объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

Р5-94-508

Б.Ф.Костенко

О ПРИБЛИЖЕННЫХ КВАНТОВЫХ ИЗМЕРЕНИЯХ

Направлено в журнал «Успехи физических наук»

1994

Теория квантовых измерений имеет свою математическую предысторию, которая началась еще до возникновения самой квантовой механики. В 1912 году Д. Гильберт доказал теорему [1], в соответствии с которой всякий симметричный (т.е. удовлетворяющий условию $< A\psi_1|\psi_2 >=< \psi_1|A\psi_2)$ оператор A в гильбертовом пространстве, имеющий нижнюю грань m и верхнюю грань M, допускает представление в виде

$$A = \int_m^M \lambda E(d\lambda),$$

где $E(d\lambda)$ — некоторая проекторнозначная мера, которая, в общепринятых в физической литературе обозначениях, имеет вид

$$E(d\lambda) = |\lambda >< \lambda| d\lambda.$$

В 1921 году Т. Карлеман, пытаясь перенести эти результаты на неограниченные симметричные операторы, фактически рассмотрел случай,отвечающий, как мы теперь понимаем, приближенным квантовым измерениям. В его работах, в частности, было установлено, что для неограниченных симметричных операторов спектрального разложения, подобного предыдущему, не существует [2]. Вскоре, однако, было замечено, что для получения спектрального разложения необходимо ограничиться самосопряженными операторами (самосопряженные операторы совпадают с симметричными лишь в случае конечномерных гильбертовых пространств [3]). Теорию этих операторов развивали Дж. фон Нейман, М. Стоун и др. уже с учетом нужд формировавшейся в эти годы квантовой механики. В настоящее время принято считать, что всякой физической наблюдаемой отвечает некоторый самосопряженный оператор

$$A = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda|\lambda >< \lambda| d\lambda,$$

а также соответствующее ему разложение единицы

$$1 = \int |\lambda >< \lambda| d\lambda,$$

действующие в гильбертовом пространстве состояний системы. В соответствии с теорией измерений фон Неймана [4] элементарные альтернативы, входящие в разложение единицы

$$E(d\lambda) = |\lambda >< \lambda| d\lambda,$$

имеют следующий физический смысл: среднее значение этих операторов

$$< \psi|E(d\lambda)|\psi >= |\psi(\lambda)|^2 d\lambda$$

описывает вероятность обнаружить систему вблизи точки λ.

В 1940 году М.А. Наймарк получил ряд интересных результатов [5], относящихся к более общему случаю симметричных операторов, которые долгое время считались имеющими лишь чисто математическое значение.

Только в 70 - е годы, в основном благодаря работам Е.Б. Дэвиса [6], а также К. Крауса [7] и А.С. Холево [8], было осознано, что симметричные операторы и связанные с ними неортогональные разложения единицы, являются адекватной математической моделью для описания приближенных квантовых измерений. Использованием представления о приближенных измерениях, было, в частности, снято формально правильное, но противоречащее повседневному опыту утверждение о невозможности одновременного измерения координаты и импульса частицы — координаты и импульс могут быть известны одновременно, если каждая из них измеряется с некоторой, отличной от нуля ошибкой [8]. Далее, было установлено, что, так же, как и для пространственной, временной координате можно приписать некоторый оператор (приближенной) наблюдаемой [8], что так называемые косвенные измерения получают естественное описание в рамках этого подхода [8] и др.

По своему виду неортогональное разложение единицы ничем не отличается от обычного

$$1 = \int M(d\lambda) = \int |\lambda >< \lambda| d\lambda.$$

Единственная разница состоит в том, что векторы $|\lambda >$ теперь не предполагаются ортогональными

$$< \lambda|\lambda' >= w(\lambda, \lambda') \neq \delta(\lambda - \lambda').$$

По этой причине совокупность векторов $|\lambda >$, связанных с неортогональным разложением единицы, иногда называют **переполненной** системой базисных векторов. Квадрат модуля величины $w(\lambda, \lambda')$ описывает степень неразличимости результатов измерения λ и λ', в то время как элементарная альтернатива $M(d\lambda)$ по -прежнему отвечает вероятности регистрации системы вблизи точки λ

$$< \psi|M(d\lambda)|\psi >= |\psi(\lambda)|^2 d\lambda.$$

Оставшаяся часть данной работы будет посвящена обсуждению интерпретационной (т.е. физической) стороны дела, которая, по мнению автора, вплоть до настоящего времени еще недостаточно хорошо проработана [1]. В частности, мы построим простую двумерную модель, описывающую приближенные квантовые измерения , а также обсудим, почему и каким образом стохастизируется вектор состояния системы, подверженной воздействию измерительного устройства, выполняющего приближенное квантовое измерение.

Для одночастичных состояний $|\psi >$,

$$|\psi >= \sum_k C_k |\psi_k >,$$

где $< \psi_i|\psi_k >= \delta_{ik}$, оператор числа частиц, находящихся в состоянии $|\psi_i >$, можно представить в следующем символическом виде[2]

$$N_i = |\psi_i >< \psi_i|.$$

[1] В этой связи показательно мнение Дж. Белла — автора знаменитых неравенств Белла в квантовой механике — который писал: " Концепция "измерения" настолько туманна, что ее появление в физической теории **на самом фундаментальном уровне** представляется весьма неожиданным. Возможно, менее удивляет то обстоятельство, что математики, для которых нужны лишь простые аксиомы об объектах, не определенных никаким другим способом, ухитрились написать много работ по квантовой теории измерений, работ, которые физики - экспериментаторы читать не сочли нужным."[9]

[2] При использовании теоретико - полевых обозначений для одночастичных векторов состояния оператор числа частиц записывается в более привычной форме через операторы рождения и уничтожения частиц.

Действительно, в этом случае для среднего числа частиц, находящихся в состоянии $|\psi_i>$, будем иметь

$$\bar{N}_i =<\psi|N_i|\psi>= |C_i|^2,$$

и, в частности,

$$<\psi_k|N_i|\psi_k>=\delta_{ik},$$

что вполне соответствует интуитивному пониманию процесса измерения числа частиц.

Допустим теперь, что результат измерения количества частиц, находящихся в i-м состоянии, не вполне однозначен. Так, например, может произойти в эксперименте, обсуждавшемся Фейнманом [11], где определяется, через какое из отверстий в экране пролетел электрон с помощью рассеивающихся на нем фотонов, если длина волны фотонов не достаточно мала для того, чтобы наблюдатель мог сказать совершенно определенно, вблизи какого из отверстий в экране произошло рассеяние. Понятно, что в этом случае число частиц, проходящих через каждое из отверстий в экране, будет определяться с конечной, отличной от нуля ошибкой.

Нетрудно построить симметричные операторы (которые в рассматриваемом случае конечномерного пространства состояний будут, к тому же, и самосопряженными), описывающие приближенные измерения такого типа.

Прежде чем перейти к обсуждению этих вопросов, следует отметить, что установка, обсуждавшаяся Фейнманом, работает с отличной от единицы эффективностью, поскольку часть событий в этом случае вообще невозможно интерпретировать как измерение координат электрона. В связи с этим далее мы будем предполагать, что: 1) не рассматриваются события, в которых электрон рассеивается сразу на обоих фотонах, облучающих разные отверстия в экране, 2)если фотон и электрон пролетают через одно и то же отверстие, то они обязательно взаимодействуют друг с другом. Соответственно наоборот — отсутствие взаимодействия является сигналом о том, что они пролетели через разные отверстия в экране. Короче говоря, далее будет обсуждаться только такая выборка из полного ансамбля событий, для которой некоторая

(существенная) информация о координатах электрона поступает в макрообстановку.

Если теперь мы допустим, что вероятность обнаружить фотон γ_i, испущенный в направлении i - го отверстия, равна p_i, то вероятность $\bar{p}_i = 1 - p_i$ регистрации этого фотона вблизи другого отверстия и будет характеризовать статистическую ошибку данного измерения ($p_i \geq \bar{p}_i$). Операторы, приближенно характеризующие число частиц, находящихся в состояниях $|\psi_1>$ и $|\psi_2>$, можно теперь представить в виде

$$N_1 = p_1|\psi_1><\psi_1| + \bar{p}_1|\psi_2><\psi_2|,$$

$$N_2 = \bar{p}_2|\psi_1><\psi_1| + p_2|\psi_2><\psi_2|,$$

где $|\psi_i>$ — вектор состояния электрона, проходящего через i - е отверстие. В этом случае

$$\bar{N}_i =<\psi|N_i|\psi>= p_i|<\psi_i|\psi>|^2 + \bar{p}_i|<\psi_j|\psi>|^2, \ i \neq j,$$

что вполне отвечает смыслу рассматриваемого приближенного измерения [3].

Состояния фотонов, испытавших рассеяние, находятся во взаимно - однозначном соответствии с состояниями электронов

$$|\Phi_1>= C_1|\psi_1> + \bar{C}_1|\psi_2>,$$

$$|\Phi_2>= \bar{C}_2|\psi_1> + C_2|\psi_2>,$$

создающимся после окончания процесса измерения. С физической точки зрения $|\Phi_i>$ являются состояниями электрона, прошедшего "сразу через оба" отверстия в экране с тенденцией локализации $|\Phi_i>$ вблизи $|\psi_i>$.

Представляется естественным определить **операторы измерения**

$$\mathcal{P}_1 = A_1|\psi_1><\psi_1| + \bar{A}_1|\psi_2><\psi_2|,$$

[3]Интересно отметить, что операторам приближенного числа частиц можно сопоставить нечеткие высказывания, принимающие истинностные значения в интервале от 0 до 1, логика которых обсуждалась в работах [11 – 13].

$$\mathcal{P}_2 = \bar{A}_2|\psi_1 >< \psi_1| + A_2|\psi_2 >< \psi_2|,$$

$$|\Phi_i >= \mathcal{P}_i|\psi > .$$

В этих терминах

$$C_1 = A_1 < \psi_1|\psi >,\ \bar{C}_1 = \bar{A}_1 < \psi_2|\psi >,$$

$$C_2 = A_2 < \psi_2|\psi >,\ \bar{C}_2 = \bar{A}_2 < \psi_1|\psi > .$$

Операторы N_i приближенного числа частиц можно теперь представить в виде

$$N_i = \mathcal{P}_i^+\mathcal{P}_i,$$

потребовав

$$p_i = |A_i|^2,\ \bar{p}_i = |\bar{A}_i|^2.$$

В частном случае, когда $\mathcal{P}_i$ являются операторами проектирования

$$\mathcal{P}_i^+ = \mathcal{P}_i,\ \mathcal{P}_i^2 = \mathcal{P}_i,$$

мы имеем теорию точных измерений фон Неймана, в которой

$$N_i = \mathcal{P}_i.$$

Состояния, образующиеся после окончания процесса измерения, в общем случае не ортогональны

$$< \Phi_1|\Phi_2 >= C_1^*\bar{C}_2 + \bar{C}_1^*C_2.$$

Мерой их неортогональности являются амплитуды вероятности $\bar{C}_i \sim \bar{A}_i$ обнаружить γ - кванты вблизи "посторонних" отверстий в экране.

Построим неортогональное разложение единицы, содержащее векторы $|\Phi_1 >$ и $|\Phi_2 >$, полагая для простоты и наглядности, что $C_i, \bar{C}_i, A_i, \bar{A}_i$ — действительные числа. Пусть единичные векторы $|\Phi_i >$ имеют относительно базисных векторов $|\psi_i$ углы наклона α и

β, которые, без нарушения общности, можно считать изменяющи-

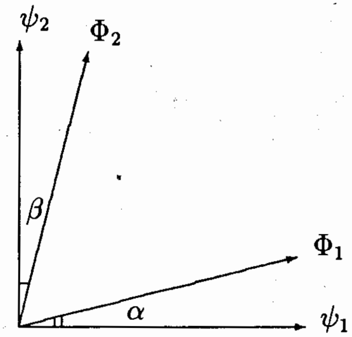

Рис.1

мися в интервале от 0 до $\pi/4$ (см. рис. 1).

В этом случае

$$|\Phi_1 >= \cos\alpha|\psi_1 > + \sin\alpha|\psi_2 >,\ |\Phi_2 >= \sin\beta|\psi_1 > + \cos\beta|\psi_2 >,$$

$$N_1 = \cos^2\alpha|\psi_1 >< \psi_1| + \sin^2\alpha|\psi_2 >< \psi_2|,$$

$$N_2 = \sin^2\beta|\psi_1 >< \psi_1| + \cos^2\beta|\psi_2 >< \psi_2|,$$

причем выбор $\alpha, \beta = 0$ соответствует точному определению отверстия, через которое прошел электрон, а $\alpha, \beta = \pi/4$ — ситуации, когда длина волны фотона настолько велика, что ничего определенного о траектории электронов сказать нельзя.

Искомое неортогональное разложение единицы можно получить почти сразу же, если воспользоваться идеей Наймарка о том, что всякое неортогональное разложение единицы может быть продолжено до ортогонального с помощью некоторого расширения исходного (здесь — 2- мерного) гильбертова пространства состояний [5] [4]. В данном случае мы можем считать, что имеются еще два

[4]Суть этой идеи сводится к тому, чтобы, увеличивая число измерений пространства состояний (с помощью введения некоторых дополнительных степеней свободы), преобразовать "переполненную" систему векторов, отвечающих неортогональному разложению единицы, в полную систему базисных векторов.

единичных вектора $|\Phi_3>$ и $|\Phi_4>$, ортогональных к $|\Phi_1>$ и $|\Phi_2>$

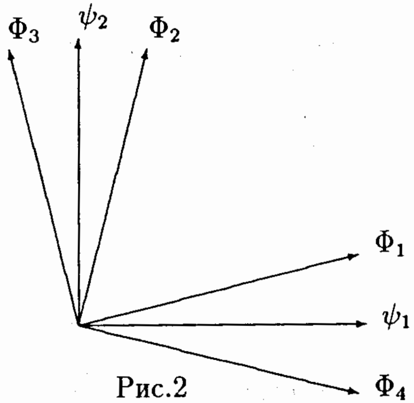

Рис.2

соответственно, указанных на рис. 2.

Упоминающееся в теореме Наймарка расширение здесь сводится к введению еще одной степени свободы, принимающей значения s_1 и s_2, с помощью которых можно пронумеровать состояния, натянутые на базисные векторы $|\Phi_1>$, $|\Phi_2>$ и $|\Phi_2>$, $|\Phi_4>$. Соответствующее ортогональное разложение единицы имеет тогда вид

$$1 = (|\Phi_1><\Phi_1| + |\Phi_3><\Phi_3|) \bigotimes |s_1><s_1| +$$

$$(|\Phi_2><\Phi_2| + |\Phi_4><\Phi_4|) \bigotimes |s_2><s_2|. \qquad (1)$$

Поскольку

$$|\Phi_1><\Phi_1| + |\Phi_3><\Phi_3| = 1,$$

$$|\Phi_2><\Phi_2| + |\Phi_4><\Phi_4| = 1,$$

то искомое неортогональное разложение единицы можно представить в форме

$$1 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4} |\Phi_i><\Phi_i|.$$

Полезность неортогональных разложений единицы состоит прежде всего в том, что они позволяют перечислить все элементарные альтернативы, отвечающие возможным результатам отдельных измерений. Физический смысл операторов N_1 и N_2, соответствующих альтернативам $|\Phi_1><\Phi_1|$ и $|\Phi_2><\Phi_2|$, мы уже обсуждали выше. Коротко говоря, они характеризуют экспериментальную ситуацию, когда γ_1 - и γ_2 - кванты **испытали рассеяние** и отвечают утверждениям: частица прошла через первое или через второе отверстие соответственно, высказанным с отличными от единицы вероятностями $p_1 = \cos^2\alpha, p_2 = \cos^2\beta$ (см. рис. 1). Пользуясь рис.2, можно сразу же выписать, по аналогии с предыдущим случаем, операторы N_3 и N_4, отвечающие альтернативам $|\Phi_3><\Phi_3|$ и $|\Phi_4><\Phi_4|$

$$N_3 = \sin^2\alpha|\psi_1><\psi_1| + \cos^2\alpha|\psi_2><\psi_2|,$$

$$N_4 = \cos^2\beta|\psi_1><\psi_1| + \sin^2\beta|\psi_2><\psi_2|.$$

Нетрудно понять, что они соответствуют **отрицанию** утверждений N_1 и N_2, понимаемому в смысле вероятностной логики, сформулированной в работах [11 — 13]. Например, если N_1 является утверждением о том, что частица прошла через первое отверстие с достоверностью p_1 и через второе — с достоверностью $\bar{p}_1$, то N_3 является отрицанием первого варианта (т.е. утверждением: частица **не прошла** через первое отверстие) с достоверностью $1 - p_1$ и отрицанием второго — с достоверностью $1 - \bar{p}_1$. Иными словами, чем более достоверно некоторое утверждение, тем менее достоверно его отрицание и наоборот. Понятно, что имерения, отвечающие N_3 и N_4, реализуются в тех случаях, когда γ_1 - и γ_2 - кванты **не испытывают** рассеяния на частицах, проходящих через отверстия в экране (отсутствие сигнала о взаимодействии — тоже сигнал!). Тот факт, что любой из элементов пары N_1, N_3 или N_2, N_4 в равной степени подходят для описания степени локализованности частиц вблизи одного из состояний $|\psi_1>$ и $|\psi_2>$, связан с тем формальным обстоятельством, что эти операторы коммутируют

$$[N_1, N_3] = [N_1, 1 - N_1] = 0, \; [N_2, N_4] = [N_2, 1 - N_2] = 0.$$

Именно поэтому они могут быть диагонализованы одновременно в одном и том же — в данном случае в $|\psi_1>, |\psi_2>$ — базисе.

В то же время, нетрудно проверить, что два любых других оператора, например N_1, N_2, не коммутируют и, следовательно, отвечают приближенным измерениям координат, которые не могут быть выполнены одновременно. Таким образом, "переполненный" набор векторов состояний $|\Phi_1>, |\Phi_2>, |\Phi_3>, |\Phi_4>$, в полном соответствии с теоремой Наймарка [5], разбивается на две пары $|\Phi_1>, |\Phi_3>$ и $|\Phi_2>, |\Phi_4>$, являющиеся базисными векторами двух различных гильбертовых пространств, в которых действуют операторы N_1, N_3 и N_2, N_4 соответственно. В качестве индексов s_1 и s_2, входящих в ортогональное разложение единицы (1), в данном случае, очевидно, следует взять γ_1 и γ_2

$$s_1 = \gamma_1, s_2 = \gamma_2,$$

которые отвечают разным (макроскопически различимым) альтернативам. Попытка реализовать измерение с участием обоих γ - квантов (случай, когда электрон рассеивается сразу на обоих γ - квантах), приводит к тому, что альтернативы, отвечающие прохождению электрона через первое и второе отверстие, начинают интерферировать столь сильно, что говорить о каком - либо точном или приближенном измерении координат становится бессмысленным. Поэтому эти события и были исключены из нашего рассмотрения с самого начала.

Обратимся теперь к вопросу о стохастизации вектора состояния системы, вызванному процессом измерения.

Разрушение интерференционной картины, обсуждавшееся в книге Фейнмана, можно объяснить, если принять во внимание соотношение неопределенностей фаза – число частиц. В самом деле, если внешнему наблюдателю доступна информация о числе частиц в точке A (в данном случае это — 0 или 1), то для него полностью утеряны фазовые соотношения между отдельными составляющими волнового пакета. Это приводит к тому, что после усреднения волновой функции в точке A по ансамблю наблюдений все интерференционные члены исчезают.

Например, пусть до измерения имеется вектор состояния $|\psi>$, представляющий собой сумму некоторых интерферирующих друг

с другом альтернатив $|\psi_j>$

$$|\psi> = \sum_j C_j |\psi_j>,$$

где $|\psi_j>$ — собственные векторы эрмитовского оператора наблюдаемой A

$$A|\psi_j> = a_j|\psi_j>.$$

Тогда после проведения измерения получим

$$|\psi> \to \sum_j e^{i\phi_j}\, C_j\, |\psi_j>,$$

где ϕ_j — случайные, не скоррелированные друг сдругом фазы, для которых [5]

$$< e^{i(\phi_j - \phi_k)} > = \delta_{jk}.$$

Это приводит к тому, что в выражении для матрицы плотности все интерференционные члены исчезают:

$$< |\psi><\psi| > = \sum_{j,k} < C_j C_k^* > |\psi_j><\psi_k| = \sum_j |C_j|^2 |\psi_j><\psi_j|.$$

В том случае, когда источник фотонов освещает первое отверстие, стохастический вектор состояния, образующийся после того, как информация о траектории электрона поступит в макрообстановку, будет иметь вид

$$|\psi'> \sim e^{i\phi_1}|\Phi_1> + e^{i\phi_3}|\Phi_3>,$$

где ϕ_1, ϕ_3 — случайные, полностью нескоррелированные друг с другом фазы [6]. Подставляя явное выражение для $|\Phi_1>$ и $|\Phi_2>$,

[5]Здесь скобки $< . >$ обозначают усреднение по ансамблю наблюдений. Поскольку векторы состояний, вообще говоря, случайны, не исключено появление "двойных" скобок. Например, выражение $<< x|\psi >>$ означает, что амплитуда $< x|\psi >$ усредняется по некоторому набору случайных параметров.

[6]Здесь и далее мы пишем символ $\sim$ вместо строгого равенства для того, чтобы не выписывать явно нормировочный множитель, который легко вычисляется из условия

$$<\psi'|\psi'> = <\psi|\psi> = 1.$$

находим

$$|\psi'>\sim (\cos\alpha e^{i\phi_1}+\sin\alpha e^{i\phi_3})<\psi_1|\psi>|\psi_1>+$$
$$(\sin\alpha e^{i\phi_1}+\cos\alpha e^{i\phi_3})<\psi_2|\psi>|\psi_2>.$$

Выражения, стоящие в скобках, — обозначим их C_1 и C_3 — удовлетворяют условиям

$$0\le<C_1C_3^*>\le 1,$$

где нижняя и верхняя границы достигаются при $\alpha=0$ и $\alpha=\pi/4$ соответственно.

Частичная скоррелированность коэффициентов разложения случайной волновой функции — отличительная черта приближенных измерений. Действительно, когда речь идет об одночастичных квантовых состояниях, согласно обычной статистической интерпретации волновой функции, результатом измерения может быть одно из двух: либо $N=0$, либо $N=1$. Поскольку в обоих случаях число частиц известно точно, то фазовые соотношения между отдельными компонентами волнового пакета должны быть полностью утерянными. Например, при измерении количества частиц, находящихся в состояниях $|\psi_1>$ и $|\psi_2>$, волновая функция системы

$$|\psi>=|\psi_1>+|\psi_2>$$

переходит в

$$|\psi'>=e^{i\phi_1}|\psi_1>+e^{i\phi_2}|\psi_2>,$$

где ϕ_1, ϕ_2 — неизвестные случайные, совершенно не скоррелированные друг с другом фазы, распределенные равномерно в интервале от нуля до 2π. Понятно, что любые корреляции между первой и второй компонентами волнового пакета в этом случае полностью исключены

$$<C_1C_2^*>=<e^{i(\phi_1-\phi_2)}>=0.$$

Также не составляет принципиальных затруднений описание процесса стохастизации вектора состояния системы $|\psi>$ и в случае самого общего измерения, заключающегося в последовательной проверке реализации альтернатив $|\Phi_1><\Phi_1|, |\Phi_2><\Phi_2|, \ldots$,

для которых векторы состояния $|\Phi_i>, |\Phi_j>, \ldots$ при $i\neq j$ не обязательно считать ортогональными. Действительно, после проведения первого измерения вектор состояния системы, очевидно, преобразуется следующим образом:

$$|\psi>\to|\psi'>=e^{i\phi_1}|\Phi_1>+e^{i\bar{\phi}_1}(|\psi>-<\Phi_1|\psi>|\Phi_1>).$$

Здесь выражение, стоящее в скобках, играет роль вектора $|\Phi_2>$ из предыдущего примера 2 - мерного пространства состояний. Если обозначить его символом $|\Phi'>$, то переход, вызванный вторым измерением, можно представить в виде

$$|\Phi_1>\to|\Phi_1'>=e^{i\phi_2}<\Phi_2|\Phi_1>|\Phi_2>+$$
$$e^{i\bar{\phi}_2}(|\Phi_2>-<\Phi_2|\Phi_1>|\Phi_2>),$$
$$|\Phi'>\to|\Phi''>=e^{i\phi_2}<\Phi_2|\Phi'>|\Phi_2>+$$
$$e^{i\bar{\phi}_2}(|\Phi'>-<\Phi_2|\Phi'>|\Phi_2>).$$

Таким образом, после выполнения второго измерения система окажется в следующем состоянии:

$$|\psi>\to|\psi'>\to|\psi''>=e^{i\phi_1}|\Phi_1'>+e^{i\bar{\phi}_1}|\Phi_1''>,$$

и т.д. Подставляя в окончательную формулу вместо векторов $|\psi>, |\Phi_i>$ их разложения в ортонормированном базисе $|\psi_i>$ и приводя подобные члены, мы можем теперь найти явное выражение для случайных коэффициентов $C_i(\phi_1,\bar{\phi}_1,\phi_2,\bar{\phi}_2,\ldots)$, задающих вектор состояния системы после проведения n измерений

$$|\psi^{(n)}>=\sum_i C_i(\phi_1,\bar{\phi}_1,\ldots)|\psi_i>.$$

Наши заключительные замечания относятся к интерпретации стохастических векторов состояния. Поскольку при усреднении по ансамблю наблюдений все интерференционные члены сокращаются, квантовая система, обладающая стохастическим вектором состояния, очень напопоминает классическую. При этом возникает соблазн считать, что такая система, как и классическая, будет уже "сама по себе" обладать характеристиками, отвечающими некоторым значениям измеряемой наблюдаемой (приписанным, разумеется, по закону случая). В некотором смысле это так и есть, хотя здесь и следует сделать некоторые оговорки.

Рассмотрим квантовую систему, находящуюся в 2 - мерном пространстве состояний, натянутом на базисные векторы $|1>$ и $|2>$

$$<1|1>=<2|2>=1, \qquad <1|2>=<2|1>=0.$$

Пусть

$$|a>=\frac{|1>+|2>}{\sqrt{2}}, \qquad |b>=\frac{|1>-|2>}{\sqrt{2}}.$$

Этим векторам соответствуют операторы наблюдаемых N и O,

$$N|i>=i|i>, \qquad i=1,2,$$

$$O|c>=c|c>, \qquad c=a,b.$$

Если в начальный момент система находится в состоянии $|a>$, то после проведения измерений прибором типа N она перейдет в состояние

$$|\psi>=\frac{1}{\sqrt{2}}(e^{i\gamma_1}|1>+e^{i\gamma_2}|2>),$$

где γ_i — случайные числа. Аналогично, при измерении прибором O, состояние $|1>$ преобразуется в

$$|\varphi>=\frac{1}{\sqrt{2}}(e^{i\alpha}|a>+e^{i\beta}|b>.$$

Согласно нашей интерпретации, случайный вектор отвечает распределению вероятностей

$$p_1=\frac{1}{2}, \qquad p_2=\frac{1}{2}$$

того, что система находится в состояниях $|1>$ и $|2>$ соответственно. Аналогично, стохастический вектор $|\varphi>$ отвечает ситуации, когда система находится "сама по себе" либо в состоянии $|a>$, либо в состоянии $|b>$, так что последующее вмешательство

наблюдателя сводится лишь к тому, что его задним числом "ставят в известность" о том, в каком именно состоянии пребывает система в данный момент времени.

Тонкость, о которой мы упомянули выше и которая нуждается в дополнительном комментарии, состоит в следующем. Нетрудно проверить, что вектор $|\varphi>$ можно представить также в виде

$$|\varphi>=\frac{1}{\sqrt{2}}(C_1|1>+C_2|2>),$$

где

$$C_1=\frac{e^{i\alpha}+e^{i\beta}}{\sqrt{2}}, \qquad C_2=\frac{e^{i\alpha}-e^{i\beta}}{\sqrt{2}}.$$

Коэффициенты C_1 и C_2 обладают в точности теми же свойствами, что и коэффициенты $e^{i\gamma_1}$ и $e^{i\gamma_2}$ в выражении для $|\psi>$, которые только и регистрируются в эксперименте. Именно,

$$<C_i^*C_j>=\delta_{ij}, \qquad i,j=1,2.$$

Таким образом, сказать, что система находится "сама по себе" в состоянии, обладающем некоторым значением наблюдаемой, можно, вообще говоря, лишь с той оговоркой, что при этом уже задано ее макроокружение. Так, в рассматриваемом примере состояния $|\psi>$ и $|\varphi>$, хотя и различны (так как $|e^{i\gamma_j}|=1, |C_j|$, в общем случае, отличается от 1), тем не менее ведут себя абсолютно одинаково во всех мыслимых и реальных экспериментах.

Интересно отметить, что в общепринятом в квантовой механике формализме обоим стохастическим векторам состояния соответствует одна и та же матрица плотности

$$\rho=<|\psi><\psi|>=<|\varphi><\varphi|>=$$

$$\frac{1}{2}|1><1|+\frac{1}{2}|2><2|=\frac{1}{2}|a><a|+\frac{1}{2}|b><b|.$$

В связи с этим д' Эспанья [14] ввел понятия "настоящей" (proper) и "ненастоящей" (improper) смеси для того, что бы различать матрицу плотности, отвечающую "своему" и "не своему" измерению. Тот факт, что стохастическое описание позволяет различать эти состояния ("своим" является такое представление матрицы плотности, при котором $|C_j| = 1$) следует считать его достоинством.

Наконец, еще одно замечание относительно стохастических векторов состояния. Рассмотрим следующую теоретическую ситуацию. Пусть некто пришел в казино и решил сыграть в рулетку. Предположим, что номер, на который он ставит, в силу некоторых особенностей его характера, выбирается совершенно случайно. Предположим также, что хозяин казино располагает возможностями влиять на исход игры. Желая доставить своему гостю удовольствие, он всякий раз, после того как сделаны ставки, воздействует на рулетку, увеличивая вероятность выпадения необходимого номера. Тогда распределение вероятностей выиграть приз будет меняться от игры к игре совершенно случайным образом, хотя никакими математическими методами было бы не возможно установить этот факт.

Нечто похожее имеет место и в рассматриваемом случае. Вектору состояния

$$|\psi >= \frac{1}{\sqrt{2}}(e^{i\gamma_1}|1> + e^{i\gamma_2}|2>)$$

отвечает распределение вероятностей

$$p_1 = \frac{1}{2}, p_2 = \frac{1}{2}$$

обнаружить систему в состояниях $|1>$ и $|2>$. В то же время для вектора

$$|\varphi >= \frac{1}{\sqrt{2}}(C_1|1> + C_2|2>)$$

имеем для этих же событий

$$p_1 = \frac{1}{2} + \delta,\ p_2 = \frac{1}{2} - \delta,$$

где $\delta = \frac{cos(\beta-\alpha)}{2}$ — случайное число, удовлеторяющее требованиям

$$-\frac{1}{2} \leq \delta \leq \frac{1}{2},\ <\delta>= 0.$$

Число δ соответствует случайному выбору игрока в рулетку в предыдущем примере, однако, в отличие от этого случая, его значение теперь никому не известно. В некотором (хотя, разумеется, и не в общепринятом в квантовой механике) смысле, число δ представляет собой некоторый "скрытый параметр", отвечающий за стохастизацию результатов измерений.

Последнее соотношение описывает ситуацию, когда измерение типа N выполняется сразу же после окончания воздействия на систему прибора O. Замена измерительного устройства приводит к следующему (ненаблюдаемому) изменению вектора состояния

$$|\varphi >= \frac{1}{\sqrt{2}}(C_1|1> + C_2|2>) \to \frac{1}{\sqrt{2}}(C_1'|1> + C_2'|2>),$$

где $C_j' = e^{i\gamma_j}C_j$, $|C_j'|$ — случайное число. Поменяв приборы O и N друг с другом два раза, мы, очевидно, стохастизуем вероятности обнаружить систему как в состояниях $|1>$ и $|2>$, так и в состояниях $|a>$ и $|b>$.

Литература

[1] *D. Hilbert.* Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen, Leipzig, 1912.

[2] *T. Carleman.* Sur les équations integrales singulières à noyau réel symétrique, Uppsala,1923.

[3] *Ф. Рисс, Б. С. - Надь.* Лекции по функциональному анализу, М., Мир, 1979.

[4] *И. фон Нейман.* Математические основы квантовой механики, М., Наука, 1964.

[5] *М.А. Наймарк,* Изв. АН СССР, сер. матем., **4**, (1940) 53, 277.

[6] *E.B. Davies.* Quantum Theory of Open Systems, Academic Press, London, 1976.

[7] *K. Kraus.* Lect. Notes Phys. **190**, 1983, p. 1; **29**, 1974, p. 206.

[8] *А.С. Холево.* Вероятностные и статистические методы квантовой теории, М., Наука, 1980.

[9] *J. S. Bell,* in "Quantum Gravity 2", Eds. Isham, Penrose, Sciama; Oxford, 1981, p.611.

[10] *Р. Фейнман, Р. Лейтон, М. Сэндс.* Фейнмановские лекции по физике, М., Мир, 1966.

[11] *Н.Б. Богданова, Б.Ф. Костенко.* Сообщение ОИЯИ Р5 - 89 - 402, 1989.

[12] *Н.Б. Богданова, Б.Ф. Костенко.* Сообщение ОИЯИ Р5 - 89 - 403, 1989.

[13] *N Bogdanova, B.F. Kostenko.* Transactions of XI Prague Conference on Information Theory, Statistical Decision Functions, Random Processes, Prague, 1990.

[14] *B. d'Espagnat.* Conceptual Foundations of Quantum Mechanics, London, 1976.

Рукопись поступила в издательский отдел
28 декабря 1994 года.

Костенко Б.Ф. Р5-94-508

О приближенных квантовых измерениях

Обсуждается концепция приближенных измерений в квантовой механике. С помощью конкретных примеров дается физическая интерпретация несамосопряженным операторам наблюдаемых.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна, 1994

Перевод автора

Kostenko B.F. P5-94-508

On Approximate Quantum Measurements

Theory of approximate quantum measurements is discussed. With the help of some examples the physical interpretation of nonselfadjoint operators of physical observables is done.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna, 1994