объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

Р5-94-7

С.И.Сердюкова

ПОСТРОЕНИЕ КВАЗИЖОРДАНОВОЙ НОРМАЛЬНОЙ ФОРМЫ РЕЗОЛЬВЕНТНОЙ МАТРИЦЫ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ РАЗНОСТНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ*

Направлено в "RNAMM"

---

*К 60-летию со дня рождения академика Н.С.Бахвалова

1994

Сердюкова С.И. P5-94-7

Построение квазижордановой нормальной формы резольвентной матрицы для параболических разностных краевых задач

Исследование устойчивости разностных краевых задач связано с построением нормальной формы резольвенты. В предлагаемой работе доказывается теорема существования квазижордановой нормальной формы аналитической резольвентной матрицы в случае, когда собственные значения характеристической матрицы образуют единственный параболический класс. Построенная квазижорданова нормальная форма имеет вид матричного жорданова ящика. Полная факторизация резольвентной матрицы в этом случае невозможна. Разложения по степеням спектрального параметра неизбежно содержат дробные степени. Ранее была доказана теорема существования квазижордановой нормальной формы резольвентной матрицы для гиперболических систем. Рассматриваемый здесь тонкий аналитический случай до конца решает проблему построения нормальной формы резольвенты для линейных разностных краевых задач общего вида.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна, 1994

Serdyukova S.I. P5-94-7

Construction of Quasi-Jordan Normal Form of Resolvent Matrix for Parabolic Difference Initial Boundary Value Problems

The stability investigation of difference initial boundary value problems is connected with construction of a normal form of the resolvent. In this work we prove theorem of existence of quasi-Jordan normal form of analytic resolvent matrix for the case when the eigenvalues of the characteristic matrix form the unique parabolic class. The constructed quasi-Jordan normal form has view of matrix Jordan box. The complete factorization of the resolvent matrix is impossible in this case. The expansions by spectral parameter contain fractional powers unavoidably. Formerly we had proved the theorem of existence of quasi-Jordan normal form of the resolvent matrix for hyperbolic systems. The considered here complicated analytic case solves the problem of the normal form of the resolvent for linear difference initial boundary value problems of general type to the bottom.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna, 1994

Учителю с любовью

В работе [3] приведены необходимые и достаточные условия устойчивости в C полубесконечных краевых задач для систем линейных разностных уравнений общего вида. Если соответствующая задача Коши устойчива в C [4] и оператор перехода от слоя к слою G не имеет точек спектра вне единичного круга, то необходимые и достаточные условия устойчивости краевой задачи сводятся к ограничениям на порядки особенностей резольвенты $(G-zI)^{-1}$ в точках спектра, расположенных на единичной окружности [3]. При построении резольвенты [2] резольвентная матрица $M(e^{i\psi})$ приводится к простому квазижорданову нормальному виду [3]. В [6] была доказана теорема существования квазижордановой нормальной формы резольвентной матрицы для гиперболических систем. Речь идет о системах линейных разностных уравнений с постоянными коэффициентами, у которых все собственные значения характеристической матрицы $D(e^{i\phi})$ относительно всех определяющих точек имеют наклонные характеристики. В этом случае квазижорданова нормальная форма резольвентной матрицы имеет ту же структуру, что и квазижорданова нормальная форма характеристической матрицы [5]. При построении квазижордановой нормальной формы в случае гиперболических систем резольвентная матрица полностью факторизуется, все разложения по степеням спектрального параметра $z = e^{i\psi}$ содержат только целые степени. В случае систем общего вида собственные значения характеристической матрицы могут иметь вертикальные характеристики. При наличии таких собственных значений (мы их называем параболическими) квазижорданова нормальная форма резольвентной матрицы имеет более сложную структуру.

В предлагаемой работе доказывается теорема существования квазижордановой нормальной формы резольвентной матрицы для случая, когда все собственные значения характеристической матрицы образуют единственный параболический класс. Доказывается, что в этом случае квазижорданова нормальная форма резольвентной матрицы имеет вид матричного жорданова ящика. В отличие от гиперболических систем здесь невозможна полная факторизация резольвентной матрицы. Разложения по степеням спектрального параметра содержат дробные степени. Доказательство конструктивное: базис, в котором резольвентная матрица высокого порядка $r * k$ имеет квазижорданову нормальную форму, строится из соответствующего базиса для характеристической матрицы порядка k. Доказанная здесь теорема существования квазижордановой нормальной формы для тонкого аналитического случая до конца решает проблему построения резольвенты оператора перехода от слоя к слою для линейных разностных краевых задач общего вида. Дальнейший порядок изложения таков.

В параграфе 1 строится примитивный вспомогательный базис, в котором резольвентная матрица имеет вид матричного жорданова ящика с искажениями $\tilde{M}$.

В параграфе 2 доказывается принципиально важный результат (*Лемма 2.1*): левый нижний блок матрицы $\tilde{M}$является нильпотентом.

В параграфе 3 доказывается основная Теорема 3.1. Исходный примитивный базис последовательно подправляется, шаг за шагом $\tilde{M}$ освобождается от искажений. В результате получается квазижорданова нормальная форма резольвентной матрицы, которая в рассматриваемом случае имеет вид матричного жорданова ящика.

В этой работе используются определения и обозначения работы [3].

1.Структура резольвентной матрицы в исходном примитивном базисе

Пусть в окрестности некоторой определяющей точки ϕ_0 собственные значения характеристической матрицы образуют единственный параболический класс Λ. Пусть соответствующее главное значение собственных значений есть

$$\overline{\lambda}(\phi) = exp((i\alpha - \beta)(\phi - \phi_0)^{2\mu}).$$

Далее для простоты обозначений полагаем $\phi_0 = 0, 2\mu = p$. В рассматриваемом случае в окрестности $\phi = 0$ определен базис квазисобственных векторов [5]

$$e_1(\phi), \ldots, e_k(\phi),$$

в котором характеристическая матрица принимает квазижорданову нормальную форму

$$\hat{D}(\phi) = \bar{\lambda}(\phi)(E + \phi^{2\mu}\Delta N + \phi^{2\mu+1}R(\phi)).$$

Справедливы соотношения

$$De_1 = \bar{\lambda}e_1 + \phi^{p+1}\sum_{l=1}^{k} r_{1l}e_l, \tag{1.1}$$

$$De_j = \bar{\lambda}e_j + \Delta\phi^p e_{j-1} + \phi^{p+1}\sum_{l=1}^{k} r_{jl}e_l, \tag{1.2}$$

$$j = 2, \ldots, k.$$

Параболическому классу собственных значений характеристической матрицы Λ отвечают p классов собственных значений резольвентной матрицы K_j, $\quad j = 1, \ldots, p$. Соответствующие главные значения

$$\bar{\kappa}_j(\psi) = exp(i\phi_j(\psi))$$

были определены в [3]. Из этих формул, в частности следует, что

$$\bar{\kappa}_j(\psi) = \epsilon_j\bar{\kappa}_p(\psi), \epsilon_j = exp(2\pi ij/p). \tag{1.3}$$

Чтобы определить примитивный базис, вводим в рассмотрение векторы

$$\mathcal{E}_l^j(\psi) = (\bar{\kappa}_j^{r-1}e_l(\phi_j(\psi)), \ldots, \bar{\kappa}_j e_l(\phi_j(\psi)), e_l(\phi_j(\psi))^T;$$
$$l = 1, \ldots, k; \quad j = 1, \ldots, p; \quad r = r1 + r2.$$

Напомним, что резольвентная матрица имеет порядок $r * k$. Здесь и далее T переводит вектор-строку в вектор-столбец. Примитивный базис определяется соотношениями:

$$E_l^1(\psi) = \mathcal{E}_l^1(\psi); E_l^2(\psi) = d_1(\mathcal{E}_l^1, \mathcal{E}_l^2) = \frac{(\mathcal{E}_l^2(\psi) - \mathcal{E}_l^1(\psi))}{(\kappa_2 - \kappa_1)};$$

$$E_l^3(\psi) = d_2(\mathcal{E}_l^1, \mathcal{E}_l^2, \mathcal{E}_l^3) = \frac{(d_1(\mathcal{E}_l^1, \mathcal{E}_l^3) - d_1(\mathcal{E}_l^1, \mathcal{E}_l^2))}{(\kappa_3 - \kappa_2)}; \ldots;$$

$$E_l^p(\psi) = d_{p-1}(\mathcal{E}_l^1, \mathcal{E}_l^2, \ldots, \mathcal{E}_l^p); \quad l = 1, \ldots, k.$$

После подстановки в (1.1),(1.2)

$$e^{i\phi} = \bar{\kappa}_1(\psi), \quad \phi^{2\mu} = \frac{\psi}{\alpha + i\beta}, \quad \bar{\lambda} = e^{i\psi} = z$$

получаем такие соотношения

$$\sum_{j=-r1}^{r2} A_j \bar{\kappa}_1^j e_1(\phi_1) = z e_1(\phi_1) + \phi_1^{p+1} \sum_{s=1}^{k} r_{1s} e_s(\phi_1),$$

$$\sum_{j=-r1}^{r2} A_j \bar{\kappa}_1^j e_l(\phi_1) = z e_l(\phi_1) + \frac{\Delta}{\alpha + i\beta} \psi e_{l-1}(\phi_1) + \phi_1^{p+1} \sum_{s=1}^{k} r_{ls} e_s(\phi_1),$$

что эквивалентно

$$ME_1^1 = \bar{\kappa}_1 E_1^1 + \psi^{1+(1/p)} \sum_{t=1}^{p} \sum_{s=1}^{k} r_s^{1t}(\psi) E_s^t(\psi), \qquad (1.4)$$

$$ME_l^1 = \bar{\kappa}_1 E_l^1 + \psi \sum_{t=1}^{p} \sum_{s=1}^{k} r_s^{lt}(0) E_s^t(0) + O(\psi^{1+(1/p)}), \qquad (1.5)$$

$$2 \le l \le k.$$

Аналогичные соотношения верны для $\mathcal{E}_l^j$. Отсюда находим

$$ME_l^j = \bar{\kappa}_j E_l^j + E_l^{j-1} + O(\psi^{1-\frac{i-2}{p}}),$$

$$2 \le j \le p, \quad 1 \le l \le k.$$

Другими словами, в примитивном базисе резольвентная матрица имеет вид $\quad M_1(\psi) =$

$$\begin{bmatrix} \bar{\kappa}_1 E + R_{11} & E + R_{12} & \ldots & R_{1,p-1} & R_{1p} \\ R_{21} & \bar{\kappa}_2 E + R_{22} & \ldots & R_{2,p-1} & R_{2p} \\ . & . & \ldots & . & . \\ R_{p-1,1} & R_{p-1,2} & \ldots & \bar{\kappa}_{p-1} E + R_{p-1,p-1} & E + R_{p-1,p} \\ R_{p1} & R_{p2} & \ldots & R_{p-1,p} & \bar{\kappa}_p E + R_{pp} \end{bmatrix}. \qquad (1.6)$$

Здесь R_{ij} -квадратные аналитические матрицы порядка k. Матричные элементы $R_{i1}, 1 \le i \le p$, имеют порядок $O(\psi)$; матричные элементы $R_{ij}, 1 \le i \le p, 2 \le j \le p$, имеют порядок $O(\psi^{1-\frac{i-2}{p}})$. Так что в целом матрица возмущения $R = ||R_{ij}||$ имеет порядок $O(\psi^{\frac{2}{p}})$. Возникает естественное желание привести R к треугольному виду. К сожалению, при этом разрушается структура главного члена, который является готовым матричным жордановым ящиком.

2. Нильпотентность главного члена разложения блока R_{p1}

При доказательстве основной теоремы в параграфе 3 мы последовательно избавляемся от внедиагональных матричных элементов R_{ij}, начиная с первого столбца. При этом существенно используется нильпотентность главного члена разложения блока R_{p1}. Справедлива

Лемма 2.1 Пусть $R_{p1} = \Delta\psi A + O(\psi^{1+\frac{1}{p}})$. Матрица A является нильпотентом.

Доказательство. Обозначим через B постоянную матрицу, приводящую A к жордановой нормальной форме J [1]. Докажем от противного, что все диагональные элементы J нулевые. Так как в разложении ME_1^1 (см. (1.4)) возмущение имеет порядок $O(\psi^{1+\frac{1}{p}})$, первый столбец матрицы A нулевой. Значит на диагонали J есть по крайней мере один нулевой элемент. После дополнительного преобразования подобия

$$T = diag(B, B, \ldots, B)$$

матрица M_1 переходит в M_2. В новом базисе резольвентная матрица имеет ту же структуру, что и в исходном примитивном базисе: главный член просто переходит в себя, а R_{ij} переходят в $BR_{ij}B^{-1}$. Следовательно, их порядки сохраняются и мы оставляем для них старые обозначения. Важно лишь, что теперь $R_{p1} = \Delta\psi J + O(\psi^{1+\frac{1}{p}}), J$ - жорданова матрица. Пусть J имеет ненулевые диагональные элементы $\gamma_1, \ldots, \gamma_m$. Покажем,что это приведет к искажению главных значений $\bar{\kappa}$ собственных значений резольвентной матрицы, κ являются корнями многочлена

$$P(\kappa,\psi)=\prod_{j=1}^{p}(\bar\kappa_j-\kappa+O(\psi^{\frac{2}{p}}))^k+$$

$$\prod_{j=1}^{p}(\bar\kappa_j-\kappa+O(\psi^{\frac{2}{p}}))^{k-m}((\Delta\psi)^m\gamma_1\gamma_2\dots\gamma_m s_{12\dots m}(1+O(\psi^{\frac{1}{p}}))+$$

$$\dots+(\Delta\psi)^2(\gamma_1\gamma_2 s_{12}+\dots+\gamma_{m-1}\gamma_m s_{m-1,m}+O(\psi^{\frac{1}{p}}))\prod_{j=1}^{p}(\bar\kappa_j-\kappa+O(\psi^{\frac{2}{p}}))^{m-2}+$$

$$\Delta\psi(\gamma_1 s_1+\dots+\gamma_m s_m+O(\psi^{\frac{1}{p}}))\prod_{j=1}^{p}(\bar\kappa_j-\kappa+O(\psi^{\frac{2}{p}}))^{m-1})+$$

$$\rho(\kappa,\psi)=\bar P(\kappa,\psi)+\rho(\kappa,\psi).$$

Множители s с индексами равны $+1$ или -1 в зависимости от знака соответствующего слагаемого определителя матрицы $(M_2(\psi)-\kappa E)$. Важно только, что они отличны от нуля. Первое слагаемое $\bar P(\kappa,\psi)$ является произведением всех диагональных элементов. Второе слагаемое является произведением следующих элементов $(M_2(\psi)-\kappa E)$, содержащих ненулевые диагональные элементы порядка $O(\psi),\gamma_j\psi+O(\psi^{1+\frac{1}{p}})$, матрицы R_{p1}. Без ограничения общности можно считать, что γ_l стоит в l-м столбце J. В произведении всех диагональных элементов заменяем диагональные элементы с номерами $l,l+k,\dots,l+(p-1)k$ на элементы с индексами $(l,l+k),(l+k,l+2k),\dots,(l+(p-2)k,l+(p-1)k),(l+(p-1)k,l)$, последний из которых является l–м диагональным элементом матрицы $R_{p1},l\le m$. Остальные являются возмущенными единичными элементами $1+O(\psi^{\frac{2}{p}})$. Таких замен в рассматриваемом слагаемом определителя может быть одна, две и т.д. до m. Соответственно в слагаемом присутствует один, два и т.д. до m множителей, которые являются диагональными элементами матрицы R_{p1} порядка $O(\psi),\gamma_j\psi+O(\psi^{1+\frac{1}{p}})$. Выше уже было замечено,что $m<k$! Напомним,что $\bar\kappa_l(0)=1$. Из дальнейшего будет ясно, что $\bar P(1,\psi)$ содержит главный член разложения $P(1,\psi)$ (в окрестности $\psi=0$) и его порядок есть $O(\psi^k)$. После замены $\kappa=1+t$ имеем

$$\bar\kappa_j-\kappa=(d\psi)_j^{\frac{1}{p}}-t+O(\psi^{\frac{2}{p}}),\quad d=(\alpha i+\beta)^{-1}.$$

Положим

$$\prod_{j=1}^{p}((d\psi)_j^{\frac{1}{p}}-t)=d\psi-t^p=\psi u.$$

Справедливо соотношение:

$$P(\kappa,\psi)=\prod_{j=1}^{p}(\bar\kappa_j-\kappa+O(\psi^{\frac{2}{p}}))^{k-m}(\psi^m Q(u)+\tilde S)+R,$$

$$Q(u)=u^m+(\gamma_1 s_{11}+\dots+\gamma_m s_{1m})u^{m-1}+\dots+\gamma_1\dots\gamma_m s_{1\dots m}=0.$$

Решения $Q(u)$ ненулевые, пусть u_0 одно из них. Ему отвечают искаженные $\tilde\kappa_j=1+((d-u_0)\psi)_j^{\frac{1}{p}}$. Остаточный член $\tilde S(\tilde\kappa_j,\psi)=O(\psi^{m+\frac{1}{p}})$ не может повлиять на главный член асимптотики найденных искаженных собственных значений. Остается показать, что

$$R(\tilde\kappa_j,\psi)=O(\psi^{k+\frac{1}{p}}).$$

Тогда и эта добавка ничего не изменит в главных членах разложения найденных искаженных собственных значений резольвентной матрицы.

Слагаемые определителя, составляющие $R(\tilde\kappa,\psi)$, разбиваем на две группы. В первую группу отнесем слагаемые, содержащие множители (элементы матрицы $(M_2(\psi)-\kappa E)$) порядка $O(1)$. Остальные слагаемые (не попавшие в $\bar P$ и в первую группу) составляют вторую группу. Среди множителей слагаемых второй группы есть хотя бы один порядка $O(\psi^{\frac{2}{p}})$. Напомним, что все внедиагональные элементы матрицы $M_2(\psi)$ либо $O(1)$, либо $O(\psi^{\frac{2}{p}})$. А в рассматриваемом случае есть хотя бы один внедиагональный элемент и он,по определению, не может быть $O(1)$. Остальные множители слагаемых второй группы имеют порядок как минимум $O(\psi^{\frac{1}{p}})$. Всего есть pk множителей. Тем самым доказано, что все слагаемые второй группы есть $O(\psi^{k+\frac{1}{p}})$.

Каждое слагаемое первой группы имеет один или несколько множителей порядка $O(1)$. Выделим среди этих множителей связные цепочки элементов с номерами $(l,l+k),(l+k,l+2k),\dots,(l+(s-1)k,l+sk)$, $s\le(p-1)$ - длина цепочки. Заметим, что если какому-то слагаемому первой группы отвечает несколько связных цепочек, то множества их номеров не перекрываются. В частности, все они имеют разные начала

l и разные концы $l+sk$. В противном случае какой-то элемент матрицы стал бы кратным множителем слагаемого определителя.

Пусть в каком-то слагаемом первой группы есть хотя бы одна связная цепочка длины $s < p-1, l-$ начало этой цепочки. Тогда множителем из $l-$го столбца в рассматриваемом слагаемом может быть взят только внедиагональный элемент и его порядок не ниже $O(\psi^{\frac{s+2}{p}})$. Далее такой элемент $l-$го столбца ($l-$ начало цепочки) называем поддерживающим элементом цепочки. В общем случае поддерживающий элемент цепочки длины s имеет порядок не ниже, чем $O(\psi^{\frac{s+1}{p}})$. Остальные множители рассматриваемого слагаемого определителя, не вошедшие в связные цепочки и не являющиеся элементами поддержки цепочек, имеют порядок не ниже, чем $O(\psi^{\frac{1}{p}})$. Следовательно, если есть хотя бы одна цепочка, длина которой меньше максимальной $p-1$, рассматриваемое слагаемое имеет порядок не ниже, чем $O(\psi^{k+\frac{1}{p}})$.

Остается рассмотреть слагаемые определителя, содержащие связные цепочки только максимальной длины $(p-1)$. Пусть таких цепочек j и начинаются они в строках с номерами $l_1 < l_2 < \ldots < l_j \le k$.

Замечание. Среди соответствующих диагональных элементов матрицы R_{p1} (элементов с номерами $l_1, l_2, \ldots, l_j$) есть хотя бы один порядка $O(\psi^{1+\frac{1}{p}})$. В противном случае рассматриваемое слагаемое определителя было бы отнесено к $\bar{P}(\kappa, \psi)$. Отсюда следует , что произведение диагональных элементов матрицы R_{p1} с номерами $l_1, l_2, \ldots, l_j$ есть $O(\psi^{j+\frac{1}{p}})$.

Поддерживающие элементы полных цепочек есть $O(\psi)$. Следовательно, произведение элементов рассматриваемых полных цепочек и их поддерживающих элементов есть $O(\psi^j)$. Всего в произведении pj элементов. Рассматриваемые полные цепочки кончаются в столбцах с номерами

$$m_1 = l_1 + (p-1)k, \ldots, m_j = l_j + (p-1)k.$$

Множители из строк с номерами $m_1, \ldots, m_j$ рассматриваемого слагаемого определителя не являются диагональными элементами матрицы $(M_2(\psi) - \kappa E)$. Возможны такие случаи. В первом случае множители из строк с номерами $m_1, \ldots, m_j$ принадлежат столбцам с номерами $l_1, l_2, \ldots, l_j$ и значит являются поддерживающими элементами рассматриваемых полных цепочек. Заметим, что они являются элементами матрицы R_{p1}. Так как они из разных строк и разных столбцов,то это

либо диагональные элементы матрицы R_{p1} и тогда их произведение есть $O(\psi^{j+\frac{1}{p}})$. Либо среди них есть хотя бы один, расположенный ниже главной диагонали R_{p1}. Он имеет порядок $O(\psi^{1+\frac{1}{p}})$. Следовательно, в первом случае произведение элементов рассматриваемых полных цепочек и их поддерживающих элементов есть $O(\psi^{j+\frac{1}{p}})$.

Во втором случае в рассматриваемое слагаемое определителя входит $i, 1 \le i \le j$, элементов из строк с номерами $m_1, \ldots, m_j$, которые не принадлежат столбцам с номерами $l_1, l_2, \ldots, l_j$. Каждый из этих элементов есть $O(\psi^{\frac{2}{p}})$. Значит в рассматриваемое слагаемое входит $jp+i$ элементов, произведение которых есть $O(\psi^{j+\frac{2i}{p}})$. Остальные элементы есть $O(\psi^{\frac{1}{p}})$. В целом рассматриваемое произведение pk элементов имеет порядок $O(\psi^{k+\frac{1}{p}})$. В результате доказано от противного, что

$$R_{p1} = \Delta\psi N + O(\psi^{1+\frac{1}{p}}). \tag{2.1}$$

Здесь $N-$ жорданова нильпотентная матрица [1]: первая над главной диагональ состоит из нулей и единиц, остальные элементы нулевые. *Лемма 2.1 доказана.*

3. Построение матричного жорданова ящика

Целью настоящего параграфа является доказательство основной теоремы.

Теорема 3.1. Пусть в окрестности $\phi = 0$ собственные значения λ характеристической матрицы системы разностных уравнений составляют единственный параболический класс с главным значением

$$\bar{\lambda} = exp((\alpha i - \beta)\phi^{2\mu}).$$

Тогда в окрестности $\psi = 0$ существует базис аналитических векторов, в котором резольвентная матрица имеет вид матричного жорданова ящика:

$$\hat{M}(\psi) = \begin{bmatrix} C_1 & E & 0 & \dots & 0 \\ 0 & C_2 & E & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & C_{2\mu} \end{bmatrix},$$

$$C_j = \bar{\kappa}_j E + i\Delta N \psi_j^{\frac{1}{2\mu}} + O(\psi^{\frac{1}{\mu}}),$$

$$j = 1, \dots, 2\mu,$$

$$\bar{\kappa}_j = exp(i\phi_j), \phi_j = \left(\frac{\psi}{\alpha + i\beta}\right)_j^{\frac{1}{2\mu}},$$

Δ -произвольная константа, N -жорданова нильпотентная матрица (см.(2.1)).

Доказательство. Для построенных в предыдущем параграфе базисных векторов сохраняем старые обозначения. Справедливы соотношения:

$$ME_1^1 = \bar{\kappa}_1 E_1^1 + \psi^{1+\frac{1}{p}} \sum_{t=1}^{p} \sum_{s=1}^{k} r_s^{1t}(\psi) E_s^t = \bar{\kappa}_1 E_1^1 + O(\psi^{1+\frac{1}{p}}), \qquad (3.1a)$$

$$ME_l^1 = \bar{\kappa}_1 E_l^1 + \Delta\psi E_{l-1}^p + \psi \sum_{t=1}^{p-1} \sum_{s=1}^{k} r_s^{lt}(\psi) E_s^t + O(\psi^{1+\frac{1}{p}}), \qquad (3.1б)$$

$$2 \le l \le k,$$

$$ME_l^j = \bar{\kappa}_j E_l^j + E_l^{j-1} + O(\psi^{1-\frac{i-2}{p}}), \qquad (3.1в)$$

$$2 \le j \le p, \quad p = 2\mu, \quad 1 \le l \le k.$$

Они отличаются от соответствующих соотношений предыдущего параграфа формулой (3.1б). Мы использовали лемму (2.1) и только для простоты написания взяли N в виде одного жорданова нильпотентного ящика. Из дальнейшего будет ясно, что доказательство верно для произвольной жордановой нильпотентной N. Напомним, что в рассматриваемом базисе резольвентная матрица имеет вид (1.6) с

$$R_{p1} = \Delta\psi N + O(\psi^{1+\frac{1}{p}}),$$

матрица $M_2(\psi)$. Подправляя первую группу векторов, избавляемся от R_{p1}:

$$\tilde{E}_j^1 = E_j^1 + \sum_{l=1}^{k} x_{lj} E_l^p.$$

Справедливы соотношения

$$M\tilde{E}_j^1 = \bar{\kappa}_1(\tilde{E}_j^1 - \sum_{l=1}^{k} x_{lj} E_l^p) + \Delta\psi(1 - \delta_{1j}) E_{j-1}^p +$$

$$\psi^{1+\frac{1}{p}} \sum_{l=1}^{k} r_{lj}^{p1} E_l^p + \psi \sum_{t=1}^{p-1} \sum_{s=1}^{k} r_{sj}^{t1} E_s^t +$$

$$\sum_{l=1}^{k} x_{lj}(\bar{\kappa}_p E_l^p + E_l^{p-1} + \psi^{\frac{2}{p}} \sum_{t=1}^{p} \sum_{s=1}^{k} r_{ls}^{tp} E_s^t).$$

$$1 \le j \le k.$$

Здесь и далее δ_{ij}— символ Кронекера. Положим $X_{p1} = ||x_{\xi j}||$; $x_{\xi j}$ удовлетворяют системе

$$(\bar{\kappa}_p - \bar{\kappa}_1) x_{lj} + \psi^{\frac{2}{p}} \sum_{s=1}^{k} x_{sj} (\sum_{t=1}^{k} r_{sl}^{pp} - r_{st}^{1p} x_{lt}) -$$

$$\psi \sum_{s=1}^{k} r_{sj}^{11} x_{ls} = \Delta\psi \delta_{l,j-1}(1 - \delta_{1j}) + \psi^{1+\frac{1}{p}} r_{lj}^{p1}, \qquad (3.2)$$

$$1 \le l, j \le k.$$

Эта система решается методом простых итераций, начиная с нуля,

$$(\bar{\kappa}_p - \bar{\kappa}_1) x_{lj}^{\eta+1} + \psi^{\frac{2}{p}} \sum_{s=1}^{k} x_{sj}^{\eta} (\sum_{t=1}^{k} r_{sl}^{pp} - r_{st}^{1p} x_{lt}^{k}) -$$

$$\psi \sum_{s=1}^{k} r_{sj}^{11} x_{ls}^{\eta} = \Delta\psi \delta_{l,j-1}(1 - \delta_{1j}) + \psi^{1+\frac{1}{p}} r_{lj}^{p1},$$

$$1 \le l, j \le k, \quad \eta \ge 0.$$

Получаем, что

$$X_{p1} = -\frac{\Delta N \psi}{\bar{\kappa}_1 - \bar{\kappa}_p} + O(\psi) = y_{p1} \Delta N + O(\psi).$$

В подправленном базисе резольвентная матрица принимает вид $M_3(\psi)$: блок R_{p1} зануляется , блок $R_{p-1,1}$ переходит в X_{p1}, R_{p2} в $-X_{p1}$. В остальном сохраняется старая структура.На самом деле $R_{p-1,1}$ заменяется в (1.6) на $R_{p-1,1}+X_{p1}$, но $R_{p-1,1}=O(\psi)$ (см.(1.5)), а X_{p1} определено с точностью до $O(\psi)$. Аналогично R_{p2} заменяется на $R_{p2}-X_{p1}$, но и здесь $R_{p2}=O(\psi)$. Переопределяются и другие R_{ij}, но их структура сохраняется, а нас интересуют лишь их порядки , оставляем для них старые обозначения.Как мы увидим в конце, главные члены разложения построенного матричного жорданова ящика зависят только от главного члена разложения $R_{p1}, N\psi$.

Аналогично избавляемся от блоков $R_{p-1,1},\ldots,R_{21}$. В результате резольвентная матрица приводится к виду

$$M_{p+1}=\begin{bmatrix} \bar\kappa_1E+X_{21} & E+R_{12} & \ldots \\ 0 & \bar\kappa_2E-X_{21} & \ldots \\ . & . & \ldots \\ 0 & -X_{p-1,1} & \ldots \\ 0 & -X_{p,1} & \ldots \end{bmatrix},$$

Изменились первые два столбца, в остальном сохранилась старая структура. Матрицы X_{j1} определяется соотношениями

$$X_{j1}=y_{j1}\Delta N+O(\psi^{1-\frac{i-1}{p}}),$$

$$y_{j1}=\frac{(-1)^{p-j+1}\psi}{(\bar\kappa_1-\bar\kappa_p)\ldots(\bar\kappa_1-\bar\kappa_j)}.$$

В частности,

$$y_{21}=(-1)^{p-1}\frac{\psi}{(\bar\kappa_1-\bar\kappa_2)\ldots(\bar\kappa_1-\bar\kappa_p)}.$$

Вспомним (см.(1.3)), что $\bar\kappa_j=exp(i\phi_j),\phi_j=(d\psi)_j^{\frac{1}{p}}=\epsilon_j\phi_p$. Отсюда следует

$$y_{21}=\frac{(i)^{p-1}\psi}{(\phi_p)^{p-1}(\epsilon_1-\epsilon_2)\ldots(\epsilon_1-\epsilon_p)}=$$

$$\frac{-(i)^pi\psi(1+O(\psi^{\frac{1}{p}})}{(\phi_p)^{p-1}p\epsilon_1^{p-1}}=\frac{-c(-1)^\mu i\phi_1(1+O(\psi^{\frac{1}{p}})}{p},$$

$$c=\alpha+i\beta=\sigma^p,\sigma\phi_j=\psi_j^{\frac{1}{p}},1\le j\le p,(\text{см.}[3]).$$

Построен первый матричный столбец матричного жорданова ящика

$$(\bar\kappa_1E+i\Delta\psi_j^{\frac{1}{p}}N+O(\psi^{\frac{2}{p}}),0,\ldots,0)^T.$$

На самом деле при ϕ_1 стоит другой множитель$-c\Delta i^p/(\sigma p)$.Мы можем соответствующим образом выбрать константу в (2.1).

Аналогично предыдущему избавляемся от $-X_{p1}$ во втором матричном столбце, подправляя вторую группу базисных векторов E_j^2. Нижние матричные элементы второго и третьего столбцов преобразуются к виду

$$X_{p2}-X_{p-1,1},\quad 0;\quad R_{p-1,3},\quad -X_{p2}$$

соответственно. Матрица X_{p2} определяется соотношением

$$X_{p2}=\frac{X_{p1}}{(\bar\kappa_2-\bar\kappa_p)}=y_{p2}\Delta N+O(\psi^{1-\frac{1}{p}}),$$

$$y_{p2}=\frac{\psi}{(\bar\kappa_1-\bar\kappa_p)(\bar\kappa_2-\bar\kappa_p)}=-\frac{y_{p1}}{(\bar\kappa_2-\bar\kappa_p)}.$$

На сей раз мы не можем заменить $R_{p-1,2}+X_{p2}$ на X_{p2}, так как $X_{p-1,1}$ и X_{p2} величины одного порядка. Дальнейший процесс исключения описываем в общем виде.Пусть выделен $(j-1)-$ й матричный столбец жорданова ящика. Тогда определены

$$X_{p,j-1},\ldots,X_{j,j-1}$$

и $j-$ матричный столбец, начиная с $j-$й строки,имеет вид

$$(\bar\kappa_jE-X_{j,j-1},-X_{j+1,j-1},\ldots,-X_{p,j-1})^T.$$

Аналогично предыдущему, находим

$$X_{pj}=y_{pj}\Delta N+O(\psi^{1-\frac{j-1}{p}}),$$

$$y_{pj}=-\frac{y_{p,j-1}}{(\bar\kappa_j-\bar\kappa_p)}. \qquad (3.3a)$$

Справедливы соотношения

$$y_{ij}=-\frac{y_{i+1,j}-y_{i,j-1}}{(\bar\kappa_j-\bar\kappa_i)},$$

что эквивалентно

$$y_{i+1,j} + (\bar\kappa_j - \bar\kappa_i)y_{ij} = y_{i,j-1}, \tag{3.3б}$$
$$j+1 \le i \le p-1.$$

Введем в рассмотрение векторы

$$Y_k^j = (y_{j+1,k}, \dots, y_{pk})^T, k = 0,1,\dots,j,$$
$$Y_0^j = (0,0,\dots,\psi)^T. \tag{3.4}$$

Перепишем (3.3) в матричном виде

$$(\bar\kappa_j E + G_j)Y_j^j = Y_{j-1}^j,$$

$$G_j = \begin{bmatrix} -\bar\kappa_{j+1} & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & -\bar\kappa_p \end{bmatrix}.$$

Справедливы соотношения

$$(\bar\kappa_1 E + G_j)\dots(\bar\kappa_j E + G_j)Y_j^j = Y_0^j,$$
$$Y_j^j = T^{-1}\Lambda_j^{-1}T_jY_0^j,$$
$$\Lambda_j = diag(\lambda_1^j, \dots, \lambda_{p-j}^j), \tag{3.5}$$
$$\lambda_s^j = (\bar\kappa_j - \bar\kappa_{j+s})\dots(\bar\kappa_1 - \bar\kappa_{j+s}) =$$
$$(i\phi_p)^j\epsilon_1\dots\epsilon_j(1-\epsilon_s)\dots(1-\epsilon_{j+s-1}). \tag{3.6}$$

Матрица T_j преобразует G_j к диагональному виду:

$$T_j^{-1} = (t_1^j, \dots, t_l^j), \quad l = p - j,$$
$$t_s^j = (1, (\bar\kappa_{j+1} - \bar\kappa_{j+s}), \dots,$$
$$\prod_{t=1}^{s-1}(\bar\kappa_{j+t} - \bar\kappa_{j+s}), 0, \dots, 0)^T. \tag{3.7}$$

На самом деле нас интересует разность $y_{j+1,j} - y_{j,j-1}$.

Лемма 3.1. Справедлива формула

$$y_{j+1,j} - y_{j,j-1} = \frac{(-1)^{\mu+1}(\alpha+i\beta)i\phi_j(\psi)}{p}. \tag{3.8}$$

Доказательство. Из (3.4) следует, что $Z_j = T_jY_j^j$ удовлетворяют соотношению

$$T_j^{-1}\Lambda_jZ_j = Y_0^j. \tag{3.9}$$

Так как в первых строках матриц T_J^{-1}, T_{j-1}^{-1} стоят единицы, см. (3.7), то $y_{j+1,j}, y_{j,j-1}$, первые компоненты векторов $T_j^{-1}Z_j, T_{j-1}^{-1}Z_{j-1}$,равны суммам компонент векторов Z_j, Z_{j-1} соответственно. Используя (3.5)-(3.7), можно проверить, что треугольная матрица $T_j^{-1}\Lambda_j$ получается из треугольной матрицы $T_{j-1}^{-1}\Lambda_{j-1}$ вычеркиванием первого столбца и первой строки. Отсюда и из (3.3),(3.9) имеем, что Z_j получается из Z_{j-1} отбрасыванием первой компоненты. Следовательно, интересующая нас разность (между суммами компонент векторов Z_j и Z_{j-1}) просто равна первой компоненте Z_{j-1}, взятой с обратным знаком

$$y_{j+1,j} - y_{j,j-1} = -Z_{j-1}(1). \tag{3.10}$$

Вычисляем $Z_{j-1}(1)$, $T_{j-1}^{-1}\Lambda_{j-1}Z_{j-1} = Y_0^{j-1}$. По известной формуле [1] для решения систем линейных уравнений

$$Z_{j-1}(1) = \frac{det(Y_0^{j-1}, \lambda_2^{j-1}t_2^{j-1}, \dots, \lambda_{l+1}^{j-1}t_{l+1}^{j-1})}{det(\lambda_1^{j-1}t_1^{j-1}, \dots, \lambda_{l+1}^{j-1}t_{l+1}^{j-1})} =$$

$$\psi(-1)^{l+1}\frac{\lambda_2^{j-1}\dots\lambda_{l+1}^{j-1}det(C)}{\lambda_1^{j-1}\dots\lambda_{l+1}^{j-1}t_2^{j-1}(2)\dots t_{l+1}^{j-1}(l+1)}, \quad l = p - j. \tag{3.11}$$

Верхняя треугольная матрица C определяется соотношениями

$$c_{1j} = 1, 1 \le j \le l,$$
$$c_{21} = (\bar\kappa_j - \bar\kappa_{j+1}), c_{22} = (\bar\kappa_j - \bar\kappa_{j+2}), \dots, c_{2l} = (\bar\kappa_j - \bar\kappa_{j+l})$$
$$c_{31} = 0, c_{32} = (\bar\kappa_j - \bar\kappa_{j+1})(\bar\kappa_j - \bar\kappa_{j+2}), \dots,$$
$$c_{3l} = (\bar\kappa_j - \bar\kappa_{j+l-1})(\bar\kappa_j - \bar\kappa_{j+l}), \dots, c_{li} = 0, 1 \le i \le l-2,$$
$$c_{l,l-l} = \prod_{s=1}^{l-1}(\bar\kappa_j - \bar\kappa_{j+s}), \quad c_{ll} = \prod_{s=1}^{l}(\bar\kappa_j - \bar\kappa_{j+s}).$$

Последовательно освобождаемся от единиц в верхней строке под знаком определителя. В результате получим, что $det(C) = det(\hat{C})$. Первая строка матрицы $\hat{C}$ состоит из нулей, кроме последнего элемента

$$\hat{c}_{1l} = (-1)^{l-1}\frac{(\bar{\kappa}_{j+1} - \bar{\kappa}_{j+l})\dots(\bar{\kappa}_{j+l-1} - \bar{\kappa}_{j+l})}{(\bar{\kappa}_j - \bar{\kappa}_{j+1})\dots(\bar{\kappa}_j - \bar{\kappa}_{j+l-1})}.$$

В результате находим, что

$$det(C) = (-1)^{l+1} t_2^{j-1}(2)\dots t_l^{j-1}(l)\hat{c}_{1l}.$$

После подстановки в (3.11) имеем

$$Z_{j-1}(1) = \frac{\psi \hat{c}_{1l}}{\lambda_1^{j-1} t_{l+1}^{j-1}(l+1)}.$$

Вспомним (3.6), что

$$\lambda_1^{j-1} = (\bar{\kappa}_{j-1} - \bar{\kappa}_j)\dots(\bar{\kappa}_1 - \bar{\kappa}_j).$$

$$t_{l+1}^{j-1}(l+1) = (\bar{\kappa}_j - \bar{\kappa}_{j+l})\dots(\bar{\kappa}_{j+l-1} - \bar{\kappa}_{j+l}).$$

Отсюда следует

$$-z_{j-1}(1) = \frac{(-1)^{p-1}\psi}{(\bar{\kappa}_j - \bar{\kappa}_1)\dots(\bar{\kappa}_j - \bar{\kappa}_{j-1})(\bar{\kappa}_j - \bar{\kappa}_{j+1})\dots(\bar{\kappa}_j - \bar{\kappa}_p)} =$$

$$\frac{-(i)^p i\psi(1 + O(\psi^{\frac{1}{p}}))}{p\phi_j^{p-1}} = \frac{-c(-1)^\mu}{p} i\phi_j(1 + O(\psi^{\frac{1}{p}})).$$

Лемма 3.1 доказана, доказано существование аналитического базиса, в котором резольвентная матрица имеет блочно-треугольный вид

$$\tilde{M}(\psi) = \begin{bmatrix} C_1 & E + R_{12} & \dots & R_{1p} \\ 0 & C_2 & \dots & R_{2p} \\ . & . & \dots & . \\ 0 & 0 & \dots & C_p \end{bmatrix}, \qquad (3.12)$$

$$C_j = \bar{\kappa}_j E + i\Delta\psi_j^{\frac{1}{p}} N + O(\psi^{\frac{2}{p}}), R_{ij} = O(\psi^{\frac{p-j+2}{p}}). \qquad (3.13)$$

Так как $(\bar{\kappa}_i - \bar{\kappa}_j) = O(\psi^{\frac{1}{p}})$, мы без особого труда избавляемся от возмущений R_{ij} серией матричных элементарных преобразований подобия.

Лемма 3.2. Найдется невырожденная аналитическая матрица T такая, что

$$T\begin{bmatrix} C_i & \delta_{ij}E + R_{ij} \\ 0 & C_j \end{bmatrix} T^{-1} = \begin{bmatrix} C_i & \delta_{ij}E \\ 0 & C_j \end{bmatrix}.$$

Доказательство. Такой матрицей является

$$T = \begin{bmatrix} E & Q_{ij} \\ 0 & E \end{bmatrix},$$

Q_{ij} удовлетворяет

$$C_i Q_{ij} - Q_{ij} C_j = R_{ij}.$$

Последнее может быть решено методом простых итераций, начиная с нуля:

$$Q_{ij}^\eta = \frac{R_{ij}}{(\bar{\kappa}_i - \bar{\kappa}_j)} - i\Delta(\psi_i^{\frac{1}{p}} N Q_{ij}^{\eta-1} + \psi_j^{\frac{1}{p}} Q_{ij}^{\eta-1} N), \quad \eta \geq 0.$$

Мы использовали (3.13), из которого, в частности, следует, что

$$\frac{R_{ij}}{(\bar{\kappa}_i - \bar{\kappa}_j)} = O(\psi^{\frac{p-j+1}{p}}).$$

Лемма 3.2 доказана. В заключение доказательства основной теоремы остается заметить, что исключение возмущений в (3.12) производится последовательно по строкам, начиная с первой. И в каждой строке слева направо, начиная с $R_{i,i+1}$. Имеющийся запас прочности (3.13) позволяет произвести исключение всех R_{ij}. *Теорема 3.1* доказана.

Заключение. Заметим, что имеется полная аналогия построенной матричной аналитической нормальной формы с жордановым ящиком [1] для постоянных матриц. Имеется также аналогия построенных диагональных блоков C_j с квазижордановой нормальной формой для "гиперболических блоков". Главным членом разложения является $\bar{\kappa}_j E$, а главный член возмущения пропорционален первому нелинейному члену разложения $ln(\bar{\kappa}_j(\psi))$. Доказанная здесь теорема существования квазижордановой нормальной формы для параболического блока вместе с доказанной ранее теоремой для гиперболических систем до конца решает проблему построения нормальной формы резольвенты для линейных разностных краевых задач общего вида.

Приношу благодарность Н.С.Бахвалову за интерес к моим исследованиям и постоянную поддержку. Бесконечно благодарна Н.С.Бахвалову за требовательность, которая вынуждает доводить работу до конца. В результате мне посчастливилось узнать красоту простых законченных математических результатов.

Литература.

1. Ф.Р.Гантмахер.Теория матриц М.:Наука, 1967.

2. H.-O.Kreiss. Stability Theory for Difference Approximations of Mixed Initial Boundary Value Problems, Math. Comp.,1968, Vol.22, N 104, p. 703-714.

3. С.И.Сердюкова. Необходимые и достаточные условия устойчивости в C линейных разностных краевых задач общего вида, ДАН СССР, 1991, т.319, N 6, с.1328-1332.

4. С.И.Сердюкова. Об устойчивости систем разностных уравнений в равномерной метрике, ЖВМ и МФ, 1967, т.7, N 3, с.497-509.

5. С.И.Сердюкова. Квазижорданова форма аналитических матриц, образующих ограниченную полугруппу, ДАН СССР, 1990, т.311, N 4, с.801-806.

6. С.И.Сердюкова Об устойчивости в C разностных краевых задач, В сб.: Вычислительные процессы и системы, вып.8, М.: Наука, 1991, с.292-327.

Рукопись поступила в издательский отдел
11 января 1994.