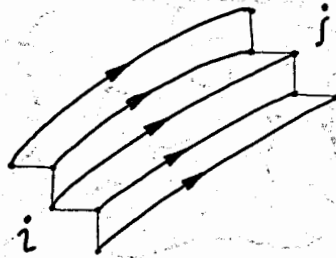


Рис.3

Либо один цикл проходит последовательно по всем  $k$  мостам, либо  $k$  различных циклов проходят каждый по своему мосту. Только в случае, если  $k$  — нечетное число, и те и другие конфигурации возникают с одним и тем же знаком (минус) и, следовательно, формула Кирхгофа (12) действительно дает нам (с точностью до знака) число всех возможных конфигураций, соединяющих точки  $i$  и  $j$  пучком из  $k$  полимерных цепочек. В этом случае мы получаем

$$Prob(\delta_k) \sim r^{-2x_k} \ln r, \quad (18)$$

где  $x_k$  определяется формулой (3).

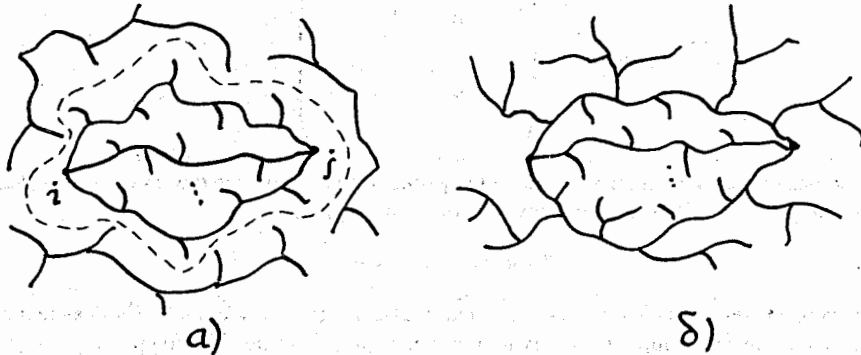


Рис.4

Обратим внимание на тот факт, что поскольку мы интересуемся асимптотическим поведением корреляторов, т.е. фактически переходим к непрерывному пределу, концевые точки дополнительных ребер на рис.3 сливаются в две точки  $i$  и  $j$ . Это озна-

чает, что фактически мы вычислили этот коррелятор на множестве двукомпонентных деревьев (см. рис.4а). Аналогичное вычисление можно проделать и для однокомпонентных деревьев (см. рис.4б). Дело в том, что в формуле (12) до некоторой степени можно управлять компонентностью через граничные условия на гриновскую функцию. Не останавливаясь на деталях вычислений, скажем лишь, что в этом случае получается формула, аналогичная (18), но без логарифмического члена.

Обратим также внимание на то, что критический показатель  $x_k = (k^2 - 1)/4$  в (18) вычислен чисто аналитически без использования метода ренормгруппы, необходимого в технике кулоновского газа. При этом существенную роль играет нечетность числа  $k$ . Для четных  $k$  представление корреляторов через матрицу дефектов невозможно по топологическим причинам.

Итак, получается, что независимо от того, по каким конфигурациям из ряда (10) проводится усреднение, мы всегда будем иметь один и тот же критический показатель для  $k$ -полимерных корреляторов, совпадающий с критическими показателями, полученными Х.Салёром и Б.Дюплантье. Однако только усреднение по однокомпонентным конфигурациям приводит к чисто степенной асимптотике. Усреднение же по конфигурациям, содержащим две и более компоненты связности, приводит к появлению логарифмических поправок.

В заключение хотелось бы выразить признательность В.Б.Приезжееву за многочисленные советы и плодотворные обсуждения.

## References

- [1] G. Kirchhoff *Ann. Phys. Chem.* **72** (1847) 497
- [2] C. M. Fortuin and P. W. Kasteleyn *Physica* **57** (1972) 536
- [3] F. Y. Wu *Rev. Mod. Phys.* **54** (1982) 235
- [4] P. Bak, C. Tang and K. Wiesenfeld *Phys. Rev. Lett.* **59** (1987) 381
- [5] P. Bak, C. Tang and K. Wiesenfeld *Phys. Rev.* **38A** (1988) 364
- [6] D. Dhar and S. N. Majumdar *J. Phys. A: Math. Gen.* **23** (1990) 433
- [7] D. Dhar *Phys. Rev. Lett.* **64** (1990) 1613
- [8] S. N. Majumdar and D. Dhar *J. Phys. A: Math. Gen.* **24** (1991) L357
- [9] S. N. Majumdar and D. Dhar *Physica* **185A** (1992) 129
- [10] V. B. Priezzhev *J. Stat. Phys.* **74** (1994) 955
- [11] J. G. Brankov, E. V. Ivashkevich and V. B. Priezzhev *J. Phys. I France* **3** (1993) 1729
- [12] E. V. Ivashkevich *J. Phys. A: Math. Gen.* **27** (1994) 3643
- [13] E. V. Ivashkevich, D. V. Ktitarev and V. B. Priezzhev *Physica* **209A** (1994) 347
- [14] E. V. Ivashkevich, D. V. Ktitarev and V. B. Priezzhev *J. Phys. A: Math. Gen.* **27** (1994) L585
- [15] H. Saleur and B. Duplantier *Phys. Rev. Lett.* **58** (1987) 2325
- [16] H. Saleur *Nucl. Phys.* **B382** (1992) 486; *Nucl. Phys.* **B382** (1992) 532
- [17] V. Gurarie *Nucl. Phys.* **B410** (1993) 535
- [18] V. B. Priezzhev *Usp. Fiz. Nauk* **147** (1985) 747
- [19] F. Harary *Graph Theory* (Reading, 1969, MA: Addison Wesley)

Рукопись поступила в издательский отдел  
18 января 1995 года.

Ивашкевич Е.В.

P5-95-12

О корреляционных функциях в модели ветвящихся полимеров

В работе точно вычислены некоторые корреляторы в модели ветвящихся полимеров. Конформная теория поля с зарядом  $c = -2$  предсказывает критические индексы для этой модели, одновременно допуская наличие логарифмических поправок к степенному закону убывания корреляционных функций. В то же время, результаты, полученные на основе ренормгрупповых соображений и техники кулоновского газа, дают чисто степенной характер асимптотик. Нам удалось точно вычислить некоторые корреляторы в этой модели и объяснить причины возникновения логарифмических поправок.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики им. Н.Н.Боголюбова ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна, 1995

Перевод автора

Ivashkevich E.V.

P5-95-12

On Correlation Functions in a Model of Branching Polymers

Some correlation functions in the model of branching polymers are calculated exactly. Conformal field theory with the central charge  $c = -2$  predicts the possible logarithmic corrections to the power-law correlation functions. But results obtained with the use of coulomb gas technique have pure power-law asymptotics. We calculate analytically some correlators in this model and explain the reason of the appearance of logarithms.

The investigation has been performed at the Bogoliubov Laboratory of Theoretical Physics, JINR.