



ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА

P5-94-51

К.А.Макаров^{1,2}, В.В.Мележик¹, А.К.Мотовилов³

ТОЧЕЧНЫЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ
В КВАНТОВОЙ ЗАДАЧЕ ТРЕХ ЧАСТИЦ
С ВНУТРЕННЕЙ СТРУКТУРОЙ

Направлено в журнал «Теоретическая и математическая физика»

¹Санкт-Петербургский университет

²AvH Fellow, Institut für Mathematik, Ruhr-Universität Bochum,
Bochum, Germany

³E-mail: Motovilv @thsun 1, JINR, Dubna, SU.

Точечные взаимодействия в квантовой задаче трех частиц с внутренней структурой

Рассматривается система трех квантовых частиц с внутренней структурой, парные взаимодействия в которой являются точечными и описываются в терминах двухканальных гамильтонианов. Устанавливается, что в тех случаях, когда параметры модели таковы, что полный гамильтониан системы трех частиц полуограничен, уравнения Фаддеева оказываются фредгольмовыми. Формулируются краевые задачи для дифференциальных уравнений Фаддеева, решениями которых являются волновые функции рассеяния.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна, 1994

The Point Interactions in the Quantum Problem of Three Particles with Internal Structure

The problem of three quantum particles with internal structure is considered where the pair interactions are described in terms of two-channel Hamiltonians. It is proved that if parameters of the model are such that the total three-body Hamiltonian is semibounded, the Faddeev equations are of Fredholm type. The boundary value problems are formulated for the Faddeev differential equations which can be used for search of the scattering wave functions.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

1. Введение

Под точечными взаимодействиями в системе двух частиц обычно понимают взаимодействия, нетривиальные лишь при нулевом расстоянии между частицами. Классический пример таких взаимодействий — потенциалы нулевого радиуса в ядерной физике [1], [2], которые прочно заняли свою “экологическую нишу” после работы Х.Бете и Р.Пайерлса [3], посвященной теории дейтрона. В этой работе было впервые отмечено, что благодаря малому радиусу действия (ядерных) сил многие свойства двухчастичной системы (дейтрона) практически не зависят от деталей поведения потенциала взаимодействия и в существенном определяются единственным параметром — длиной рассеяния a . Поэтому замена истинного потенциала взаимодействия граничным условием (в системе единиц с $\hbar = 1$ и приведенной массой $\mu = \frac{1}{2}$)

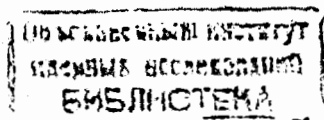
$$(1.1) \quad \frac{d}{dr} \ln [r\psi] \Big|_{r=0} = -\frac{1}{a},$$

ставящимся на расстоянии r между частицами, равном нулю, приводит к волновой функции ψ , удовлетворительно описывающей основные характеристики системы.

Строгое математическое обоснование модель точечных взаимодействий (1.1) получила в работе Ф.А.Березина и Л.Д.Фаддеева [4]. В качестве гамильтониана системы двух частиц, рассматриваемой в этой модели, выбирается один из операторов, входящих в однопараметрическое (параметр — длина рассеяния a) семейство расширений оператора Лапласа в $L_2(\mathbf{R}^3)$, заданного первоначально на классе гладких функций, обращающихся в нуль в окрестности начала координат.

Потенциалы нулевого радиуса (1.1) до сих пор являются источником явно решаемых задач для широкого круга областей квантовой физики (см. книгу [5] и ссылки, содержащиеся в ней).

Однако, будучи действительно простой и явно решаемой в задаче двух частиц, при переходе к задаче трех тел модель потенциалов нулевого радиуса приводит к дополнительным математическим проблемам [6] (см. также [7]), отсутствующим в случае парных взаимодействий, описываемых регулярными потенциалами. Эти проблемы связаны с тем, что носителями точечных взаимодействий в парных подсистемах α ; $\alpha = 1, 2, 3$, являются трехмерные гиперплоскости M_α , коразмерность которых по отношению к конфигурационному пространству \mathbf{R}^6 слишком велика. Особую роль играет здесь точка тройного столкновения частиц $X = 0$, являющаяся одновременно единственной точкой пересечения гиперплоскостей M_α и M_β при $\beta \neq \alpha$. Присутствие этой точки проявляется в том, что при естественном включении парных взаимодействий (1.1) возникает модель [8], гамильтониан которой имеет ненулевые индексы дефекта [6] (например, индексы (1,1) в z -состоянии трех бозонов), а уравнения Скорнякова–Тер-Мартиросьяна [8], являющиеся для этой модели специальным случаем уравнений Фаддеева [9], оказываются нефредгольмовыми. В частности, как показал Г.С.Данилов [10], соответствующие однородные уравнения имеют нетривиальные решения при всех энергиях z , в том числе и комплексных. Это обстоятельство резко отличает модель потенциалов нулевого радиуса от других вариантов быстроубывающих парных взаимодействий, для широкого класса которых уравнения Фаддеева компактны [11] (при этом однородные уравнения Фаддеева имеют решения лишь при тех энергиях, для которых существуют связанные состояния системы трех частиц). Р.А.Мягкосом и Л.Д.Фаддеевым [6]



было установлено, что модификация [10] модели, предложенная Даниловым для выделения единственного решения уравнений Скорнякова-Тер-Мартиросяна, является лишь одним из возможных самосопряженных расширений исходного гамильтониана задачи [8]. Выбор того или иного расширения сводится к выбору специального подпространства решений однородных уравнений Скорнякова-Тер-Мартиросяна. Подсемейство расширений, фактически построенное Даниловым [10], состоит из неполюограниченных гамильтонианов. Другими словами, в системе возможен коллапс ("падение на центр"), что делает и уточненную модель [10] неприемлемой для многих приложений. Этот неожиданный¹ в свое время результат надолго понизил интерес к многочастичным моделям с точечными взаимодействиями.

В действительности оказалось, однако, что полуоограниченные гамильтонианы для системы трех частиц с парными² точечными взаимодействиями (более общего вида, чем (1.1)) все же существуют. Правда, эффективные радиусы этих взаимодействий оказываются не равными нулю, что резко отличает их от стандартной модели (1.1).

Априори ясно, что любое расширение модели (1.1), оставляющее взаимодействие между частицами точечным (нетривиальным лишь в точке $r = 0$), должно приводить к волновым функциям рассеяния $\psi(k)$, удовлетворяющим при всех $k > 0$ равенству

$$\left. \frac{d}{dr} \ln [r\psi(k)] \right|_{r=0} = k \operatorname{ctg} \delta(k),$$

где k – модуль относительного импульса частиц, а $\delta(k)$ – фазы рассеяния в s -состоянии системы. Хорошо известно [13], что для быстроубывающих взаимодействий функция $k \operatorname{ctg} \delta$ допускает при $k \rightarrow 0$ следующее асимптотическое разложение:

$$(1.2) \quad k \operatorname{ctg} \delta(k) = -\frac{1}{a} + \frac{1}{2} r_0 E + Ar_0^2 E^2 + \dots$$

где $E = k^2$ – энергия системы, а r_0 – эффективный радиус взаимодействия. Так что граничные условия (1.1), отвечающие потенциалам нулевого радиуса содержат лишь старший член асимптотики (1.2), причем в случае (1.1) $k \operatorname{ctg} \delta(k) = -\frac{1}{a}$ при всех k .

Впервые полуоограниченный трехчастичный гамильтониан с парными точечными взаимодействиями был построен Ю.Г.Шондиным [14], рассматривавшим обобщенные δ -потенциалы, приводящие к представлению (1.2), содержащему при всех $k > 0$ наряду с $-1/a$ лишь линейный по энергии член. В модели [14], по существу, используются расширения оператора Лапласа с выходом из пространства $L_2(\mathbb{R}^3)$ в пространство $L_2(\mathbb{R}^3) \oplus \mathbb{C}$, $\dim \mathbb{C} = 1$. Вслед за Шондиным аналогичная модель была построена Л.Э.Томасом [15]. Учет [16] следующих членов E^2, E^3, \dots разложения (1.2) в точечном взаимодействии частиц [14] приводит к необходимости выхода из $L_2(\mathbb{R}^3)$ в пространства с индефинитной метрикой.

Другой подход к построению (энергезависимых) точечных взаимодействий, приводящий к случаю, когда $(-k \operatorname{ctg} \delta)$ оказывается R -функцией³ энергии z , $z \in \mathbb{C}$, был предложен

¹Отметим, что указания на возможную неполюограниченность гамильтонианов с потенциалами нулевого радиуса содержались еще в работе Л.Х.Томаса [12], обнаружившего, что в пределе нулевого радиуса сила энергии основного состояния системы трех частиц становится бесконечной.

²В [6] указано на существование полуоограниченных гамильтонианов в том случае, если граничные условия по координате пары частиц содержат оператор типа свертки по относительному импульсу дополнительной частицы. Однако постановка таких граничных условий заведомо означает введение в задачу трехчастичных сил.

³Функция $f(z)$, аналитичная в верхней полуплоскости z , называется R -функцией, если $\operatorname{Im} f(z) > 0$ при $\operatorname{Im} z > 0$.

в работе Б.С.Павлова [17], где, в отличие от [14], используются расширения оператора Лапласа с выходом из $L_2(\mathbb{R}^3)$ в дополнительное гильбертово пространство (внутренних степеней свободы сталкивающихся частиц) произвольной размерности. Описание результирующих двухканальных гамильтонианов в [17] (см. также статью [18], уточняющую модель [17]) проводится в терминах дефектных подпространств исходного симметричного оператора и оказывается не вполне явным. Эквивалентное прямое описание таких гамильтонианов в терминах двухканальных операторных матриц

$$(1.3) \quad \hat{h} = \begin{pmatrix} h_0 + \hat{V}_k & B \\ B^+ & A \end{pmatrix}$$

найдено в недавней работе одного из авторов [19]. Здесь обычно $h_0 = -\hat{\Delta}$ – оператор Лапласа в $L_2(\mathbb{R}^3)$, понимаемый в смысле обобщенных функций (см. разделы 2.1 и 2.2); оператор A описывает внутренние степени свободы, \hat{V}_k – сингулярный обобщенный потенциал [19], отвечающий стандартному взаимодействию нулевого радиуса, а B и B^+ – (сингулярные) операторы связи между каналами. Отметим, что в терминах граничных условий прямое описание двухканальных гамильтонианов с точечными взаимодействиями использовалось и ранее в работах другого автора [20] и [21].

Исключение в спектральной задаче для оператора \hat{h} компоненты, отвечающей внутреннему каналу, приводят во внешнем канале к уравнению Шредингера

$$(h_0 + \hat{w}(z) - z) \Psi = 0$$

с энергезависимым взаимодействием

$$(1.4) \quad \hat{w}(z) = \hat{V}_k - B(A - zI)^{-1}B^+.$$

Если гамильтониан внутреннего канала в моделях [17]-[21] имеет лишь дискретный спектр, то функция $(-k \operatorname{ctg} \delta)$, отвечающая точечному потенциалу (1.4), оказывается рациональной R -функцией энергии z вида (см. раздел 2.2)

$$(1.5) \quad -k \operatorname{ctg} \delta(k) = \frac{P_N(z)}{Q_N(z)}, \quad z = k^2,$$

где P_N и Q_N – многочлены степени N , N – число точек дискретного спектра оператора A . Это означает, что в тех конкретных примерах, где точно известно, что $(-k \operatorname{ctg} \delta)$ является R -функцией, представление (1.5) позволяет использовать метод Паде-аппроксимаций для численного решения обратной задачи рассеяния в терминах точечных взаимодействий (1.4). Обратим, однако, внимание на нигде не отмечавшееся ранее обстоятельство, суживающее возможности прямого применения моделей [17]-[21] в некоторых задачах ядерной физики и состоящее в том, что точечные взаимодействия $\hat{w}(z)$, задаваемые этими моделями, во всех случаях обладают отрицательным эффективным радиусом⁴. Двухчастичные гамильтонианы в модели Шондина [14] полуоограничены также лишь в том случае, когда ее параметры таковы, что $r_0 < 0$. Разумеется, при необходимости эффективный радиус точечных взаимодействий всегда можно "подправить", вводя во внешнем канале дополнительный гладкий потенциал.

⁴Этот факт является простым следствием общего свойства R -функций $f(z) = \frac{\psi(E+i0)}{E} \Big|_{E=0} > 0$, $E \in \mathbb{R}$.

Принцип включения парных взаимодействий типа (1.3) в трехчастичные гамильтонианы (см. раздел 3.2) был впервые сформулирован в работах [22], [23] и, в наиболее прозрачном виде, в статье [24]. Взаимодействия из [22]–[24] не являются точечными и соответствуют модели (1.3), в которой операторы B и B^+ имеют ядра с носителем на некоторой поверхности [22]–[24] или области [24] в \mathbb{R}^3 .

Используя принцип [22]–[24], Б.С.Павлов в своей статье [7] включил в гамильтониан системы трех частиц также и точечные взаимодействия с внутренней структурой [17]. Выяснилось, что для полуограниченности трехчастичного гамильтониана необходимо выбрать параметры взаимодействий [17] так (а это возможно), чтобы матрицы рассеяния в двухчастичных подсистемах имели высокоэнергетическое поведение $s_\alpha(k) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 1$, $\alpha = 1, 2, 3$, характерное для рассеяния на гладких быстроубывающих потенциалах [13]. Аналогичный вывод получен также и в работе [20], использовавшей явное описание области определения гамильтонианов в двухчастичных и трехчастичной задачах.

В терминах двухканальной модели (1.3) требование $s_\alpha(k) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 1$ равносильно условию $\dot{V}_h = 0$, то есть отсутствию во внешнем канале (1.3) стандартного взаимодействия нулевого радиуса (1.1). При этом условие степень многочлена $Q_N(z)$ в знаменателе (1.5) понижается на единицу, в результате чего функция $k \operatorname{ctg} \delta(k)$ имеет высокоэнергетическое поведение $k \operatorname{ctg} \delta(k) \sim z$ такое же, как в модели Шондина [14]. Если $\dot{V}_h \neq 0$, то парные t -матрицы убывают при $z \rightarrow +\infty$ как $1/\sqrt{z}$ и $s_\alpha(k) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} -1$. Другими словами, налетающие частицы “видят” стандартный потенциал нулевого радиуса при всех энергиях, подобно тому, как это происходит с “потенциалом” твердого ядра. При отсутствии компонент \dot{V}_h парные взаимодействия (1.4) становятся резонансными и исчезают как $1/z$ при $z \rightarrow \infty$, что приводит к столь же быстрому, по сравнению со случаем $\dot{V}_h \neq 0$, убыванию парных t -матриц.

Оказалось, однако, что точечные взаимодействия из работ [7] и [20] не вполне являются парными и содержат трехчастичные силы. Обсуждение этого вопроса проводится в статье [21], где вид трехчастичного гамильтониана уточняется с тем, чтобы все взаимодействия между частицами стали действительно парными, и дается доказательство его полуограниченности.

В настоящей работе мы используем метод квазипотенциалов (обобщенных потенциалов) [19] и даем эквивалентную алгебраическую (матричную) переформулировку трехчастичных гамильтонианов с истинно парными точечными взаимодействиями из [21].

Главной целью работы является обоснование фредгольмовости уравнений Фаддеева для случая, когда гамильтониан системы трех частиц с парными точечными взаимодействиями (1.4) полуограничен. Весь анализ мы проводим в координатном представлении. Центр тяжести при этом переносится на исследование сингулярностей ядер уравнений Фаддеева в точке тройного столкновения частиц, поскольку их асимптотическое поведение при больших значениях пространственных аргументов имеет ровно тот же характер, что и для гладких быстроубывающих потенциалов [25].

Как уже отмечалось выше, обобщенные потенциалы и операторы связи каналов [19] дают возможность в явном виде ввести парные t -матрицы и записать уравнения Фаддеева в их привычном виде [11], [25]. Так что свойства ядер уравнений Фаддеева определяются свойствами парных t -матриц.

В случае, когда стандартные взаимодействия нулевого радиуса \dot{V}_h присутствуют во

всех парных подсистемах, медленное, как $1/\sqrt{z}$, убывание парных t -матриц при больших значениях $|z|$ приводит к тому, что главные сингулярности ядер уравнений Фаддеева при $X = 0$ (описываемые формулами (3.22) с $\nu = 1$) оказываются неинтегрируемыми на гиперплоскостях M_β и, более того, они воспроизводятся при итерациях. В этом случае, соответствующем неполюограниченному трехчастичному гамильтониану, доказать фредгольмовость уравнений Фаддеева не удается.

В случае же, когда $\dot{V}_h = 0$ во всех парных подсистемах, быстрое убывание как $1/z$ парных t -матриц при $z \rightarrow \infty$ приводит к более слабым сингулярностям ядер уравнений Фаддеева (см. соотношения (3.22), где в качестве ν можно взять любое сколь угодно малое положительное число). Эти особенности интегрируемы на M_β . При итерациях они сначала ослабляются, а затем и вовсе исчезают. Поэтому для данного класса точечных взаимодействий (1.4), отвечающего полуограниченному трехчастичному гамильтониану, уравнения Фаддеева оказываются компактными. После того, как этот факт установлен, теория рассеяния для системы трех частиц с точечными взаимодействиями строится по обычной схеме [25]. В заключительной части работы мы формулируем краевые задачи для дифференциальных уравнений Фаддеева, которые однозначно разрешимы (при $\dot{V}_h = 0$) и их решениями являются волновые функции непрерывного спектра.

Опишем структуру работы. Статья делится на две части. Первая из них (разделы 2.1–2.4) посвящена описанию модели точечных взаимодействий (1.3) в задаче двух частиц. Здесь выясняются также некоторые свойства этой модели, знание которых необходимо при исследовании системы трех частиц, проводимом во второй части, состоящей из разделов 3.1–3.4.

В разделе 2.1 дается переформулировка стандартных взаимодействий нулевого радиуса в терминах обобщенных потенциалов [19] и рассматривается отвечающая им (обобщенная) t -матрица. В разделе 2.2 описываются двухканальные гамильтонианы (1.3). В разделе 2.3 приводятся свойства некоторых ядер, необходимые при исследовании уравнений Фаддеева. В разделе 2.4 точечные взаимодействия с внутренней структурой разделяются на два класса, о которых говорилось выше.

Раздел 3.1 посвящен описанию двухчастичного гамильтониана для системы трех частиц, в которой взаимодействуют лишь частицы одной пары. Здесь же исследуются сингулярности и асимптотические свойства ядер уравнений Фаддеева. В разделе 3.2 вводится полный четырехканальный гамильтониан для системы трех частиц с точечными взаимодействиями. В разделе 3.3 показывается компактность уравнений Фаддеева. Раздел 3.4 посвящен дифференциальным уравнениям Фаддеева.

Авторы признательны Б.С.Павлову за многочисленные стимулирующие дискуссии. Авторы благодарны также С.Альберерио, В.Б.Беляеву и С.Л.Яковлеву за обсуждение результатов работы и В.В.Пупышеву за ценные замечания.

Авторы признательны Фонду Александра фон Гумбольдта (М.К.А.), Международному Научному Фонду (М.А.К.) и Академии Естественных Наук РАН (М.А.К.) за финансовую поддержку работы.

2. Система двух частиц с точечным взаимодействием

2.1. Обобщенные потенциалы в системе двух бесструктурных частиц

Напомним сначала определение стандартных потенциалов нулевого радиуса [4].

Пусть $x, x \in \mathbb{R}^3$ – относительная координата системы двух частиц. Гамильтониан h для этой системы в случае точечных взаимодействий определяется как оператор Лапласа $-\Delta_x$ в $L_2(\mathbb{R}^3)$ на классе функций

$$(2.1) \quad \hat{D} = \{\psi \in W_2^2(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}), \\ \psi(x) = \frac{a}{4\pi|x|} + b + o(1)\}.$$

Область определения $\mathcal{D}(h)$ оператора h представляет собой подмножество в \hat{D} , фиксируемое граничным условием

$$(2.2) \quad a = \gamma b$$

Постоянная $\gamma \in \mathbb{R}$ параметризует все возможные расширения в $L_2(\mathbb{R}^3)$ оператора Лапласа $-\Delta_0$, заданного на $C_0^\infty(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\})$. Величина $(-\frac{\gamma}{4\pi})$ совпадает с длиной рассеяния.

В недавней статье [19] предложена переформулировка краевых задач типа (2.1), (2.2) в терминах обобщенных потенциалов, которой мы будем пользоваться и в настоящей работе.

Идея метода обобщенных потенциалов [27, 19] заключается в том, что исходному гамильтониану сопоставляется обобщенный (то есть, понимаемый в смысле обобщенных функций, скажем, над $C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$) гамильтониан \hat{h} такой, что при $f \in L_2(\mathbb{R}^3)$, $z \in \mathbb{C}$ уравнения

$$(2.3) \quad (\hat{h} - z)\psi = f \quad \psi \in \hat{D}$$

и

$$(2.4) \quad (h - z)\psi = f \quad \psi \in \mathcal{D}(h)$$

оказываются эквивалентными.

При описании обобщенных гамильтонианов мы будем использовать естественные функционалы a и b на \hat{D} , действующие по формулам

$$(2.5) \quad a : \psi \mapsto a, \quad a\psi = \lim_{x \rightarrow 0} 4\pi|x|\psi(x)$$

$$(2.6) \quad b : \psi \mapsto b, \quad b\psi = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\psi(x) - \frac{a\psi}{4\pi|x|} \right)$$

В терминах этих функционалов условие (2.2) записывается в виде

$$(2.7) \quad a\psi = \gamma b\psi$$

Обобщенный оператор Лапласа $-\hat{\Delta}_x$ действует на \hat{D} по формуле [26]

$$(2.8) \quad -\hat{\Delta}_x \psi = -\Delta_x \psi + \delta(x)a\psi,$$

где $-\Delta_x$ – классический оператор Лапласа (в $W_2^2(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\})$). Очевидно, что для воспроизведения граничного условия (2.7) оператор \hat{h} необходимо задать равенством

$$\hat{h} = -\hat{\Delta} + \hat{V}_h,$$

где обобщенный потенциал \hat{V}_h действует по формуле [19]

$$(2.9) \quad \hat{V}_h \psi = -\gamma \delta(x)b\psi.$$

В самом деле, в этом случае уравнение (2.3) приобретает вид

$$(2.10) \quad (-\Delta_x - z)\psi + \delta(x)(a - \gamma b)\psi = f.$$

Приравнявая по отдельности регулярные и сингулярные слагаемые в обеих частях (2.10), приходим к (2.4), то есть к краевой задаче (2.7) для уравнения

$$(2.11) \quad (-\Delta_x - z)\psi = f.$$

Другими словами, требование регулярности области значений обобщенного гамильтониана \hat{h} равносильно выполнению граничных условий (2.7), а уравнение Шредингера (2.10) эквивалентно краевой задаче (2.11), (2.7). Поэтому резольвента $g(z) = (h - z)^{-1}$ оператора h является решением уравнения Липпмана-Швингера с обобщенным потенциалом \hat{V}_h ,

$$g(z) = g_0(z) - g_0(z)\hat{V}_h g(z),$$

где $g_0(z)$,

$$(2.12) \quad g_0(x - x', z) = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{i\sqrt{z}|x-x'|}}{|x-x'|},$$

резольвента оператора Лапласа $-\Delta_x$. Под \sqrt{z} всюду понимаем главную ветвь функции $z^{1/2}$. Резольвента $g(z)$ стандартным способом выражается через (обобщенную) t -матрицу $\hat{i}(z) \stackrel{\text{def}}{=} \hat{V}_h - \hat{V}_h g(z)\hat{V}_h$, действующую на \hat{D} :

$$g(z) = g_0(z) - g_0(z)\hat{i}(z)g_0(z).$$

При этом оператор $\hat{i}(z)$ легко находится из уравнения $\hat{i}(z) = \hat{V}_h - \hat{V}_h g_0(z)\hat{i}(z)$. Получаем для него: $\hat{i}(z) = \delta(x)t(z)b$, где $t(z) = -\frac{\gamma}{1 - \gamma \frac{i\sqrt{z}}{4\pi}}$.

2.2. Точечное взаимодействие с внутренней структурой

Пусть A – самосопряженный полуограниченный оператор, действующий в пространстве \mathcal{H}^{in} на области определения D_A . Оператор A интерпретируется как гамильтониан, описывающий внутренние степени свободы частиц (см. [17]–[19], [21]–[24]).

Следуя [19], сопоставим системе двух частиц с внутренней структурой двухканальный гамильтониан

$$(2.13) \quad \hat{h} = \begin{pmatrix} -\Delta_x + v(x) + \hat{V}_h & B \\ B^+ & A \end{pmatrix},$$

действующий в сумме $\mathcal{H} = L_2(\mathbb{R}^3) \oplus \mathcal{H}^{\text{in}}$ “внешнего”, $L_2(\mathbb{R}^3)$, и “внутреннего”, \mathcal{H}^{in} , пространств на области $\hat{D} \oplus D_A$. Через \hat{V}_h мы обозначили обобщенный потенциал типа (2.9) и через B и B^+ – операторы связи каналов,

$$(2.14) \quad (\hat{V}_h \psi)(x) = \delta(x) \frac{\mu_{12}}{\mu_{11}} b\psi, \quad \psi \in \hat{D},$$

$$(2.15) \quad (Bu)(x) = -\delta(x) \frac{1}{\mu_{11}}(u, \theta), \quad u \in \mathcal{H}^{in},$$

$$(2.16) \quad B^+ \psi = \theta(\mu_{21}a + \mu_{22}b)\psi.$$

Здесь θ – фиксированный элемент из \mathcal{H}^{in} , а a и b – функционалы (2.5, 2.6); $\mu_{ij} \in \mathbb{C}$, $i, j = 1, 2$, $\mu_{11} \neq 0$. Через $v(x)$ обозначен быстроубывающий гладкий потенциал, $|v(x)| \leq C(1+|x|)^{-3-\nu}$, $\nu > \frac{1}{2}$, введенный для полноты изложения. Считаем что, $h_0 = -\Delta_x + v$ имеет лишь отрицательный дискретный спектр, непересекающийся с дискретным спектром внутреннего гамильтониана A .

Требование регулярности внешней компоненты f^{ex} вектора $f = (\hat{h} - z)U$, $f = (f^{ex}, f^{in})$, $f^{ex} \in L_2(\mathbb{R}^3)$, $f^{in} \in \mathcal{H}^{in}$, при $U \in \hat{D} \oplus D_A$, $U = (\psi, u)$, приводит к двухканальному уравнению Шредингера

$$(2.17) \quad \begin{cases} (-\Delta_x + v - z)\Psi = f^{ex} \\ \theta(\mu_{21}a + \mu_{22}b)\psi + (A - z)u = f^{in} \end{cases}$$

и граничным условиям

$$(2.18) \quad \mu_{11}a\psi + \mu_{12}b\psi = (u, \theta).$$

Тем самым, обобщенный гамильтониан \hat{h} эквивалентен “регулярному” оператору, действующему по формуле

$$(2.19) \quad \mathbf{h} \begin{pmatrix} \psi \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-\Delta_x + v)\psi \\ Au + \theta(\mu_{21}a + \mu_{22}b)\psi \end{pmatrix}$$

на области определения $\mathcal{D}(\mathbf{h})$, $\mathcal{D}(\mathbf{h}) \subset \hat{D} \oplus D_A$, фиксируемой граничным условием (2.18).

При произвольных μ_{ij} , $i, j = 1, 2$, оператор \mathbf{h} не является даже симметричным, поскольку, как показывает прямое вычисление [21], его симплектическая форма $\langle hU, V \rangle_{\mathcal{H}} - \langle U, hV \rangle_{\mathcal{H}}$ не обращается тождественно в нуль при $U, V \in \mathcal{D}(\mathbf{h})$.

Необходимым и достаточным условием самосопряженности \mathbf{h} является выполнение требований [21]

$$(2.20) \quad \det \begin{pmatrix} \mu_{11} & \bar{\mu}_{12} \\ \mu_{21} & \bar{\mu}_{22} \end{pmatrix} = -1, \quad \mu_{11}\bar{\mu}_{21} \in \mathbb{R}, \quad \mu_{12}\bar{\mu}_{22} \in \mathbb{R}.$$

Всюду ниже в этой работе требования (2.20) мы будем предполагать выполненными. Тем самым, будем рассматривать самосопряженные гамильтонианы \mathbf{h} .

Согласно [19] гамильтонианы \hat{h} при выборе различных параметров μ, θ воспроизводят все двухчастичные гамильтонианы со взаимодействием нулевого радиуса, построенные в рамках схемы [17, 18]. Можно показать, что если не используются расширенные наборы обобщенных функций (по этому поводу см. [14, 16]), то операторы \hat{V}_h, B и B^+ вида (2.14) – (2.16) исчерпывают весь класс обобщенных потенциалов и операторов связи каналов в (2.13), приводящих к самосопряженным операторам энергии для системы двух частиц с точечным взаимодействием.

Опишем основные свойства гамильтонианов \hat{h} и \mathbf{h} .

Исключение в задаче

$$(\hat{h} - zI)U = f, \quad f = (f^{ex}, f^{in}) \in \mathcal{H}$$

внутренней компоненты и вектора $U = (\psi, u)$, $\psi \in \hat{D}$, $u \in D_A$ приводит к уравнению во внешнем канале лишь для компоненты ψ ,

$$(2.21) \quad (-\Delta_x + v + \hat{w}(z) - z)\Psi = f^{ex} + B(zI - A)^{-1}f^{in},$$

содержащем (обобщенный) энергозависящий потенциал

$$(2.22) \quad \hat{w}(z) = \hat{V}_h + B(zI - A)^{-1}B^+ = \delta(x)w(z),$$

где функционал $w(z)$ на \hat{D} задается равенством

$$w(z) = \frac{\mu_{12}}{\mu_{11}}b + \frac{\mu_{12}}{\mu_{11}}\rho(z)a + \frac{\mu_{22}}{\mu_{11}}\rho(z)b.$$

Здесь $\rho(z) = \langle r_A(z)\theta, \theta \rangle$, $r_A(z) = (A - zI)^{-1}$.

Резольвента $r(z)$ оператора h ,

$$r(z) = (h - z)^{-1} \equiv \left(\hat{h} - zI \right)^{-1} \Big|_{\mathcal{H}},$$

является операторной матрицей размерности 2×2 (по числу каналов), и она может быть выражена стандартным способом в терминах полной t -матрицы задачи

$$\hat{t}(z) = \hat{V} - \hat{V}r(z)\hat{V},$$

где $\hat{V} = \begin{pmatrix} \hat{V}_h & B \\ B^+ & 0 \end{pmatrix}$. А именно: пусть $h_0 = h_0 \oplus A$, $r_0(z) = (h_0 - zI)^{-1} = \text{diag}(r_0(z), r_A(z))$, где $r_0(z) = (h_0 - z)^{-1}$. Тогда

$$(2.23) \quad r(z) = r_0(z) - r_0(z)\hat{t}(z)r_0(z).$$

Оператор $\hat{t}(z)$ удовлетворяет уравнению Липпмана-Швингера $\hat{t}(z) = \hat{V} - \hat{V}r_0(z)\hat{t}(z)$, решая которое находим,

$$(2.24) \quad \hat{t}(z) = \frac{1}{d(z)} \begin{pmatrix} \delta(x)[\mu_{21}\rho a + (\mu_{12} + \mu_{22}\rho)b] & -\delta(x)(\cdot, \theta) \\ \theta[\mu_{21}(\mu_{11} + \mu_{12}q)a + \det \mu \cdot b] & (\mu_{21} + \mu_{22}q)\theta(\cdot, \theta) \end{pmatrix},$$

где

$$d(z) = \mu_{11} + \mu_{21}\rho + (\mu_{12} + \mu_{22}\rho)q.$$

Здесь $q(z) = \tilde{r}_0(0, 0, z)$, где через $\tilde{r}_0(x, x', z)$ обозначена непрерывная при $x \rightarrow x'$ часть $\tilde{r}_0(x, x', z) = r_0(x, x', z) - \frac{1}{4\pi|x-x'|}$ ядра резольвенты $r_0(z)$ (см. [28]).

Представление (2.24) справедливо для t -матриц $\hat{t}(z)$, отвечающих не только самосопряженному варианту (2.20), но также и общему случаю гамильтонианов (2.13) – (2.19).

При этом компонента $r(z)$ резольвенты $r(z)$ для внешнего канала, $r(z) = (h_0 - \hat{w}(z) - z)^{-1}$, выражается только через внешнюю компоненту

$$(2.25) \quad \hat{t}(z) = \delta(x) \left[\frac{\mu_{21}\rho(z)}{d(z)} + t(z) \right] b,$$

оператора $\hat{t}(z)$ (занимающего верхний левый угол матрицы (2.24)), где

$$t(z) = \frac{1}{d_0(z) + q(z)}, \quad d_0(z) = \frac{\mu_{11} + \mu_{21}\rho(z)}{\mu_{12} + \mu_{22}\rho(z)}.$$

А именно:

$$r(x, x', z) = r_0(x, x', z) - r_0(x, 0, z)\hat{t}(z)r_0(0, x', z),$$

причем

$$(2.26) \quad (\hat{w}r)(x, x', z) = (\hat{t}r_0)(x, x', z) = \delta(x)t(z)r_0(0, x', z).$$

Закрывая раздел, заметим, что если $v(x) \equiv 0$, то присутствие во внешнем канале (2.21) обобщенного потенциала $\hat{w}(z)$ равнозначно при $f^{in} = 0$ постановке граничного условия $a\Psi = \hat{w}(z)\Psi$ или, что то же самое,

$$\frac{d}{dr} \ln [r\psi(x)] \Big|_{r=0} = -4\pi d_0(z), \quad r = |x|.$$

Причем, если оператор A имеет только дискретный спектр $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_N$, то функция $\rho(z)$ дается выражением $\rho(z) = \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^{l_j} \frac{|\beta_{j,k}|^2}{\varepsilon_j - z}$, где $\beta_{j,k} = (\theta, u_{j,k})$, $u_{j,k}$ — собственные векторы A , отвечающие собственному числу ε_j и l_j — его кратность. В этом случае $d_0(z)$ оказывается рациональной R -функцией вида (1.5). При $\mu_{12} = 0$ степень её знаменателя понижается на единицу.

2.3. Спектр оператора h и свойства ядра $\hat{w}(z)r(z)$

Используя явные представления (2.24) для t -матрицы $\hat{t}(z)$ и представление (2.23) для резольвенты $r(z)$, нетрудно показать, что непрерывный спектр оператора h состоит из ветви абсолютно непрерывного спектра $[0, +\infty)$, отвечающей гамильтониану h_0 , и ветвей непрерывного спектра оператора A , если они существуют. Более того, по собственным функциям непрерывного спектра h_0 и спектральной мере гамильтониана A с помощью (2.23) легко построить непрерывную часть спектральной меры для гамильтониана h . В частности, переходя при $z = E \pm i0$, $E > 0$ в ядрах $\begin{pmatrix} r(\cdot, x', z) \\ r^{ci}(\cdot, x', z) \end{pmatrix}$ первого столбца резольвенты r к пределу $x' \rightarrow \infty$ и выделяя в их асимптотике сферическую волну,

$$\begin{pmatrix} r(\cdot, x', z) \\ r^{ci}(\cdot, x', z) \end{pmatrix} \underset{z \rightarrow \infty}{\sim} \mathcal{U}^{(\pm)}(\cdot, p) \frac{e^{\pm i\sqrt{E}|x'|}}{4\pi|x'|}, \quad p = \pm\sqrt{E}\hat{x}'$$

мы найдем волновые функции $\mathcal{U}^{(\pm)}(\cdot, p)$ непрерывного спектра гамильтониана h , отвечающие ветви $(0, +\infty)$. Согласно (2.23) и (2.24), внешняя, $\psi^{(\pm)}(x, p)$, и внутренняя, $u^{(\pm)}(p)$, составляющие волновой функции $\mathcal{U}^{(\pm)}(\cdot, p)$ даются равенствами

$$\psi^{(\pm)}(x, p) = \psi_0^{(\pm)}(x, p) - r_0(x, 0, E \pm i0)t(E \pm i0)\psi_0^{(\pm)}(0, p),$$

$$u^{(\pm)}(p) = -\frac{1}{d(E \pm i0)}r_A(E \pm i0)\theta\psi_0^{(\pm)}(0, p),$$

где $\psi_0^{(\pm)}(x, p)$ — волновые функции непрерывного спектра оператора h_0 .

Мы не будем приводить здесь соответствующие формулы для ветвей непрерывного спектра, отвечающих оператору A , поскольку будем предполагать в дальнейшем, что его спектр чисто дискретный. В этом случае волновые функции $\mathcal{U}^{(\pm)}(p)$ удовлетворяют стандартным соотношениям полноты и ортогональности [25]. Дискретный спектр $\sigma_d(h)$ оператора h совпадает с множеством полюсов по энергии z резольвенты $r(z)$, куда, согласно (2.23), (2.24) входят решения дисперсионного уравнения

$$(2.27) \quad d(z) = 0$$

и, вообще говоря, полюса резольвент $r_0(z)$ и $r_A(z)$. Простое собственное число ε оператора A — полюс $r_A(z)$ — оказывается полюсом $r(z)$, если собственный вектор u , $Au = \varepsilon u$, ортогонален θ . Кроме того, полюсами $r(z)$ оказываются кратные собственные числа оператора A (см. [22]). Кратные точки дискретного спектра внешнего гамильтониана h_0 также оказываются полюсами $r(z)$. Простые собственные числа этого оператора попадают при $\theta \neq 0$ в $\sigma_d(h)$ лишь при том условии, что его собственные функции, отвечающие этим числам, обращаются в нуль при $x = 0$. Корни уравнения (2.27) на физическом листе заведомо являются простыми, поскольку порожденные ими полюса резольвенты $r(z)$ обязаны иметь первый порядок. Более того, эти корни вещественны, поскольку $r(z)$ — резольвента самосопряженного оператора. Их исследование в рамках теории возмущений может быть проведено по той же схеме, что и в [22]–[24].

Не ограничивая общности, мы будем рассматривать далее лишь случай, когда дискретный спектр $\sigma_d(h_0)$ и $\sigma_d(A) = \sigma(A)$ операторов h_0 и A однократен, а вектор θ — порождающий элемент для A , то есть $(\theta, u) \neq 0$ для всех собственных векторов u оператора A . Будем считать также, что собственные функции дискретного спектра оператора h_0 не обращаются в нуль при $x = 0$. При этих условиях $\sigma_d(h)$ совпадает с множеством вещественных корней уравнения (2.27), причем $\sigma_d(h) \cap \sigma_d(h_0) = \sigma_d(h) \cap \sigma_d(A) = \emptyset$. Отметим, что эти корни неположительны, поскольку при $z = E \pm i0$, $E > 0$, функция $\rho(z)$ вещественна, а мнимая часть $q(z)$, выражающаяся через скачок функции Грина $r_0(x, x', z)$ при переходе разреза, отлична от нуля

$$(2.28) \quad \text{Im } q(E \pm i0) = \pm \frac{\sqrt{E}}{16\pi^2} \int_{S^2} d\hat{p} \left| \psi_0(0, \sqrt{E}\hat{p}) \right|^2 \neq 0.$$

Действительно, уравнение (2.27) при условиях (2.20) равносильно уравнению

$$(2.29) \quad \frac{\mu_{11} + \mu_{12}q}{\mu_{21} + \mu_{22}q} = -\rho, \quad \rho(E) \in \mathbf{R}$$

Благодаря (2.20) отображение $q \mapsto \frac{\mu_{11} + \mu_{12}q}{\mu_{21} + \mu_{22}q}$ является автоморфизмом верхней полуплоскости. Поэтому, в силу (2.28), решений $z = E \pm i0$ при $E > 0$ у уравнения (2.29) нет. Мы будем предполагать также, что и точка $z = 0$ не является корнем $d(z)$. Комплексные корни функции $d(z)$ (на нефизическом листе) являются резонансами.

Обозначим вещественные корни (2.27) через λ_j , $j = 1, 2, \dots, n$, $\lambda_j < 0$, $\sigma_d(h) = \{\lambda_j\}$. Вычисляя вычеты функции Грина

$$\text{Res}_{z=\lambda_j} r(x, x', z) = r_0(x, 0, \lambda_j) \frac{\mu_{12} + \mu_{22}\rho(\lambda_j)}{\frac{d}{dz}d(z)} \Big|_{z=\lambda_j} r_0(0, x', \lambda_j),$$

найдем, что собственному числу $z = \lambda_j$ отвечает собственный вектор $\mathcal{U}_j = (\psi_j, u_j)$ с внешней компонентой

$$\psi_j(x) = r_0(x, 0, \lambda_j) N_j^{-1},$$

где $N_j = \sqrt{-d'(\lambda_j)/(\mu_{12} + \mu_{22}\rho(\lambda_j))}$. Внутренняя компонента u_j вычисляется аналогично.

Завершая раздел, приведем важное свойство ядра $(\hat{w}r)(x, x', z)$, состоящее в том, что оно не имеет положительных полюсов по z . Мы обращаем внимание на это обстоятельство ввиду того, сам по себе оператор $\hat{w}(z)$ имеет особенности в точках $z \in \sigma_d(A)$, которые могут находиться и на положительной полуоси. Поэтому их отсутствие у произведения $\hat{w}(z)r(z)$ нужно специально показать. Чтобы сделать это, перепишем (2.26) в виде

$$(2.30) \quad (\hat{w}r)(x, x', z) = \delta(x) \frac{\mu_{12} + \mu_{22}\rho}{\mu_{11} + \mu_{12}q + (\mu_{21} + \mu_{22}q)\rho} r_0(0, x', z).$$

Особенностями при $z \in \sigma_d(A)$ потенциал $\hat{w}(z)$ обязан присутствию в (2.22) функции $\rho(z)$, имеющей в точках $z \in \sigma_d(A)$ полюса. В выражении же (2.30) эта функция входит как в числитель, так и в знаменатель, благодаря чему названные особенности сокращаются. Отметим, что точно также "сокращаются" и полюса $q(z)$ и $r_0(0, x', z)$.

Сформулированное свойство ядра $\hat{w}r$ является существенным при исследовании уравнений Фаддеева в разделе 3.3.

В ядре $(\hat{w}r_0)(x, x', z)$ выделим слагаемые, отвечающие дискретному и непрерывному спектру оператора h :

$$(2.31) \quad (\hat{w}r)(x, x', z) = (\hat{w}r^d)(x, x', z) + (\hat{w}r^c)(x, x', z),$$

где $(\hat{w}r^d)(x, x', z) = \delta(x) \sum_{j=1}^n \frac{1}{\lambda_j - z} \frac{\psi_j(x')}{N_j}$. Ядро $(\hat{w}r^c)(x, x', z)$ является гладкой функцией переменной $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^+$, обладающей асимптотическим представлением

$$(2.32) \quad (\hat{w}r^c)(x, x', z) \underset{z \rightarrow \infty}{\sim} \delta(x) t^c(z) \psi_0^{(+)}(0, -\sqrt{z}\hat{x}') \frac{e^{i\sqrt{z}|x'|}}{4\pi|x'|}.$$

Здесь через $t^c(z)$ обозначена гладкая часть функции $t(z)$, получаемая после вычитания из $t(z)$ вкладов полюсов $z = \lambda_j$, $j = 1, 2, \dots, n$, и через $\psi_0^{(+)}(\cdot, -\sqrt{z}\hat{x}')$ — аналитическое продолжение волновой функции $\psi_0^{(+)}(\cdot, p)$ по параметру $z = p^2$ в комплексную плоскость. Отметим, что $(\hat{w}r^c)(x, x', z) = \delta(x)(wr^c)(x', z)$, где

$$(2.33) \quad (wr^c)(x', z) = t^c(z)r_0(0, x', z).$$

2.4. Два класса моделей точечных взаимодействий

Напомним, что модели типа (2.18, 2.19) разделяются на два класса, качественно различающихся высокоэнергетическим поведением матриц рассеяния [7], [21]. Примем временно $v = 0$ (при этом $q(z) = \frac{i\sqrt{z}}{4\pi}$). Тогда матрица рассеяния $s(\hat{k}, \hat{k}', z) = \delta(\hat{k}, \hat{k}') - \frac{i}{8\pi^2} t(z) = \delta(\hat{k}, \hat{k}') - \frac{i}{8\pi^2} \frac{1}{d_0(z) + \frac{i\sqrt{z}}{4\pi}}$, $z = E \pm i0$, $E > 0$, $\hat{k}, \hat{k}' \in S^2$ оказывается нетривиальной только в s -состоянии, где она равна

$$s(z) = \frac{4\pi d_0(z) - i\sqrt{z}}{4\pi d_0(z) + i\sqrt{z}}$$

Поведение $s(E \pm i0)$ при $E \rightarrow +\infty$ определяется асимптотическими свойствами функции $d_0(z)$. Здесь естественно выделяются два случая:

$$(2.34) \quad A) \quad \mu_{12} \neq 0,$$

$$(2.35) \quad R) \quad \mu_{12} = 0.$$

В случае (A), когда $\mu_{12} \neq 0$, функция $d_0(z)$ является ограниченной функцией параметра z , так как

$$(2.36) \quad \rho(z) \underset{z \rightarrow 0}{\sim} \frac{c}{z}$$

Соответствующая S -матрица обладает "аномальным" высокоэнергетическим поведением $s(E + i0) \underset{E \rightarrow +\infty}{\rightarrow} -1$. Аналогичное утверждение справедливо и при $v \neq 0$, поскольку

$$(2.37) \quad q(z) = \frac{i\sqrt{z}}{4\pi} + O(1)$$

при $z \rightarrow \infty$ (см. [28]).

Класс (A) моделей (2.18, 2.19) содержит в себе стандартные взаимодействия нулевого радиуса (2.1, 2.2) при $\theta = 0$, $\gamma = -\mu_{12}/\mu_{11}$. Во всех вариантах (A) гамильтониан внешнего канала содержит "стандартный" обобщенный потенциал нулевого радиуса \hat{V}_λ вида (2.9).

Напротив, в случае (R), то есть при $\mu_{12} = 0$, функция d_0 допускает представление (при $\theta \neq 0$)

$$d_0(z) = \kappa z + \bar{d}_0(z)$$

с константой $\kappa > 0$ и ограниченной при $z \rightarrow \infty$ функцией $\bar{d}_0(z)$. В этом случае поведение матрицы рассеяния "регулярно": $s(E + i0) \underset{E \rightarrow +\infty}{\rightarrow} 1$. Другими словами, за "аномальное" высокоэнергетическое поведение матрицы рассеяния ответственен лишь потенциал \hat{V}_λ . Именно эти потенциалы определяют жесткость стандартной модели точечных взаимодействий, приводящей к неполуограниченным операторам энергии в задаче трех частиц, а так же к "плохим" свойствам варианта уравнений Фаддеева (см. [9]) для этой модели — уравнений Скорнякова — Тер-Мартirosяна [8]. Полуограниченность трехчастичных гамильтонианов с парными точечными взаимодействиями типа (2.13) установлена лишь при $\hat{V}_\lambda = 0$ во всех парных подсистемах [21]. Ниже, в разделе 3.3, мы покажем, что при всех парных $\hat{V}_\lambda = 0$ уравнения Фаддеева оказываются фредгольмовыми.

3. Система трех частиц с точечными взаимодействиями

3.1. Гамильтониан H_α

Для описания системы трех частиц мы будем использовать обычные относительные координаты x_α, y_α , $\alpha = 1, 2, 3$, которые, например, при $\alpha = 1$ выражаются через координаты r_i частиц и их массы m_i по формулам [25]

$$x_1 = \left(\frac{2m_2 m_3}{m_2 + m_3} \right)^{1/2} (r_2 - r_3),$$

$$y_1 = \left[\frac{2m_1(m_2 + m_3)}{m_1 + m_2 + m_3} \right]^{1/2} \left(r_1 - \frac{m_2 r_2 + m_3 r_3}{m_2 + m_3} \right).$$

Относительные координаты будем объединять в шестимерные векторы $X = (x_\alpha, y_\alpha)$. Выбор определенной пары координат фиксирует декартову систему координат в \mathbb{R}^6 . Переход от одних координат к другим осуществляется преобразованием поворота в \mathbb{R}^6 :

$$\begin{pmatrix} x_\alpha \\ y_\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{\alpha\beta} & s_{\alpha\beta} \\ -s_{\alpha\beta} & c_{\alpha\beta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_\beta \\ y_\beta \end{pmatrix},$$

где коэффициенты $c_{\alpha\beta}$, $s_{\alpha\beta}$ зависят лишь от масс частиц [25].

При изучении системы трех частиц сначала рассмотрим случай, когда взаимодействуют только две частицы из фиксированной пары α . Обобщенный оператор энергии \hat{H}_α для этой системы получается из парного гамильтониана h_α по формуле [25] (см. также [24])

$$\hat{H}_\alpha = \hat{h}_\alpha \otimes I_{y_\alpha} + I_x \otimes (-\Delta_{y_\alpha})$$

Здесь I_{y_α} , и I_x — тождественные операторы соответственно в гильбертовом пространстве относительного движения третьей частицы $L_2(\mathbb{R}_{y_\alpha}^3)$ и в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}_\alpha^{(2)}$, отвечающем подсистеме α . Под \hat{h}_α понимаем обобщенный гамильтониан (2.13). Оператор \hat{H}_α действует в гильбертовом пространстве $\mathcal{G}_\alpha = \mathcal{H}_\alpha \otimes L_2(\mathbb{R}_{y_\alpha}^3)$, представляющем собой сумму двух пространств, $\mathcal{G}_\alpha = \mathcal{G}^{ex} \oplus \mathcal{G}_\alpha^{in}$, где $\mathcal{G}^{ex} = L_2(\mathbb{R}^6)$, $\mathcal{G}_\alpha^{in} = L_2(\mathbb{R}_{y_\alpha}^3, \mathcal{H}_\alpha^{in})$. Векторы $\mathcal{U} \in \mathcal{G}_\alpha$, как и прежде, имеют две компоненты: $\mathcal{U} = (\Psi, u_\alpha)$, $\Psi \in \mathcal{G}^{ex}$, $u_\alpha \in \mathcal{G}_\alpha^{in}$. Оператор \hat{H}_α определен в \mathcal{G}_α на классе

$$(3.1) \quad \hat{D}_\alpha = (\hat{D}_\alpha \oplus D_{A_\alpha}) \otimes W_2^2(\mathbb{R}_{y_\alpha}^3) = \hat{D}_\alpha^{ex} \oplus D_\alpha^{in},$$

где $\hat{D}_\alpha^{ex} = \hat{D}_\alpha \otimes W_2^2(\mathbb{R}_{y_\alpha}^3)$ и $D_\alpha^{in} = D_{A_\alpha} \otimes W_2^2(\mathbb{R}_{y_\alpha}^3)$. Множество \hat{D}_α состоит из векторов $\mathcal{U} = (\Psi, u_\alpha)$, внешние компоненты Ψ , $\Psi \in \hat{D}_\alpha^{ex}$ которых обладают асимптотическим поведением

$$(3.2) \quad \Psi(X) \underset{x_\alpha \rightarrow 0}{\sim} \frac{a_\alpha(y_\alpha)}{4\pi|x|} + b_\alpha(y_\alpha) + o(1),$$

$a_\alpha, b_\alpha \in W_2^2(\mathbb{R}_{y_\alpha}^3)$, и в то же время

$$\Psi(X) \in W_2^2(\mathbb{R}^6 \setminus \mathcal{M}_\alpha),$$

где $\mathcal{M}_\alpha = \{X \in \mathbb{R}^6 : x_\alpha = 0\}$ — трехмерная гиперплоскость в \mathbb{R}^6 , на которой сосредоточены точечные взаимодействия в подсистеме α . Внутренние компоненты u_α являются элементами $D_\alpha^{in} = W_2^2(\mathbb{R}_{y_\alpha}^3, D_{A_\alpha})$ или, при отождествлении $\mathbb{R}_{y_\alpha}^3$ и \mathcal{M}_α , элементами $W_2^2(\mathcal{M}_\alpha, D_{A_\alpha})$. Гамильтониан \hat{H}_α действует на (3.1) как матрица

$$(3.3) \quad \hat{H}_\alpha = \begin{pmatrix} -\hat{\Delta}_X + \hat{V}_h^{(\alpha)} + v_\alpha & B_\alpha \\ B_\alpha^+ & A_\alpha - \Delta_{y_\alpha} \end{pmatrix}.$$

Здесь $-\hat{\Delta}_X = -\hat{\Delta}_{x_\alpha} - \Delta_{y_\alpha}$ — оператор Лапласа в \mathbb{R}^6 , понимаемый в смысле обобщенных функций над $C_0^\infty(\mathbb{R}^6)$.

Действие операторов связи каналов, B_α и B_α^+ по-прежнему описывается формулами (2.15) и (2.16). Однако функционалы a_α и b_α , задаваемые соотношениями (2.5), (2.6)

приобретают теперь смысл операторов, действующих из \hat{D}_α^{ex} в $L_2(\mathcal{M}_\alpha)$ и сопоставляющих функциям (3.2) коэффициенты в асимптотике соответственно $a_\alpha(y_\alpha)$ и $b_\alpha(y_\alpha)$.

Как и в задаче двух частиц, требование регулярности внешней компоненты f^{ex} вектора $f = (\hat{H}_\alpha - z)\mathcal{U}$, $f = (f^{ex}, f^{in})$; $f^{ex} \in L_2(\mathbb{R}^6)$, $f^{in} \in \mathcal{G}_\alpha^{in}$, при $\mathcal{U} \in \hat{D}_\alpha$, $\mathcal{U} = (\Psi, u_\alpha)$ приводит к двухканальному уравнению Шредингера

$$(3.4) \quad \begin{cases} (-\Delta_X + v_\alpha - z)\Psi = f^{ex} \\ \theta_\alpha \left(\mu_{21}^{(\alpha)} a_\alpha + \mu_{22}^{(\alpha)} b_\alpha \right) \Psi + (A_\alpha - \Delta_{y_\alpha} - z)u_\alpha = f^{in} \end{cases}$$

и граничным условиям

$$(3.5) \quad \left(\left[\mu_{11}^{(\alpha)} a_\alpha + \mu_{12}^{(\alpha)} b_\alpha \right] \Psi \right) (y_\alpha) = (u_\alpha(y_\alpha), \theta_\alpha).$$

Система (3.4) отличается от (2.17) лишь добавлением в каждое из уравнений кинетической энергии свободного относительного движения дополнительной частицы. Так что обобщенный гамильтониан (3.3) эквивалентен самосопряженному оператору

$$(3.6) \quad H_\alpha \begin{pmatrix} \Psi \\ u_\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-\Delta_X + v_\alpha)\Psi \\ (A_\alpha - \Delta_{y_\alpha})u_\alpha + \theta_\alpha \left(\mu_{21}^{(\alpha)} a_\alpha + \mu_{22}^{(\alpha)} b_\alpha \right) \Psi \end{pmatrix},$$

область определения $\mathcal{D}(H_\alpha)$ которого состоит из элементов \hat{D}_α , удовлетворяющих условию (3.5).

Исключение в задаче $(\hat{H}_\alpha - z)\mathcal{U} = f$ компоненты, отвечающей внутреннему каналу, приводит во внешнем канале к уравнению

$$(-\hat{\Delta}_X + v_\alpha + \hat{W}_\alpha(z) - z)\Psi = f^{ex} + B_\alpha(zI - A_\alpha + \Delta_{y_\alpha})^{-1} f^{in}$$

с обобщенным энергозависимым потенциалом

$$(3.7) \quad \hat{W}_\alpha(z) = \hat{V}_h^{(\alpha)} + B_\alpha(zI - A_\alpha + \Delta_{y_\alpha})^{-1} B_\alpha^+ = \hat{w}_\alpha(z + \Delta_{y_\alpha}),$$

отличающимся от (2.22) только кинетическим сдвигом $-\Delta_{y_\alpha}$. При этом $\hat{W}_\alpha = \delta(x_\alpha)W_\alpha(z)$, где $W_\alpha(z) = w_\alpha(z + \Delta_{y_\alpha})$. Потенциал \hat{W}_α представляет собой свертку,

$$(3.8) \quad \hat{W}_\alpha(y_\alpha - y'_\alpha, z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_\alpha} d\zeta \hat{w}_\alpha(\zeta) g_0(y - y', z - \zeta),$$

где интегрирование ведется по контуру, охватывающему в отрицательном направлении спектр оператора A_α . По предположению спектр A_α дискретный, и интеграл (3.8) может быть легко найден по вычетам. Поскольку в гамильтонианах (3.3) и (3.6) делаются переменные, относящиеся к паре α и дополнительной частице, резольвента $R_\alpha(\hat{H}_\alpha - z)^{-1}$ оператора H_α также является сверткой

$$(3.9) \quad R_\alpha(y_\alpha - y'_\alpha, z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_\alpha} d\zeta r_\alpha(\zeta) g_0(y_\alpha - y'_\alpha, z - \zeta),$$

где $r_\alpha(\zeta)$ — резольвента парного гамильтониана h_α . Контур Γ_α охватывает в отрицательном направлении спектр h_α . Обозначим через $R_\alpha(z)$ внешнюю компоненту резольвенты $R_\alpha(z)$,

выражающуюся согласно (3.9) через внешнюю компоненту $g_\alpha(z)$ парной резольвенты $g_\alpha(z)$. Опишем некоторые свойства ядер $(W_\alpha R_\alpha)(X, X', z)$

$$(3.10) \quad W_\alpha R_\alpha(y_\alpha - y'_\alpha, z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_\alpha} d\zeta (w_\alpha r_\alpha)(\zeta) g_0(y_\alpha - y'_\alpha, z - \zeta),$$

которые мы будем использовать в следующем разделе при исследовании уравнений Фаддева. Прежде всего выделим в (3.10), пользуясь (2.31), вклады дискретного и непрерывного спектров оператора h_α

$$(W_\alpha R_\alpha)(y_\alpha, X', z) = \delta(x_\alpha) [(W_\alpha R_\alpha^d)(x'_\alpha, y_\alpha - y'_\alpha, z) + (W_\alpha R_\alpha^c)(x'_\alpha, y_\alpha - y'_\alpha, z)],$$

где

$$(3.11) \quad (W_\alpha R_\alpha^c)(y_\alpha, X', z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_\alpha} d\zeta (w_\alpha r_\alpha^c)(x'_\alpha, \zeta) g_0(y_\alpha - y'_\alpha, z - \zeta),$$

$$(W_\alpha R_\alpha^d)(y_\alpha, X', z) = \sum_{j=1}^{n_\alpha} \frac{1}{N_j} \psi_{\alpha,j}(x'_\alpha) g_0(y_\alpha - y'_\alpha, z - \lambda_j).$$

Нам понадобится асимптотика ядра $(W_\alpha R_\alpha^c)(y_\alpha, X', z)$ при $x'_\alpha \rightarrow \infty$. Чтобы вычислить ее, воспользуемся соотношением (2.32) и методом перевала [29]. В результате получим следующее асимптотическое представление

$$(3.12) \quad (W_\alpha R_\alpha^c)(y_\alpha, X', z) \underset{|x'_\alpha| \rightarrow \infty}{\sim} c_0(z) \Phi_\alpha(z \cos^2 \omega_\alpha, \hat{x}'_\alpha) \frac{\exp\{i\sqrt{z} L_{\alpha 0}(y_\alpha, X')\}}{L_{\alpha 0}^{5/2}(y_\alpha, X')},$$

где $L_{\alpha 0}(y_\alpha, X') = \sqrt{|x'_\alpha|^2 + (y_\alpha - y'_\alpha)^2}$ - эйконал [25], отвечающий распространению луча из точки $(0, y_\alpha)$ в точку (x'_α, y'_α) , $c_0(z) = \frac{1}{4\pi} \left(i \frac{\sqrt{z}}{2\pi} \right)^{3/2}$, $\cos \omega_\alpha = |x_\alpha| / L_{\alpha 0}$. Функция Φ_α имеет вид

$$\Phi_\alpha(z, \hat{x}') = \tilde{t}_\alpha(z) \psi_{0,\alpha}^{(+)}(0, -\sqrt{z} \hat{x}').$$

Здесь через $\psi_{0,\alpha}^{(+)}(x, p)$ обозначена волновая функция непрерывного спектра оператора $h_0^{(\alpha)} = -\Delta_{x_\alpha} + v_\alpha(x_\alpha)$.

Аналогичными свойствами обладает также и ядро $(v_\alpha R_\alpha)(X, X', z)$. Мы не будем приводить для него соответствующих соотношений, поскольку они имеют стандартный вид [25] и по своей структуре близки к (3.11) и (3.12).

При исследовании сингулярностей ядра $(W_\alpha R_\alpha^c)(y_\alpha, X', z)$ при $x'_\alpha \rightarrow 0$ воспользуемся представлением (2.33) для функции $(w_\alpha r_\alpha^c)(x'_\alpha, z)$. Согласно этому представлению

$$(3.13) \quad W_\alpha R_\alpha^c(y_\alpha, X', z) = \int_{\mathcal{M}_\alpha} dy''_\alpha T_\alpha^c(y_\alpha - y''_\alpha, z) R_0^{(\alpha)}(X'', X', z), \quad X'' = (0, y''_\alpha),$$

где $R_0^{(\alpha)}(X, X', z)$ - ядро резольвенты $R_0^{(\alpha)}(z) = (h_0^{(\alpha)} + \Delta_{y_\alpha} - z)^{-1}$ оператора $h_0^{(\alpha)} - \Delta_{y_\alpha} = -\Delta_X + v_\alpha$,

$$(3.14) \quad T_\alpha^c(y_\alpha - y'_\alpha, z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_\alpha^c} d\zeta t_\alpha(\zeta) g_0(y_\alpha - y'_\alpha, z - \zeta).$$

Интегрирование в (3.14) ведется по контуру Γ_α^c , охватывающему в отрицательном положении положительную полуось - непрерывный спектр оператора h_α .

Чтобы выяснить асимптотическое поведение при $y_\alpha - y'_\alpha \rightarrow 0$ ядра $T_\alpha^c(y_\alpha - y'_\alpha, z)$, стянем контур интегрирования в (3.14) к берегам разреза по полуоси $[0, +\infty)$. Согласно (2.12) главная сингулярность этого ядра при $y_\alpha - y'_\alpha \rightarrow 0$ отвечает вкладу в интеграл (3.14) от окрестности $(+\infty)$, определяемому интегралами вида

$$(3.15) \quad \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{|y_\alpha - y'_\alpha|} \int_{\Lambda} d\zeta t_\alpha(\zeta \pm i0) \exp(-\sqrt{\zeta} |y_\alpha - y'_\alpha|),$$

где Λ - большая положительная константа, $\Lambda \gg |z|$. Как и при рассмотрении высокоэнергетического поведения двухчастичных матриц рассеяния в разделе 2.4, здесь снова выделяются два случая (A) и (R), определяемых соотношениями (2.34) и (2.35). Согласно (2.36) и (2.37) функция $t_\alpha(\zeta \pm i0)$ при $\zeta \rightarrow +\infty$ имеет асимптотику

$$(3.16) \quad t_\alpha(\zeta \pm i0) \sim \frac{c}{\sqrt{\zeta}}$$

в случае (A) и

$$(3.17) \quad t_\alpha(\zeta \pm i0) \sim \frac{c}{\zeta}$$

в случае (R). Значения констант c зависят от конкретного варианта модели (2.13-2.16), а также от знака при $i0$. Используя (3.16) и (3.17), легко показать, что слагаемые (3.15) дают ядру $T_\alpha^c(y_\alpha - y'_\alpha, z)$ сингулярности при $y_\alpha - y'_\alpha \rightarrow 0$ типа

$$(3.18) \quad \frac{1}{|y_\alpha - y'_\alpha|^2}, \quad \text{случай (A),}$$

или

$$(3.19) \quad \frac{1}{|y_\alpha - y'_\alpha|} \ln |y_\alpha - y'_\alpha|, \quad \text{случай (R).}$$

Интеграл (3.14) по конечной части контура Γ_α^c привносит в ядро $T_\alpha^c(y_\alpha - y'_\alpha, z)$ более слабую сингулярность типа $|y_\alpha - y'_\alpha|^{-1}$, одну и ту же для обоих случаев. Перейдем к изучению собственно ядра $W_\alpha R_\alpha^c(y_\alpha, X', z)$ при $x'_\alpha \rightarrow 0$. Согласно (3.13) это ядро представляет собой пример потенциала простого слоя на \mathcal{M}_α

$$(3.20) \quad (Uf)(X) = \int_{\mathcal{M}_\alpha} dy''_\alpha f(y''_\alpha) R_0^{(\alpha)}(X'', X', z), \quad X'' = (0, y''_\alpha)$$

с сингулярной при $y''_\alpha = y_\alpha$ плотностью $f_\alpha = T_\alpha^c(y_\alpha - y''_\alpha, z)$. Функция Грина $R_0^{(\alpha)}(X'', X', z)$, задающая потенциал (3.20), имеет при $|X'' - X'| \rightarrow 0$ особенность [28]

$$\frac{1}{4\pi^3 |X'' - X'|^4}.$$

Поскольку $\dim \mathcal{M}_\alpha = 3$, эта особенность при $x'_\alpha \rightarrow 0$ оказывается неинтегрируемой. По этой причине потенциал (3.20) является сингулярным при $x'_\alpha \rightarrow 0$ даже для непрерывной

плотности f . А именно, если функция $f \in L_2(\mathcal{M}_\alpha)$ непрерывна в окрестности точки $y'_\alpha \in \mathcal{M}_\alpha$, то потенциал (3.20) обладает при $x'_\alpha \rightarrow 0$, $X' = (x'_\alpha, y'_\alpha)$ асимптотикой⁵

$$(3.21) \quad (Uf)(X') = \frac{1}{4\pi} \frac{f(y'_\alpha)}{|x'_\alpha|} + O(1).$$

Естественно, что в случае сингулярной плотности $f(y'_\alpha)$, как это имеет место в представлении (3.13) для ядра $W_\alpha R_\alpha^c(y_\alpha, X', z)$, особенность потенциала простого слоя (3.20) усиливается вблизи сингулярных точек f . Чтобы выяснить, каков вклад в (3.20) сингулярностей типа (3.18), (3.19), достаточно выделить в (3.13) и оценить интеграл лишь по окрестности $|y'_\alpha - y_\alpha| \leq C$, $C > 0$, точки y_α , полагая при этом, что $|x'_\alpha|$, $|y_\alpha - y'_\alpha| \rightarrow 0$. Интеграл по остающейся части $|y'_\alpha - y_\alpha| > C$ области интегрирования \mathcal{M}_α является гладкой ограниченной функцией. В результате мы приходим к следующему утверждению.

При $|x'_\alpha|$, и $|y_\alpha - y'_\alpha| \rightarrow 0$ ядро $(W_\alpha R_\alpha^c(y_\alpha, X', z))$ допускает оценку

$$(3.22) \quad |W_\alpha R_\alpha^c(y_\alpha, X', z)| \leq \frac{C}{|y_\alpha - y'_\alpha|^\nu (|x'_\alpha| + |y_\alpha - y'_\alpha|) |x'_\alpha|},$$

где в случае (A) степень $\nu = 1$. В случае (R) в качестве ν можно взять любое сколь угодно малое число $\epsilon > 0$. При этом $C = C(\epsilon)$.

3.2. Полный гамильтониан H

Если внутренние каналы имеются в каждой парной подсистеме, зададим обобщенный гамильтониан системы трех частиц как операторную матрицу (см. [24])

$$(3.23) \quad \hat{H} = \begin{pmatrix} -\hat{\Delta}_X + \sum_{\alpha=1}^3 (\hat{V}_\alpha^{(\alpha)} + v_\alpha) & B_1 & B_2 & B_3 \\ B_1^+ & A_1 - \Delta_{v_1} & 0 & 0 \\ B_2^+ & 0 & A_2 - \Delta_{v_2} & 0 \\ B_3^+ & 0 & 0 & A_3 - \Delta_{v_3} \end{pmatrix},$$

действующую в гильбертовом пространстве $\mathcal{G} = \mathcal{G}^{ex} \oplus \bigoplus_{\alpha=1}^3 \mathcal{G}_\alpha^{in}$. Гамильтониан \hat{H} действует в \mathcal{G} на множестве $\hat{D} = \hat{D}^{ex} \oplus \bigoplus_{\alpha=1}^3 \hat{D}_\alpha^{in}$, где теперь $\hat{D}_\alpha^{in} = D_{A_\alpha} \otimes W_2^2(\mathbb{R}_\nu^3 \setminus \{0\})$. Множество \hat{D}^{ex} состоит из функций $\Psi \in W_2^2\left(\mathbb{R}^6 \setminus \bigcup_{\beta=1}^3 \mathcal{M}_\beta\right)$, имеющих асимптотики (3.2) при каждом $\alpha = 1, 2, 3$ с коэффициентами $a_\alpha, b_\alpha \in W_2^2(\mathbb{R}_\nu^3 \setminus \{0\})$. Сама структура матрицы (3.23) указывает на истинно парный (в отличие от [7], [20]) характер включения точечных взаимодействий в гамильтониан \hat{H} .

Состояния системы описываются четырехкомпонентными векторами U из гильбертова пространства \mathcal{G} , $U = (\Psi, u_1, u_2, u_3)$, $\Psi \in \mathcal{G}^{ex}$, $u_\alpha \in \mathcal{G}^{in}$.

Выясним, к каким условиям на $U \in \hat{D}$ приводит требование регулярности его образа $\hat{H}U$. Поскольку на функции $\Psi \in \hat{D}^{ex}$ обобщенный лапласиан $\hat{\Delta}_X$ действует в соответствии

⁵Ввиду вложения $W_2^2(\mathbb{R}^3) \subset C(\mathbb{R}^3)$ эта асимптотика позволяет дать явное описание [21] области определения $\mathcal{D}(H_\alpha)$ оператора H_α , а также области определения полного гамильтониана системы трех частиц (см. раздел 3.2) в терминах потенциалов простого слоя на гиперплоскостях \mathcal{M}_α .

с равенством

$$-\hat{\Delta}_X \Psi = -\Delta_X \Psi + \sum_{\alpha=1}^3 \delta(x_\alpha) a_\alpha(y_\alpha),$$

сингулярная составляющая внешней компоненты образа $\hat{H}U$ равна

$$\sum_{\alpha=1}^3 \delta(x_\alpha) \left[a_\alpha(y_\alpha) + \frac{\mu_{12}^{(\alpha)}}{\mu_{11}^{(\alpha)}} b_\alpha - \frac{1}{\mu_{11}^{(\alpha)}} (u_\alpha, \theta_\alpha) \right].$$

Следовательно, отсутствие сингулярной компоненты равносильно выполнению граничных условий (3.5) при всех $\alpha = 1, 2, 3$. Эти граничные условия выделяют в \hat{D} область определения $\mathcal{D}(H)$ оператора H , понимаемого в обычном смысле и соответствующего регулярной составляющей $\hat{H}U$.

Оператор H действует на $\mathcal{D}(H)$ по формуле

$$(3.24) \quad H_\alpha U = \begin{pmatrix} \left(-\Delta_X + \sum_{\alpha} v_\alpha \right) \Psi \\ \bigoplus_{\alpha=1}^3 \left[(A_\alpha - \Delta_{v_\alpha}) u_\alpha + \theta_\alpha \left(\mu_{21}^{(\alpha)} a_\alpha + \mu_{22}^{(\alpha)} b_\alpha \right) \right] \Psi \end{pmatrix}.$$

Проверка симметричности этого оператора на $\mathcal{D}(H)$ может быть проведена непосредственно. В силу (3.21) описание (3.5), (3.24) оператора H эквивалентно (при $v_\alpha \equiv 0$, $\alpha = 1, 2, 3$) описанию трехчастичного гамильтониана $H^{(3)}$ с парным взаимодействием из статьи [21], где установлено, что при выполнении условий, аналогичных (2.35), последний является оператором, полуограниченным снизу. Почти буквально повторяя доказательство соответствующего утверждения ([21], Теорема 2.1), нетрудно установить, что оператор H также полуограничен снизу, в том числе и при $v_\alpha \neq 0$, если все $\mu_{12}^{(\alpha)} = 0$, $\alpha = 1, 2, 3$. Более того, на $\mathcal{D}(H)$ он самосопряжен.

Всюду ниже, если не оговаривается специально, мы рассматриваем именно этот вариант оператора H , отвечающий парным точечным взаимодействиям типа (R).

Изучение спектральных свойств оператора H сводится к исследованию строения и аналитических свойств его резольвенты $\mathbf{R}(z) = (H - z)^{-1}$. Резольвента $\mathbf{R}(z)$ представляет собой операторную матрицу размерности 4×4 с компонентами R_{ab} ($a, b = 0, 1, 2, 3$), где индексы $a, b = 1, 2, 3$ соответствуют внутренним каналам, а индексы $a, b = 0$ — внешнему. Повторяя рассуждения из [24], можно показать, что все его компоненты явно, в терминах парных подсистем, восстанавливаются по внешней компоненте $R_{00}(z)$. Таким образом, для того, чтобы исследовать резольвенту $\mathbf{R}(z)$, достаточно исследовать лишь ее компоненту $R_{00}(z)$. Для сокращения записи индексы в обозначениях этой компоненты будем опускать, полагая $R(z) \equiv R_{00}(z)$.

3.3. Интегральные уравнения Фаддеева

Резольвента $\mathbf{R}(z)$ подчиняется уравнению

$$(3.25) \quad (\hat{H} - z) \mathbf{R}(z) = I.$$

Чтобы получить отсюда замкнутые уравнения для $R(z)$, перепишем (3.25) в виде системы уравнений для компонент $R_{ab}(z)$, $a, b = 0, 1, 2, 3$, которая распадается на четыре отдельные

системы для компонент с фиксированным b . В системе для $R_{ab}(z)$ при $b = 0$ исключим компоненты $R_{\alpha 0}(z)$, $\alpha = 1, 2, 3$. В результате придем к уравнению для $R(z)$

$$(3.26) \quad \left[-\hat{\Delta}_X + \sum_{\alpha} (v_{\alpha} + \hat{W}_{\alpha}(z)) - z \right] R(X, X', z) = \delta(X - X'),$$

содержащему энергозависящие потенциалы (3.7).

Из (3.26) следует, что $R(z)$ подчиняется уравнению Липпмана-Швингера

$$(3.27) \quad R(z) = R_0(z) - R_0(z) \sum_{\beta} [\hat{W}_{\beta}(z) + v_{\beta}] R(z),$$

где $R_0(z)$ – свободная функция Грина, $R_0(z) = (-\Delta_X - z)^{-1}$. Само по себе это уравнение нефредгольмово и поэтому непригодно для исследования оператора $R(z)$. Причины нефредгольмовости те же, что и в случае регулярных потенциалов (см. [25]). Чтобы сделать уравнение (3.27) фредгольмовым, его необходимо перестроить.

В соответствии с представлением взаимодействия в виде суммы обобщенного и регулярного слагаемых, введем в рассмотрение операторы $\hat{M}_{\alpha}(z) \equiv \hat{W}_{\alpha}(z)R(z)$ и $m_{\alpha}(z) = v_{\alpha}R(z)$, $\alpha = 1, 2, 3$. Функция Грина $R(z)$ выражается через $\hat{M}_{\alpha}(z)$ и $m_{\alpha}(z)$ по формуле

$$R(z) = R_0(z) - R_0(z) \sum_{\alpha} [\hat{M}_{\alpha}(z) + m_{\alpha}(z)].$$

Чтобы найти уравнения для \hat{M}_{α} и m_{α} , подействуем на обе части (3.27) операторами \hat{W}_{α} и v_{α} . В получившихся после этого уравнениях выделим, следуя схеме Фаддеева [25], диагональную часть и обратим затем оператор, ей отвечающий, на основании тождества

$$\begin{pmatrix} I + \hat{W}_{\alpha}R_0(z) & \hat{W}_{\alpha}R_0(z) \\ v_{\alpha}R_0(z) & I + v_{\alpha}R_0(z) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \hat{W}_{\alpha}R_0(z) \\ v_{\alpha}R_0(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{W}_{\alpha}R_{\alpha}(z) \\ v_{\alpha}R_{\alpha}(z) \end{pmatrix}.$$

В результате получим систему уравнений для операторов \hat{M}_{α} и m_{α} :

$$(3.28) \quad \begin{pmatrix} \hat{M}_{\alpha} \\ m_{\alpha} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{W}_{\alpha}R_{\alpha}(z) \\ v_{\alpha}R_{\alpha}(z) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \hat{W}_{\alpha}R_{\alpha}(z) \\ v_{\alpha}R_{\alpha}(z) \end{pmatrix} \sum_{\beta \neq \alpha} (\hat{M}_{\beta}(z) + m_{\beta}(z)).$$

При исследовании этих уравнений удобно выделить в ядрах \hat{M}_{α} δ -функциональные множители $\delta(x_{\alpha})$ и перейти к регулярным функциям $M_{\alpha}(y_{\alpha}, X', z)$, $\hat{M}_{\alpha}(z) = \delta(x_{\alpha})M_{\alpha}(z)$. При этом уравнения (3.28) примут вид

$$(3.29) \quad \begin{pmatrix} M_{\alpha} \\ m_{\alpha} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W_{\alpha}R_{\alpha} \\ v_{\alpha}R_{\alpha} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} W_{\alpha}R_{\alpha} \\ v_{\alpha}R_{\alpha} \end{pmatrix} \sum_{\beta \neq \alpha} (\delta_{\beta}M_{\beta} + m_{\beta}),$$

где через δ_{β} обозначен оператор умножения на δ -функцию $\delta(x_{\beta})$.

Обсудим условия, при которых уравнения (3.29) фредгольмовы. Как мы отмечали в предыдущем разделе, функции $(\hat{W}_{\alpha}R_{\alpha})(y_{\alpha}, X', z)$ обладают асимптотическим поведением (3.11), (3.12) при $x'_{\alpha} \rightarrow \infty$, характерным для ядер уравнений Фаддеева в конфигурационном пространстве, отвечающих быстроубывающим потенциалам [25] или различным вариантам

модели граничных условий [23], [27], [30]. Тем более это верно для ядер $(v_{\alpha}R_{\alpha})(X, X', z)$. Единственное отличие от стандартной ситуации состоит в том, что носителями искомым функций $M_{\alpha}(y_{\alpha}, X', z)$ по переменным y_{α} являются трехмерные гиперплоскости \mathcal{M}_{α} . Поэтому необходимо выяснить роль сингулярностей (3.22) ядер $(\hat{W}_{\alpha}R_{\alpha})(y_{\alpha}, X', z)$. Эти сингулярности проявляются лишь в точке тройного столкновения $y_{\alpha} = 0$, $X' = 0$. Дело в том, что при интегрировании по \mathcal{M}_{β} , $\beta \neq \alpha$ второй аргумент ядра $(W_{\alpha}R_{\alpha})(y_{\alpha}, X', z)$ имеет вид $X' = (0, y'_{\beta})$ и условие $x'_{\alpha} \rightarrow 0$, $x'_{\alpha} = s_{\alpha\beta}y'_{\beta}$ выполняется лишь при $y'_{\beta} \rightarrow 0$. Исследование вклада более слабых сингулярностей типа $\frac{1}{|x'_{\alpha}| |y_{\alpha} - y'_{\alpha}|}$, отвечающих дискретному спектру оператора \hat{h}_{α} , не представляет затруднений.

При $X' \in \mathcal{M}_{\beta}$ сингулярности (3.22) приобретают вид

$$(3.30) \quad \frac{C}{|y_{\alpha} - c_{\alpha\beta}y'_{\beta}|^{\nu} (|s_{\alpha\beta}y'_{\beta}| + |y_{\alpha} - c_{\alpha\beta}y'_{\beta}|) |s_{\alpha\beta}y'_{\beta}|}.$$

При этом справедливо неравенство

$$|s_{\alpha\beta}y'_{\beta}| + |y_{\alpha} - c_{\alpha\beta}y'_{\beta}| > C(|y_{\alpha}| + |y'_{\beta}|)$$

с некоторой константой $C > 0$. Так что (3.30) оценивается через

$$(3.31) \quad \frac{C}{|y_{\alpha} - c_{\alpha\beta}y'_{\beta}|^{\nu} (|y_{\alpha}| + |y'_{\beta}|) |y'_{\beta}|}.$$

Для точечных взаимодействий типа (R) (см. соотношение (2.35)), когда в качестве ν можно взять любое сколь угодно малое $\epsilon > 0$, особенности (3.31) являются интегрируемыми, исключая случай, когда $y_{\alpha} \rightarrow 0$. При итерациях уравнений Фаддеева (3.29) эти особенности ослабевают. Начиная с четвертой итерации уравнений (3.29) их ядра могут быть представлены в виде $\frac{f_{\alpha\beta}(y_{\alpha}, y'_{\beta})}{y'_{\beta}}$, где $f_{\alpha\beta}$ – гладкая ограниченная функция в окрестности точки тройного столкновения $y_{\alpha}, y'_{\beta} = 0$. Далее мы применяем стандартную технику [25] и приходим к заключению, что в случае, когда все парные точечные взаимодействия относятся к типу (R), уравнения Фаддеева (3.29) компактны.

Отметим, что совсем по-иному обстоит дело для взаимодействий типа (A). В этом случае $\nu = 1$, и особенность (3.31) неинтегрируема при $y_{\alpha} \rightarrow 0$. Поэтому доказать фредгольмовость уравнений (3.29) в каком-либо смысле, используя технику [25], не удастся. Напомним, что класс (A) содержит при $\theta = 0$ стандартные взаимодействия нулевого радиуса. Для таких взаимодействий уравнения (3.29) при $v_{\alpha} \equiv 0$, $\alpha = 1, 2, 3$, превращаются в уравнения Скорнякова-Тер-Мартиросяна [8].

Эквивалентность однородных уравнений Фаддеева (в случае взаимодействий типа (R)) уравнению Шредингера $(H - z)\Psi = 0$ для собственных функций дискретного спектра проверяется обычным способом [25].

3.4. Дифференциальные уравнения Фаддеева для компонент волновой функции

Как уже отмечалось в разделе 2.1, ядра уравнений Фаддеева (3.29) имеют асимптотические свойства, характерные для быстроубывающих взаимодействий, описываемых как гладкими

потенциалами [25], так и различными вариантами модели граничных условий [23], [27], [30]. Как мы установили в предыдущем разделе, для случая парных точечных взаимодействий типа (R) уравнения (3.29) Фредгольмовы. Все это позволяет утверждать, что для взаимодействий (R) ядро функции Грина внешнего канала $R(X, X', E \pm i0)$ обладает стандартным [25] асимптотическим поведением при X и/или $X' \rightarrow \infty$. В частности, асимптотика этой функции при $X' \rightarrow \infty$ представляет собой сумму сферической волны в \mathbf{R}^6 по переменной X' и сферических волн в \mathbf{R}^3 по переменным y'_β , $\beta = 1, 2, 3$ [25, 30]. Амплитуды этих волн $U_0^{(\pm)}(X, P)$ с импульсом и $P = \pm\sqrt{E}\hat{X}'$ и $U_b^{(\pm)}(x, p_\beta)$, $b = \{\beta, j\}$ с импульсами $p_\beta = \mp\sqrt{E + \lambda_{\beta j}}y'_\beta$ представляют собой внешние компоненты волновых функций непрерывного спектра полного гамильтониана H (ядер волновых операторов).

Функция U_0 описывает процесс рассеяния трех свободных в начальном состоянии частиц, функции U_β отвечают процессам рассеяния изначально свободной частицы на связанной паре β . Эти функции обладают при $X \rightarrow \infty$ асимптотиками, обычными для задачи трех тел [25], [30].

С помощью соотношений (3.15) по U_b , $b = 0$ или $b = \{\beta, j\}$, можно восстановить внутренние компоненты u_α^b , $\alpha = 1, 2, 3$. Тогда полные волновые функции $\mathcal{U}_b(P) = (U_b, u_1^b, u_2^b, u_3^b)$ удовлетворяют таким же, как и в [25], соотношениям полноты и ортогональности.

Чтобы получить дифференциальные уравнения Фаддеева для внешних компонент U_b , $b = 0$ или $b = \{\beta, j\}$, введем сначала компоненты Фаддеева функции Грина $R(z)$:

$$(3.32) \quad R^\alpha(z) = -R_0(\hat{W}_\alpha + v_\alpha)R(z)$$

и применим к обоим частям (3.32) оператор $(-\hat{\Delta}_X - z)$. В результате приходим к дифференциальным уравнениям

$$(3.33) \quad (-\hat{\Delta}_X + \hat{W}_\alpha(z) + v_\alpha - z)R^\alpha(z) = -(\hat{W}_\alpha(z) + v_\alpha)\left[R_0(z) + \sum_{\beta \neq \alpha} R^\beta\right].$$

Из (3.32) следует, что при $X' \notin \bigcup_{\gamma=1}^3 \mathcal{M}_\gamma$ ядро $R^\alpha(X, X', z)$ является сингулярным (как $\frac{1}{|x_\alpha|}$) по переменной X в окрестности гиперплоскости \mathcal{M}_α . В окрестности других гиперплоскостей \mathcal{M}_β , $\beta \neq \alpha$ это ядро имеет частные производные второго порядка, понимаемые в классическом смысле. Поэтому обобщенный лапласиан $-\hat{\Delta}_X$ действует на него как $-\hat{\Delta}_{x_\alpha} - \Delta_{y_\alpha}$ (см. (2.8)). Приравняв коэффициенты при $\delta(x_\alpha)$ в обеих частях равенств (3.33), находим, что ядра $R^\alpha(X, X', z)$ удовлетворяют на гиперплоскостях \mathcal{M}_α следующим крайним условиям по переменной X :

$$(3.34) \quad a_\alpha R^\alpha(z) + W_\alpha(z)\left[R_0(z) + \sum_{\gamma=1}^3 R^\gamma(z)\right] = 0, \quad \alpha = 1, 2, 3.$$

Устремляя второй аргумент X' функции $R^\alpha(X, X', z)$ в (3.33) и (3.34) при $z = E \pm i0$, $E \in \mathbf{R}$ к ∞ , и выделяя в асимптотике амплитуды при соответствующих сферических волнах по X' и y'_β , приходим к краевой задаче

$$(3.35) \quad (-\Delta_X + v_\alpha(x_\alpha) - E)U_b^\alpha(X) = -v_\alpha(x_\alpha)\left[\delta_{b0}\Psi_0(X) + \sum_{\gamma \neq \alpha} U_\gamma^\alpha(X)\right], \quad X \notin \mathcal{M}_\alpha,$$

$$(3.36) \quad a_\alpha U^\alpha + W_\alpha(E \pm i0)\left(\delta_{b0}\Psi_0 + \sum_{\gamma=1}^3 U_\gamma^\alpha\right) = 0, \quad \alpha = 1, 2, 3,$$

где $E > \lambda_{\beta j}$ при $b = \{\beta, j\}$ и $E > 0$ при $b = 0$. Здесь через $\Psi_0(X)$ обозначена падающая плоская волна $\Psi_0(X) = \exp\{i(P, X)\}$, $P^2 = E$, присутствующая в (3.35) и (3.36) лишь при рассмотрении процессов $(3 \rightarrow 2, 3)$, когда $b = 0$. При этом $U_0 = \Psi_0 + \sum_{\gamma=1}^3 U_\gamma^0$ и $U_b = \sum_{\gamma=1}^3 U_\gamma^b$, $b = \{\beta, j\}$. Асимптотические краевые условия при $X \rightarrow \infty$ для компонент $U_b^\alpha(X)$ вполне стандартны [25].

Заметим, что краевые условия (3.36) нелокальны по y_α ввиду того, что обобщенные энергозависящие потенциалы $\hat{W}_\alpha(z) = \delta(x_\alpha)W_\alpha(z)$ являются операторами типа свертки (3.8) по переменной y_α . Поэтому для конкретных численных расчетов более удобным представляется вариант дифференциальных уравнений Фаддеева, получаемый из (3.35), (3.36) в результате восстановления внутренних компонент $u_\alpha^{(b)}(y_\alpha)$ волновых функций \mathcal{U}_b ,

$$(3.37) \quad u_\alpha^{(b)} = (A_\alpha - \Delta_{y_\alpha} - z)^{-1} B_\alpha^+ U_b, \quad z = E \pm i0.$$

Дифференциальные уравнения во внутренних каналах

$$(A_\alpha - \Delta_{y_\alpha} - E)u_\alpha^{(b)} + B_\alpha^+ U_b = 0, \quad \alpha = 1, 2, 3,$$

в силу парного характера операторов B_α^+ локальны относительно переменной y_α . Краевые условия (3.36) переходят в условия

$$(3.38) \quad \mu_{11}^{(\alpha)} a_\alpha U_b^\alpha + \mu_{12}^{(\alpha)} b_\alpha \left(\delta_{b0}\Psi_0 + \sum_{\gamma=1}^3 U_\gamma^\alpha\right) = (u_\alpha^{(b)}, \theta_\alpha),$$

которые также локальны по y_α .

Система дифференциальных уравнений (3.35), (3.37), рассматриваемая совместно с граничными условиями (3.38) и асимптотическими условиями [25] при $X \rightarrow \infty$ для функций $U_\beta^\alpha(X)$ во внешнем канале должна быть дополнена асимптотическими условиями при $y_\alpha \rightarrow \infty$ для внутренних компонент $u_\alpha^{(b)}(y_\alpha)$. Например, для процессов $(2 \rightarrow 2, 3)$ эти условия имеют вид

$$u_\alpha^{(b)}(p_\beta, y_\alpha) \underset{y_\alpha \rightarrow \infty}{\sim} \delta_{\alpha\beta} u_{\beta j} \exp\{i(p_\beta, y_\beta)\} + \sum_{\lambda_{\alpha k} \leq E} u_{\alpha k} \cdot a_{\alpha k}^b \frac{e^{\pm i\sqrt{E-\lambda_{\alpha k}}|y_\alpha|}}{|y_\alpha|},$$

где $E = \lambda_{\beta j} + p_\beta^2$, $b = \{\beta, j\}$ и через $a_{\alpha k}^b$ обозначены амплитуды упругого рассеяния (при $\alpha = \beta$, $k = j$) и перестройки (при $\alpha \neq \beta$ или $k \neq j$). Векторы $u_{\alpha k}$, $\alpha = 1, 2, 3$, $k = 1, 2, \dots, n_\alpha$, представляют собой внутренние компоненты, $u_{\alpha k} \in \mathcal{H}_\alpha^{\text{in}}$, векторов $\mathcal{U}_{\alpha k} = (\Psi_{\alpha k}, u_{\alpha k})$, описывающих связанные состояния в парных подсистемах с энергиями $\lambda_{\alpha k}$.

Используя технику [25] можно доказать однозначную разрешимость сформулированных краевых задач (для случая (R), когда все $\mu_{12}^{(\alpha)} = 0$) при значениях энергии E , не принадлежащих дискретному спектру оператора H .

Литература

- [1] *Fermi E.* // *Ricerca Scientifica*. 1936. V. 7. P. 13–52.
- [2] *Kronig R. de L., Penney W.G.* // *Proc.Roy.Soc.(London)*. 1931. V. 130 A. P. 499–513.
- [3] *Bethe H., Peierls R.* // *Proc.Roy.Soc.(London)*. 1935. V. 148 A. P. 146–156.
- [4] *Березин Ф.А., Фаддеев Л.Д.* // *ДАН СССР*. 1961. Т. 137. № 5. С. 1011–1014.
- [5] *Альбеверио С., Гестези Ф., Хезг-Крон Р., Хольден Х.* Решаемые модели в квантовой механике. — М.: Мир, 1991.
- [6] *Минлос Р.А., Фаддеев Л.Д.* // *ДАН СССР*. 1961. Т. 141. № 6. С. 1335–1338
- [7] *Павлов Б.С.* // *Матем. Сборник*. 1988. Т. 136 (178). № 2. С. 163–177.
- [8] *Скорняков Г.В., Тер-Мартirosян К.А.* // *ЖЭТФ*. 1956. Т. 31. № 5. С. 775–790.
- [9] *Фаддеев Л.Д.* // *ЖЭТФ*. 1960. Т. 39. В. 5. С. 1459–1467.
- [10] *Данилов Г.С.* // *ЖЭТФ*. 1961. Т. 40. № 2. С. 498–507.
- [11] *Фаддеев Л.Д.* // *Тр. МИАН СССР*. 1963. Т. 69. С. 1–114.
- [12] *Thomas L.H.* // *Phys.Rev.* 1935. V. 47. P. 903–909.
- [13] *Newton R.G.* *Scattering theory of waves and particles*. Springer-Verlag, 1982.
- [14] *Шондин Ю.Г.* // *ТМФ*. 1982. Т. 51. № 2. С. 181–191.
- [15] *Thomas L.E.* // *Phys.Rev.D*. 1984. V. 30. P. 1233–1237.
- [16] *Шондин Ю.Г.* // *ТМФ*. 1988. Т. 74. № 3. С. 331–334.
- [17] *Павлов Б.С.* // *ТМФ*. 1984. Т. 59. № 3. С. 345–354.
- [18] *Павлов Б.С., Шушков А.А.* // *Матем.Сборник*. 1988. Т. 137 (179). № 1. С. 147–183.
- [19] *Мотовилов А.К.* // *ТМФ*. 1993. Т. 97. № 2. С. 163–181.
- [20] *Макаров К.А.* // *Preprint FUB/HEP-88-3*. Berlin (West): FUB, 1988.
- [21] *Макаров К.А.* // *Алгебра и анализ*. 1992. Т. 4. В. 5. С. 155–171.
- [22] *Куперин Ю.А., Макаров К.А., Меркурьев С.П., Мотовилов А.К., Павлов Б.С.* // В кн.: *III Всесоюзная школа по малочастичным и кварк-адронным системам*. Вильнюс, 1986. Ч. II. С. 28–73.
- [23] *Куперин Ю.А., Макаров К.А., Меркурьев С.П., Мотовилов А.К., Павлов Б.С.* // *ТМФ*. 1988, Т. 76. № 2. С. 242–260.
- [24] *Куперин Ю.А., К.А.Макаров, Меркурьев С.П., Мотовилов А.К.* // *ЯФ*. 1988. Т. 48. В. 2. С. 358–371.
- [25] *Меркурьев С.П., Фаддеев Л.Д.* *Квантовая теория рассеяния для систем нескольких частиц*. М.: Наука, 1985.
- [26] *Владимиров В.С.* *Обобщенные функции в математической физике*. М.: Наука, 1979.
- [27] *Меркурьев С.П., Мотовилов А.К., Яковлев С.Л.* // *ТМФ*. 1993. Т. 94. № 3. С. 435–447.
- [28] *Буслаев В.С.* // *Известия АН СССР. Сер. матем.* 1975. Т. 39. С. 149–235.
- [29] *Федорюк М.В.* *Метод перевала*. М.: Наука, 1977.
- [30] *Мотовилов А.К.* // *Вестник Ленингр. ун-та*. 1983. № 22. С. 76–79.

Рукопись поступила в издательский отдел
21 февраля 1994 года.