объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

405-94

P5-94-405

М.А.Назаренко

О НАИЛУЧШЕМ ЛОКАЛЬНОМ НЕГЛОБАЛЬНОМ РАЦИОНАЛЬНОМ ПРИБЛИЖЕНИИ В ПРОСТРАНСТВЕ $H_2(D)$

Направлено в журнал «Математический сборник»

1994

Назаренко М.А. Р5-94-405

О наилучшем локальном неглобальном рациональном приближении в пространстве $H_2(D)$

Для любого натурального k в пространстве Харди $H_2(D)$ найдена такая функция, что ее рациональная аппроксимация степени $(k,1)$ с полюсом в точке $1/\sqrt{2}$ дает наилучшее локальное неглобальное приближение в совокупности всех рациональных функций.

Работа выполнена в Лаборатории ядерных проблем ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна, 1994

Перевод автора

Nazarenko M.A. P5-94-405

On the Best Local Nonglobal Rational Approach in the Space $H_2(D)$

For any natural number k the function from the Hardy space $H_2(D)$ is found that its rational approximation of $(k,1)$ degree with pole in $1/\sqrt{2}$ gives the best local nonglobal approach in the unit of all rational functions.

The investigation has been performed at the Laboratory of Nuclear Problems, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna, 1994

Пространство Харди $H_2(\mathcal{D})$образовано аналитическими в единичном круге $\mathcal{D} = \{z : |z| < 1\}$ функциями

$$f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} f_j \, z^j \tag{1}$$

с конечной нормой

$$||f||^2 = \sum_{j=0}^{\infty} |f_j|^2.$$

Символом $\Omega_k(c)$ обозначим квадрат величины наименьшего уклонения функции $f \in H_2(\mathcal{D})$ от подпространства рациональных функций степени $(k, 1)$ с фиксированным знаменателем $(1 - \bar{c}z)$ при $c \in \mathcal{D}$. Если функция Ω_k имеет в некоторой точке локальный минимум, то будем говорить, что у функции f существует наилучшая локальная аппроксимация степени $(k, 1)$. Основным результатом работы является

Теорема. *Для любого натурального числа k существует функция $f \in H_2(\mathcal{D})$, рациональная аппроксимация степени $(k, 1)$ которой дает наилучшее локальное неглобальное приближение.*

Замечание. В работе [1] с использованием методов численного эксперимента показано, что при достаточно большом α в пространстве $C[0, \alpha]$ у функции e^{-x} существует наилучшая локальная неглобальная рациональная аппроксимация в классе действительных рациональных функций с отрицательными полюсами. В статье [2] доказано, что функции Стилтьеса

$$f(z) = \int \frac{d\mu(t)}{z - t},$$

где μ — конечная неотрицательная мера Бореля с носителем внутри некоторого отрезка, лежащего на интервале $(-1, 1)$, ни при каком натуральном n не имеют наилучшей локальной аппроксимации рациональными функциями степени (n, n), не являющейся одновременно и глобальной, в действительном пространстве Харди $H_{2,R}(V)$, при $V = \{z \in \mathbf{C}\colon |z| > 1\}$.

Доказательство теоремы. При заданном элементе (1) пространства $H_2(\mathcal{D})$ и фиксированном натуральном k введем вспомогательную функцию

$$F_k(z) = \sum_{j=0}^{\infty} f_{k+j} z^j.$$

Из работы [3] (лемма 1) известно, что

$$\Omega_k(c) = \|F_k\|^2 - \left(1 - |c|^2\right) \cdot \left|F_k(c)\right|^2. \tag{2}$$

В той же работе (теорема 1) для элемента $f \in H_2(\mathcal{D})$, не являющегося полиномом степени $k-1$, доказано, что стационарные точки c функции Ω_k, в которых эта функция может иметь минимум, удовлетворяют равенству

$$\sum_{j=0}^{\infty} f_{k+j}\, c^{j-1} \cdot \left(-j + (j+1)|c|^2\right) = 0. \tag{3}$$

Получим некоторые свойства функции Ω_k для полинома

$$f(z) = z^k - \frac{3}{2\sqrt{2}} z^{k+1} + 2z^{k+2}. \tag{4}$$

Лемма 1. *Функция уклонения Ω_k полинома (4) в своих стационарных точках $c = \pm 1/\sqrt{2}$ принимает различные значения.*

Доказательство. Действительно, в этом случае

$$F_k(z) = 1 - \frac{3}{2\sqrt{2}} z + 2z^2,$$

$$F_k\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{5}{4}, \quad F_k\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{11}{4}, \quad \|F_k\|^2 = \frac{49}{8}, \tag{5}$$

и уравнение (3) имеет вид

$$\overline{c} - \frac{3}{2\sqrt{2}}\left(-1 + 2|c|^2\right) + 2c\left(-2 + 3|c|^2\right) = 0.$$

Подстановкой проверяем, что значения $c = \pm 1/\sqrt{2}$ являются корнями этого уравнения, а значит, и точками стационарности. Используя (2) и (5), вычислим значения функции Ω_k в этих точках:

$$\Omega_k\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{49}{8} - \frac{121}{32} = \frac{75}{32}, \quad \Omega_k\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{49}{8} - \frac{25}{32} = \frac{171}{32}.$$

Лемма доказана.

Итак, для доказательства теоремы достаточно показать положительную определенность матрицы второго дифференциала функции Ω_k в вещественных координатах в точках $c = \pm 1/\sqrt{2}$. Из работы [3] (лемма 2) известно, что

$$\frac{\partial}{\partial c}\Omega_k(c) = \overline{F_k(c)} \cdot \sum_{j=0}^{\infty} f_{k+j}\, c^{j-1} \cdot \left(-j + (j+1)|c|^2\right).$$

Перепишем последнее равенство в развернутой форме

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial c}\Omega_k(c) &= \sum_{s=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} \overline{f}_{k+s}\,\overline{c}^s \cdot f_{k+j}\, c^{j-1} \cdot \left(-j + (j+1)|c|^2\right) = \\ &= \sum_{s=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} \overline{f}_{k+s}\, f_{k+j} \cdot \left(-j\,\overline{c}^s\, c^{j-1} + (j+1)\,\overline{c}^{s+1}\, c^j\right).\end{aligned} \tag{6}$$

Теперь отметим одно общее свойство второго дифференциала функции уклонения Ω_k произвольного элемента $f \in H_2(\mathcal{D})$ в вещественных координатах, если полюс приближающего подпространства рациональных функций лежит на вещественной оси.

Лемма 2. *Второй дифференциал функции уклонения Ω_k произвольного элемента $f \in H_2(\mathcal{D})$ в вещественных координатах при $c = \overline{c} = x$ имеет вид*

$$\begin{aligned}d^2\Omega_k(x) &= 2\left(\frac{\partial^2}{\partial c\partial\overline{c}}\Omega_k(x) + \frac{\partial^2}{\partial c^2}\Omega_k(x)\right) dx^2 + \\ &+ 2\left(\frac{\partial^2}{\partial c\partial\overline{c}}\Omega_k(x) - \frac{\partial^2}{\partial c^2}\Omega_k(x)\right) dy^2.\end{aligned}$$

Доказательство. Рассмотрим второй дифференциал:

$$d^2\Omega_k(c) \equiv \frac{\partial^2}{\partial c^2}\Omega_k(c) \cdot dc^2 + 2\frac{\partial^2}{\partial c\partial\overline{c}}\Omega_k(c) \cdot dc d\overline{c} + \frac{\partial^2}{\partial \overline{c}^{\,2}}\Omega_k(c) \cdot d\overline{c}^{\,2}.$$

Перейдем к вещественным координатам:

$$dc = dx + idy, \qquad d\overline{c} = dx - idy,$$

$$dc^2 = dx^2 - dy^2 + 2idxdy,\ dcd\overline{c} = dx^2 + dy^2,\ d\overline{c}^{\,2} = dx^2 - dy^2 - 2idxdy.$$

После подстановки получаем:

$$\begin{aligned} d^2\Omega_k(c) \ \equiv\ & \left(2\frac{\partial^2}{\partial c\partial\overline{c}}\Omega_k(c) + \frac{\partial^2}{\partial c^2}\Omega_k(c) + \frac{\partial^2}{\partial\overline{c}^{\,2}}\Omega_k(c)\right)dx^2 + \\ & +2i\left(\frac{\partial^2}{\partial c^2}\Omega_k(c) - \frac{\partial^2}{\partial\overline{c}^{\,2}}\Omega_k(c)\right)dxdy + \\ & +\left(2\frac{\partial^2}{\partial c\partial\overline{c}}\Omega_k(c) - \frac{\partial^2}{\partial c^2}\Omega_k(c) - \frac{\partial^2}{\partial\overline{c}^{\,2}}\Omega_k(c)\right)dy^2. \qquad (7) \end{aligned}$$

Используя (6), несложно видеть, что

$$\overline{\left(\frac{\partial^2}{\partial\overline{c}^2}\Omega_k(c)\right)} = \frac{\partial^2}{\partial c^2}\Omega_k(c) =$$

$$= \overline{F_k(c)} \cdot \sum_{j=0}^{\infty} f_{k+j}\, c^{j-2} \cdot j \cdot \left(-(j-1) + (j+1)|c|^2\right) =$$

$$= \sum_{s=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} \overline{f}_{k+s}\, f_{k+j}\, \overline{c}^{\,s}\, c^{j-2} \cdot j \cdot \left(-(j-1) + (j+1)|c|^2\right), \qquad (8)$$

а смешанная производная

$$\frac{\partial^2}{\partial\overline{c}\partial c}\Omega_k(c) = \frac{\partial^2}{\partial c\partial\overline{c}}\Omega_k(c) =$$

$$= \sum_{s=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} \overline{f}_{k+s}\, f_{k+j} \cdot \left(-s\, j\, \overline{c}^{\,s-1}\, c^{j-1} + (s+1)\,(j+1)\,\overline{c}^{\,s}\, c^{j}\right) =$$

$$= \sum_{s=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} \overline{f}_{k+s}\, \overline{c}^{\,s-1} \cdot f_{k+j}\, c^{j-1} \cdot \left(-s\, j + (s+1)\,(j+1)\,|c|^2\right).$$

Подставляя $c = \overline{c} = x$ в выражение (8) для обеих повторных производных и используя соотношение (7), получаем доказательство леммы.

Лемма 3. *В точках $c = \pm 1/\sqrt{2}$ второй дифференциал функции уклонения Ω_k полинома (4) положительно определен.*

Доказательство. Вычислим значения элементов второго дифференциала функции Ω_k в этих точках. Сначала двойные производные:

$$\overline{\left(\frac{\partial^2}{\partial\overline{c}^2}\Omega_k(c)\right)} = \frac{\partial^2}{\partial c^2}\Omega_k(c) =$$

$$= \overline{F_k(c)} \cdot \sum_{j=0}^{2} f_{k+j}\, c^{j-2} \cdot j \cdot \left(-(j-1) + (j+1)|c|^2\right).$$

Используя равенства (5), получаем:

$$\frac{\partial^2}{\partial c^2}\Omega_k\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{11}{4} \cdot \left(0 + \frac{-3}{2\sqrt{2}} \cdot 2 \cdot \frac{-1}{\sqrt{2}} + 2 \cdot 2 \cdot \left[-1 + 3 \cdot \frac{1}{2}\right]\right) =$$

$$= \frac{11}{4} \cdot \frac{3+4}{2} = \frac{77}{8},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial c^2}\Omega_k\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{5}{4} \cdot \left(0 + \frac{-3}{2\sqrt{2}} \cdot 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + 2 \cdot 2 \cdot \left[-1 + 3 \cdot \frac{1}{2}\right]\right) =$$

$$= \frac{5}{4} \cdot \frac{-3+4}{2} = \frac{5}{8}.$$

Теперь смешанные производные:

$$\frac{\partial^2}{\partial\overline{c}\partial c}\Omega_k(c) = \frac{\partial^2}{\partial c\partial\overline{c}}\Omega_k(c) =$$

$$\begin{aligned} = \ & \sum_{s=0}^{2}\sum_{j=0}^{2} \overline{f}_{k+s}\, \overline{c}^{\,s-1} \cdot f_{k+j}\, c^{j-1} \cdot \left(-s\, j + (s+1)\,(j+1)\,|c|^2\right) = \\ = \ & _{(s=0)}\ \frac{1}{\overline{c}} \cdot \left(\overline{c} + \frac{-3}{2\sqrt{2}} \cdot 2\,|c|^2 + 2\,c \cdot 3\,|c|^2\right) + \\ & +_{(s=1)}\ \frac{-3}{2\sqrt{2}} \cdot \left(2\,\overline{c} + \frac{-3}{2\sqrt{2}} \cdot \left(-1 + 4\,|c|^2\right) + 2\,c \cdot \left(-2 + 6\,|c|^2\right)\right) + \\ & +_{(s=2)}\ 2\,\overline{c} \cdot \left(3\,\overline{c} + \frac{-3}{2\sqrt{2}} \cdot \left(-2 + 6\,|c|^2\right) + 2\,c \cdot \left(-6 + 9\,|c|^2\right)\right) = \\ = \ & 1 - \frac{3}{\sqrt{2}}\,c + 6\,c^2 + \frac{3}{\sqrt{2}}\,\overline{c} - \frac{9}{8} + \frac{9}{2}\,|c|^2 + \frac{6}{\sqrt{2}}\,c - \frac{18}{\sqrt{2}}\,c\,|c|^2 + \\ & 6\,\overline{c}^{\,2} + \frac{6}{\sqrt{2}}\,\overline{c} - \frac{18}{\sqrt{2}}\,\overline{c}\,|c|^2 - 24\,|c|^2 + 36\,|c|^4. \end{aligned}$$

Перепишем полученное выражение для случая $c = \bar{c} = x$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial\bar{c}\partial c}\Omega_k(x) &= \left(1-\frac{9}{8}\right)+\left(-\frac{3}{\sqrt{2}}-\frac{3}{\sqrt{2}}+\frac{6}{\sqrt{2}}+\frac{6}{\sqrt{2}}\right)x+\\ &+\left(6+\frac{9}{2}+6-24\right)x^2+\left(-\frac{18}{\sqrt{2}}-\frac{18}{\sqrt{2}}\right)x^3+36x^4=\\ &= -\frac{1}{8}+\frac{6}{\sqrt{2}}x-\frac{5}{2}x^2-\frac{36}{\sqrt{2}}x^3+36\,x^4.\end{aligned}$$

Теперь подставим конкретные значения:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial\bar{c}\partial c}\Omega_k\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) &= -\frac{1}{8}-\frac{6}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{5}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{36}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{2}}+36\cdot\frac{1}{4}=\\ &= \frac{-1-24-10+72+72}{8}=\frac{109}{8},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial\bar{c}\partial c}\Omega_k\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) &= -\frac{1}{8}+\frac{6}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{5}{2}\cdot\frac{1}{2}-\frac{36}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{2}}+36\cdot\frac{1}{4}=\\ &= \frac{-1+24-10-72+72}{8}=\frac{13}{8}.\end{aligned}$$

С помощью предыдущей леммы простой подстановкой полученных значений для частных производных проверяется положительная определенность матриц второго дифференциала функции Ω_k в точках $c = \pm 1/\sqrt{2}$, что доказывает эту лемму и теорему.

Автор благодарен доценту кафедры теории функций и функционального анализа Н. С. Вячеславову (МГУ) за обсуждение постановок задач и методов их доказательств. Автор глубоко признателен профессору Е. П. Долженко (МГУ), профессору Е. П. Жидкову (ЛВТА) и доценту В. В. Вавилову(МГУ) за внимание и поддержку работы над данной тематикой. Автор признателен О. Г. Смирновой и Т. А. Стриж за практическую помощь при проведении численного графического эксперимента, результаты которого значительно ускорили появление аналитических доказательств. Автор благодарен профессору В. Г. Зинову за дружеские и стимулирующие дискуссии.

Литература

[1] Kaufmann E. H., Taylor G. D. Uniform approximation with rational function having negative poles. // J. Approxim. Theory. 1978. **23**(4). P. 364–378.

[2] Baratchart L., Wielonsky F. Rational approximation in the real Hardy space H_2 and Stieltjes integrals: A uniqueness theorem. // Constr. Approximat. 1993. **9**(1). P. 1–21.

[3] Назаренко М. А. Некоторые свойства рациональных аппроксимаций степени $(k, 1)$ в пространстве Харди $H_2(\mathcal{D})$. // ОИЯИ, Р5-94-292, Дубна, 1994.

Рукопись поступила в издательский отдел
19 октября 1994 года.